

УДК 539.3: 534.1

О.Ю. СметанниковПермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия**ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕГУЛИРОВАНИЯ
ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В СТЕКЛЮЩИХСЯ КОНСТРУКЦИЯХ**

Решается задача минимизации остаточных перемещений в круглой пластинке из эпоксидной смолы ЭД-20 с помощью дополнительного силового воздействия. Для описания термомеханического поведения материала с релаксационным переходом используется разработанная ранее модель. При численном расчете применяется методика суперпозиции пошаговых решений задач термоупругости, реализованная в конечно-элементном пакете ANSYS. Показано, что снятие ограничений на класс функций управления качественно меняет решение и позволяет существенно снизить уровень регулирующей нагрузки.

Ключевые слова: стеклование, численные методы, технологические напряжения, остаточные напряжения, метод конечных элементов, оптимизация

O.Yu. Smetannikov

State National Research Polytechnic University of Perm, Perm, Russian Federation

**ABOUT ONE OPTIMIZATION METHOD
OF THE RESIDUAL STRESSES IN CONSTRUCTIONS
WITH GLASS TRANSITION**

The problem of minimization of the residual displacements in the round epoxy resin ED-20 plate by additional force loading is solved. For the description of thermomechanical behaviour of a material with relaxation transition the model developed earlier is used. The technique of superposition of step-by-step thermoelasticity problems solving, realized in ANSYS program, is used at numerical calculations. It is shown, that absence of restriction to the type of external force function allows to lower considerably a level of operating loading.

Keywords: vitrification, numerical methods, technological stresses, residual stresses, finite element method, optimization

Для описания термомеханического поведения стеклующейся среды используется модель упругого приближения, учитывающая эффект «замораживания» деформаций при охлаждении материала и плавность релаксационного перехода, завершенность которого описывается сте-

пенью стеклования N . Основные аспекты, связанные с построением и использованием данной модели в прикладных технологических задачах, изложены в работах [1–14]. Методика оптимизации остаточных напряжений в изделиях из стеклующихся полимерных материалов внешним силовым воздействием описана в [15]. Там же для иллюстрации возможностей предложенного алгоритма минимизации остаточных напряжений решена одномерная модельная задача поиска оптимального кинематического воздействия для неравномерно охлаждаемого пакета стеклующихся стержней с двумя видами управляющего воздействия в виде кусочно-линейных функций от времени. В работе [16] модель оптимизации применена для уменьшения остаточного прогиба неравномерно охлаждаемой в воде круглой пластинки. При этом регулирующее давление интерполируется полиномиальной функцией времени.

В данной работе рассматривается пример возможного использования предложенной методики оптимального управления остаточным НДС, в котором, в отличие от [15], [16], на вид функциональной зависимости от времени управляющей нагрузки не накладываются дополнительных ограничений.

Рассматривается процесс неравномерного осесимметричного охлаждения в воде круглой пластинки из эпоксидной смолы ЭД-20 с размерами $R=37,5$ мм, $H=6,5$ мм (рис. 1). В соответствии с программой эксперимента, описанного в [12], подготовленный образец нагревается до $150\text{--}170^\circ\text{C}$ (температура, превышающая условную температуру начала стеклования T_{g1} , при которой степень стеклования $N(T > T_{g1})=0$ [1]) и затем охлаждается путем погружения в воду нижней поверхности пластины. Результаты опыта [12] свидетельствуют, что как во время, так и по окончании охлаждения в конструкции возникают прогибы порядка 1 мм, обусловленные существенными градиентами температуры по толщине круглой пластинки

Поставим задачу оптимизации остаточного деформированного состояния в следующей формулировке: с помощью переменного во времени силового воздействия равномерно распределенной поверхностной нагрузкой $p(t)$ требуется минимизировать отклонение от плоскости верхней поверхности образца вида $\tilde{u}_z(r) = u_z(r, H) - u_z(0, H)$ (см. рис. 1). При этом будем полагать, что взаимным влиянием дополнительного силового воздействия и температурного поля можно пре-

небрежь (возникающие в конструкции температурные деформации пластины не изменяют значение приложенной нагрузки, а тепловыделение, обусловленное диссипацией энергии дополнительного силового воздействия, пренебрежимо мало).

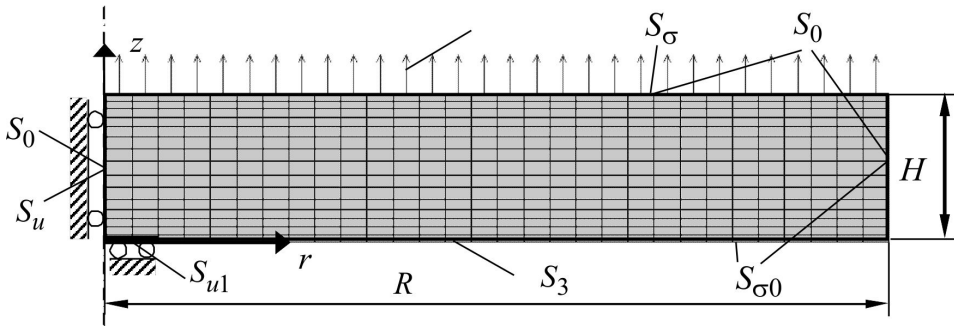


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Для описания термомеханического поведения материала образца используем предложенную ранее модель упругого приближения вида [1]

$$\hat{\sigma}(t) = ({}^4\hat{C}_1 + {}^4\hat{C}_2 N(t)) \cdot \bar{\hat{\varepsilon}}(t) - {}^4\hat{C}_2 \cdot \int_0^{N(t)} \bar{\hat{\varepsilon}}(\tau) dN(\tau), \quad (1)$$

где ${}^4\hat{C}_2 = {}^4\hat{C}_g - {}^4\hat{C}_1$; ${}^4\hat{C}_g$, ${}^4\hat{C}_1$ – тензоры упругих констант материала в стеклообразном и высокоэластичном состояниях соответственно; $\bar{\hat{\varepsilon}}(t) = \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_T$; $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\varepsilon}_T$ – тензоры полных и температурных деформаций соответственно; $\varepsilon_{Tij} = \int_{T_0}^{T(t)} \alpha_{ij}(\tau) dT(\tau)$; $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$; α – коэффициент температурного расширения; δ_{ij} – символ Кронекера; $\hat{\sigma}(t)$ – тензор напряжений; $T(t)$, T_0 – текущая и начальная температуры соответственно; t – время. Связь между степенью стеклования N и температурой T можно описать, например, зависимостью [1]

$$N(T, \dot{T}) = \begin{cases} 1 - 0,5 \exp\left(\frac{T - T_g(\dot{T})}{\gamma}\right), & T < T_g, \\ 0,5 \exp\left(\frac{-(T - T_g(\dot{T}))}{\gamma}\right), & T \geq T_g, \end{cases} \quad (2)$$

где γ – параметр, определяющий ширину интервала стеклования, T_g – температура стеклования.

Для определения остаточного напряженно-деформированного состояния конструкции с учетом сделанных допущений требуется последовательно решить две краевых задачи: нестационарной теплопроводности и на ее основе – расчет напряженно-деформированного состояния (НДС).

Нестационарное температурное поле $T(\mathbf{x}, t)$ в области Ω определяется из решения задачи теплопроводности:

$$\dot{T}(\mathbf{x}, t) = a^2 \Delta T(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, t^*], \quad (3)$$

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} (T(\mathbf{x}, t^*)) < T_{g2}, \quad (4)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0; \quad T(\mathbf{x}, t) = T_{fin}, \quad t > t^*, \quad (5)$$

$$\lambda \mathbf{n} \cdot \text{grad}(T) = h(T(\mathbf{x}, t) - T_s(t)), \quad \mathbf{x} \in S_3, \quad (6)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad}(T) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0, \quad (7)$$

где T_{g2} – условная температура конца стеклования ($N(T > T_{g2}) = 1$).

В работе [15] показано, что для материалов, имеющих физические соотношения вида (1), в силу физической и геометрической линейности задачи расчета НДС можно применить принцип суперпозиции отдельных решений «температурной» и «силовой» задач. Разобьем интервал времени до момента окончательного охлаждения $[0, t^*]$ на N_t не обязательно равных подынтервалов. Под «силовой» понимается постановка задачи определения НДС вида

$$\text{div } \delta \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t_k) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8)$$

$$\delta \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_k) = ((\nabla \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k))^T + \nabla \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k)) / 2, \quad (9)$$

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_u \cup S_{u1}, \quad (10)$$

$$\delta \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \delta p(t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_\sigma; \quad \delta \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in S_{\sigma 0}, \quad (11)$$

$$\delta \hat{\sigma}(t) = \left[{}^4 \hat{C}_1 + {}^4 \hat{C}_2 N(T(t_k)) \right] \cdot \delta \hat{\varepsilon}(t_k); \quad \delta \hat{\varepsilon}_T = \hat{\mathbf{0}}, \quad (12)$$

где $\delta p(t_k) = p(t_k) - p(t_{k-1})$ – приращение величины внешней распределенной нагрузки на k -м шаге по времени; $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ – вектор внешней нормали. Главными отличительными признаками данной постановки яв-

ляется включение внешнего силового воздействия при отсутствии температурных деформаций.

«Температурная» краевая задача также решается на каждом временном шаге и предполагает свободное (без регулирующей нагрузки $p(t)$) охлаждение конструкции:

$$\operatorname{div} \delta \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t_k) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (13)$$

$$\delta \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_k) = ((\nabla \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k))^T + \nabla \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k)) / 2, \quad (14)$$

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_u \cup S_{u1}, \quad (15)$$

$$\delta \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma \cup S_{\sigma 0}, \quad (16)$$

$$\delta \hat{\sigma}(t_k) = \left({}^4\hat{C}_1 + {}^4\hat{C}_2 N(t_k) \right) \cdot \delta \bar{\varepsilon}(t_k), \quad (17)$$

где $\delta \bar{\varepsilon} = \delta \hat{\varepsilon} - \delta \hat{\varepsilon}_T$; $\delta \hat{\varepsilon}_T(t_k) = \int_{T(t_{k-1})}^{T(t_k)} \alpha(T) \hat{E} dT$; \hat{E} – единичный тензор второго ранга.

Остаточные напряжения и перемещения в момент полного остывания t^* вычисляются в соответствии с [15] как суперпозиция «силового» и «температурного» решений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^*) &= \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t^*) + \mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t^*), \\ \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t^*) &= \hat{\sigma}^P(\mathbf{x}, t^*) + \hat{\sigma}^T(\mathbf{x}, t^*). \end{aligned} \quad (18)$$

При этом в силу линейности задачи каждое из слагаемых в (18) может быть определено как сумма приращений перемещений и напряжений на каждом шаге по времени от соответствующих приращений температуры и давления

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t^*) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t_k), \quad \hat{\sigma}^P(\mathbf{x}, t^*) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \hat{\sigma}^P(\mathbf{x}, t_k), \quad (19)$$

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t^*) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t_k), \quad \hat{\sigma}^T(\mathbf{x}, t^*) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \hat{\sigma}^T(\mathbf{x}, t_k), \quad (20)$$

где $\delta \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t_k)$, $\delta \hat{\sigma}^P(\mathbf{x}, t_k)$ – решение «силовой» задачи (8)–(12); $\delta \mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t_k)$, $\delta \hat{\sigma}^T(\mathbf{x}, t_k)$ – решение «температурной» задачи (13)–(17).

С учетом сказанного задача безусловной оптимизации остаточных перемещений модели (8)–(17) управляющим воздействием $p(t)$ формулируется в виде

$$\Phi(p(t)) = \int_{S_c} [F(\mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t^*) + \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t^*))]^2 dS \rightarrow \min, \quad (21)$$

где S_c – поверхность, на которой контролируется плоскостность образца; $F(\mathbf{u})$ – некоторая скалярная функция вектора перемещений. В соответствии с условием задачи для контроля плоскостности образца после охлаждения выбрана осевая компонента вектора перемещений:

$$F(\mathbf{u}) = u_z(r, H).$$

Для конечно-элементной реализации поставленной краевой задачи используется программный комплекс *ANSYS*. В качестве базового выбран элемент *PLANE42* с опцией осевой симметрии. Конечно-элементная сетка представлена на рис. 1. Термомеханические свойства материала взяты из [10]. Теплофизические свойства в соответствии с [17] имеют следующие значения: $\lambda = 0,19$ Вт/(м·К), $c = 1000$ Дж/(кг·К), $\rho = 1200$ кг/м³.

Пространственная дискретизация при конечно-элементных расчетах сводит задачу (21) к решению системы линейных уравнений вида $[C_p]\{P\} = \{D_p\}$ относительно вектора управляющей нагрузки $\{P\}$ размерностью, равной числу шагов по времени N_t . Матрица $[C_p]$, как показал анализ, является плохо обусловленной, что характерно для обратных задач, к которым относится рассматриваемая задача [18].

Учитывая (19), получим выражение для остаточных перемещений в результате решения «силовой» задачи

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}, 1) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, \bar{t}_k) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \bar{\mathbf{u}}^P(\mathbf{x}, \bar{t}_k) \Delta p_k, \quad (22)$$

где $\delta \bar{\mathbf{u}}^P(\mathbf{x}, \bar{t}_k)$ – решение «силовой» задачи (8)–(12) при единичном приращении внешней нагрузки $\Delta p_k = 1$. Тогда задача оптимизации (21) преобразуется к следующей дискретной форме:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N_u} \left[\bar{u}_{jk} \Delta p_k + \bar{u}_j^T \right]^2 \rightarrow \min, \quad (23)$$

где $\bar{u}_{jk} = \delta \bar{u}_z^P(\mathbf{x}_j, \bar{t}_k) - \delta \bar{u}_z^P(\mathbf{x}_0, \bar{t}_k)$, \mathbf{x}_j – радиус-вектор j -го узла на верхней поверхности образца (поверхности контроля плоскостности), $\mathbf{x}_0 = \{0, H\}$; $u_j^T = u_z^T(\mathbf{x}_j, 1) - u_z^T(\mathbf{x}_0, 1)$. После дифференцирования по неизвестным коэффициентам полинома получаем систему линейных уравнений относительно Δp_k

$$[C]\{A\} = \{D\},$$

где

$$c_{lk} = \sum_{j=1}^{N_u} \bar{u}_{jk} \bar{u}_{jl}; \quad d_l = - \sum_{j=1}^{N_u} \bar{u}_j^T \bar{u}_{jl}; \quad l = \overline{1, N_t - 1}, \quad (24)$$

$$c_{N_t, k} = 1; \quad d_{N_t} = 0.$$

После решения (24) искомая зависимость от времени управляющего воздействия определяется по формуле

$$p_0 = 0; \quad p_k = p_{k-1} + \Delta p_k, \quad k = \overline{1, N_t}.$$

Исследование свойств матрицы $[C]$ показало, что число обусловленности $\mu = \|C\| \|C^{-1}\|$ в норме $\|C\| = \max_{1 \leq j \leq N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |c_{ij}|$ для нее составляет 10^{32} , т. е. задача является некорректной. Для улучшения решения используем регуляризирующий алгоритм [18]. Введем в разрешающую систему уравнений дополнительный сглаживающий оператор. Для этого изменим вид целевой функции (23):

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N_u} \left[\bar{u}_{jk} \Delta p_k + \bar{u}_j^T \right]^2 + K \sum_{k=1}^{N_t} (\Delta p_k)^2 \rightarrow \min. \quad (25)$$

Назначение дополнительного слагаемого – включение в процесс минимизации интегрального по времени уровня управляющей нагрузки, что приводит в конечном счете к сглаживанию решения. Роль параметра регуляризации [18] в данном случае выполняет коэффициент K .

С учетом дополнительного ограничения получим результирующую систему уравнений

$$[G]\{A\} = \{D\}, \quad (26)$$

где $[G] = [C] + K[C1]$, $c1_{li} = 1$, компоненты матрицы $[C]$ и вектора $\{D\}$ вычисляются по формулам (24).

Для уменьшения зависимости диапазона варьирования коэффициента K от порядка результирующей системы N_i представим его в виде произведения $K = K_1 K_2$, где коэффициент K_2 определяется из условия соразмерности элементов матриц $[C]$ и $[C1]$, входящих в уравнение (26): $K_2 = (N_i)^{-2} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} |c_{ij} / c1_{ij}|$.

$$K_2 = (N_i)^{-2} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} |c_{ij} / c1_{ij}|.$$

Сведение задачи оптимизации к виду (26) позволяет снизить число обусловленности на 10-14 порядков. Для получения приемлемого с точки зрения уровня остаточных прогибов и уровня регулирующей нагрузки решения в окончательном варианте задачи оптимизации (26) необходимо осуществлять дополнительную процедуру подбора параметра K_1 .

Результаты расчетов для разных значений параметра регуляризации приведены в таблице и на рис. 2–4.

Параметры задачи оптимизации

Параметр	Значение			
	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
K_1	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
p_{\max} , МПа	0,172	0,0415	0,0203	0,0102
$u_{z \max}$, мм	3,32	3,10	2,44	1,71
$\ \Delta u\ _{\max}$	2,80	6,10	8,30	12,6
$\ \Delta u\ _L$	3,17	6,22	8,22	10,4

Параметры $\|\Delta u\|_{\max}$ и $\|\Delta u\|_L$ характеризуют относительный уровень остаточных перемещений при оптимальном режиме нагружения в равномерной и лагранжевой нормах соответственно:

$$\|\Delta u\|_{\max} = \frac{100\%}{N_u} \left\{ \sum_{j=1}^{N_u} (u_{zj}^P(t^*) + u_{zj}^T(t^*))^2 / \sum_{j=1}^{N_u} (u_{zj}^T(t^*))^2 \right\}^{0,5},$$

$$\|\Delta u\|_L = \max_{j=1, N_u} |u_{zj}^P(t^*) + u_{zj}^T(t^*)| / \max_{j=1, N_u} |u_{zj}^T(t^*)| 100\%.$$

Параметры p_{\max} и $u_{z\max}$ определяют наибольшие значения управляющего давления и прогиба на временном интервале охлаждения образца:

$$u_{z\max} = \max_{k=1, N_t} |u_{zk}(R, H) - u_{zk}(0, H)|, \quad p_{\max} = \max_{k=1, N_t} |p_k|.$$

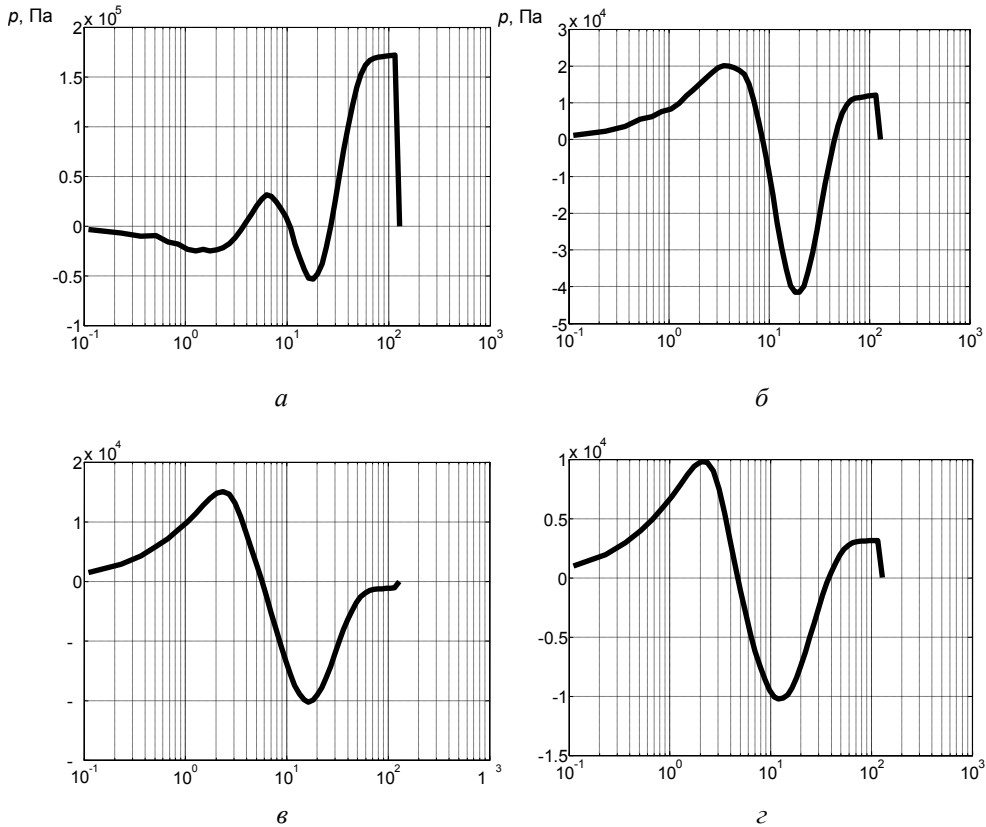


Рис. 2. Зависимость оптимальной управляющей нагрузки $p(t)$, Па, от времени t , с:

$$a - K_1=10^{-5}, \quad б - 10^{-4}, \quad в - 10^{-3}, \quad г - 10^{-2}$$

Из анализа результатов решения (25) видно, что при росте коэффициента K_1 наблюдается снижение основного параметра оптимизации – остаточного прогиба. При этом его величина возрастает от примерно 3 % для $K_1=10^{-5}$ до 11 % для $K_1=10^{-2}$ (см. таблицу). В то же

время, как видно из таблицы и сравнения рис. 2, а-г и 3, а-г, существенно падают максимальные значения управляющего давления p_{\max} (примерно в 15 раз) и прогиба $u_{z\max}$ (почти в 2 раза) на интервале охлаждения. Из тех же рисунков видно, что повышение влияния регулирующего слагаемого в (25) приводит к сглаживанию решения.

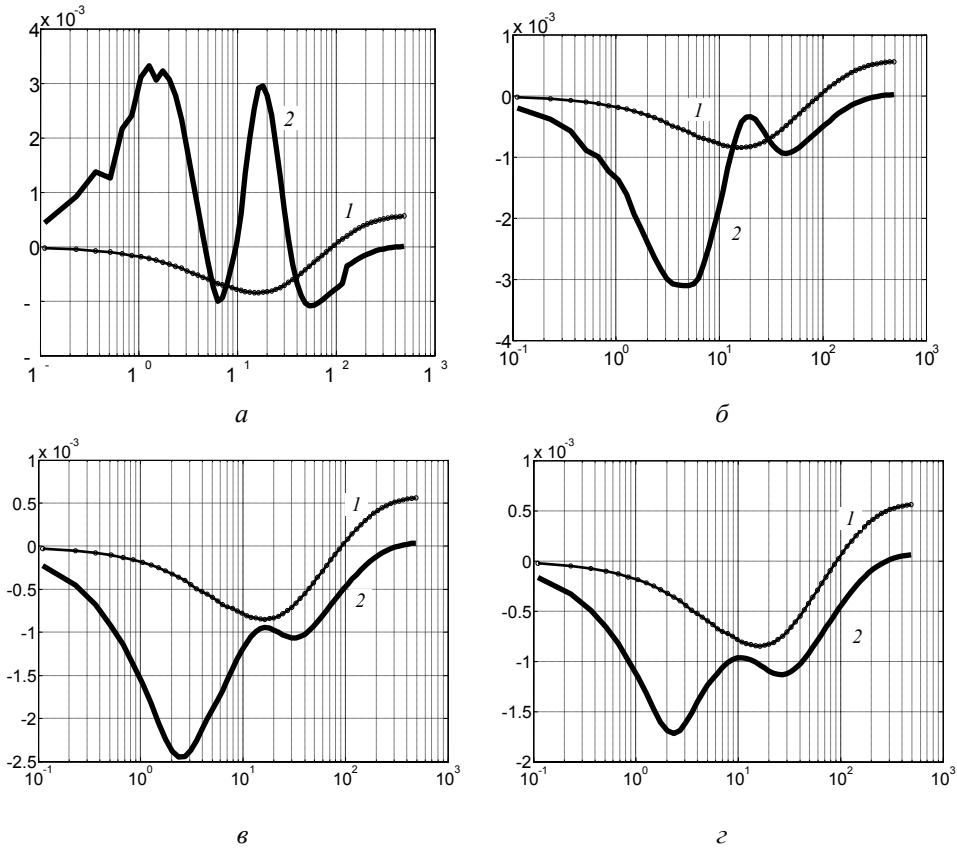


Рис. 3. Зависимость от времени перемещений u_z , м, в точке $r=R, z=H$:

$$1 - u_z^T(t), 2 - u_z^T(t) + u_z^P(t); a - K_1 = 10^{-5}, б - 10^{-4}, в - 10^{-3}, г - 10^{-2}$$

В частности, видимые осцилляции на кривых наблюдаются для значений $K_1 = 10^{-5}$ и 10^{-4} (см. рис. 2, 3, а, б соответственно). Следует также отметить, что, начиная с $K_1 = 10^{-4}$, вид кривых управляющей нагрузки не изменяется, в частности остается практически неизменным положение и число экстремумов (см. рис. 2, б-г).

В проведенном ранее исследовании с управляющей нагрузкой в виде степенного полинома [16] было установлено, что с увеличением

степени полинома кривые $p(t)$ также сходятся к устойчивой форме с минимумом в момент времени $t \approx 10$ с. Как видно из рис. 2, б-г, отсутствие ограничения на класс управляющих функций приводит к качественному изменению полученного в данной работе решения (положение и знак точек экстремума отличаются от таковых в работе [16]). Сравнение с результатами [16] также показывает, что снятие ограничений на вид управляющего воздействия (полином) для одинаковых уровней остаточного прогиба позволяет снизить пиковые значения регулирующего давления примерно в 10 раз.

На рис. 4, а-г представлены профили остаточного прогиба верхней поверхности образца после свободного охлаждения (кривые 1) и охлаждения с регулирующим силовым воздействием $p(t)$ (кривые 2). Сравнение рисунков показывает, что форма остаточного прогиба практически не изменяется, начиная с $K_1 = 10^{-4}$, а максимальные остаточные перемещения при этом уменьшаются примерно в 2 раза (см. таблицу).

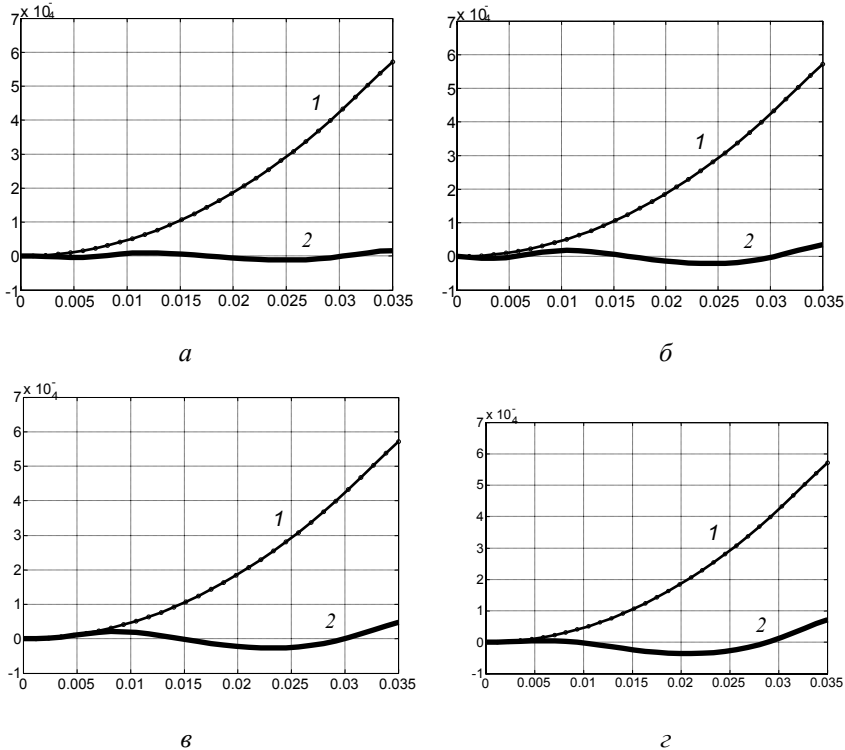


Рис. 4. Распределение остаточных перемещений u_z , м, по радиусу ($z=H$):

$$1 - u_z^T(t^*), 2 - \text{оптимальное распределение } u_z^T(t^*) + u_z^P(t^*); \quad a - K_1 = 10^{-5}, \\ \bar{b} - 10^{-4}, \quad \bar{в} - 10^{-3}, \quad \bar{г} - 10^{-2}$$

Таким образом, поставлена и решена задача минимизации остаточных перемещений в круглой пластинке из материала с термомеханическими свойствами, описываемыми моделью (1). Показано, что снятие ограничений, упрощающих вид управляющего воздействия (как это было сделано в работе [16]), также сводит задачу безусловной оптимизации к решению системы линейных уравнений, коэффициенты которой вычисляются однократным решением двух прямых задач. При этом, в сравнении с [16], для одинаковых уровней остаточного прогиба удается снизить пиковые значения управляющего давления примерно в 10 раз. В численной реализации прямой краевой задачи термомеханики применен метод суперпозиции пошаговых решений задач термоупругости, выполненных в конечно-элементном пакете ANSYS.

Предметом дальнейших исследований должен стать анализ возможности и целесообразности применения предложенной методики для различных видов конструкций, а также включение в постановку задачи классических ограничений в виде неравенств.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №10-01-96032-Р_Урал_А.

Библиографический список

1. Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода / В.П. Матвеевко [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 176 с.
2. Описание наследственных эффектов при стекловании и размягчении эпоксидных связующих / И.Н. Шардаков [и др.] // Пластические массы. – 1991. – № 9. – С. 55–58.
3. Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Математическое моделирование процесса образования остаточных напряжений при изготовлении волокнистых композитов на основе стеклующихся связующих // Пластические массы. – 1991. – №11. – С. 24–26.
4. Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Определяющие соотношения термомеханического поведения полимерных материалов в условиях стеклования и размягчения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1997. – № 3. – С. 106–114.
5. Численный и экспериментальный анализ остаточных напряжений в полимерных изделиях в условиях сложного напряженного со-

стояния / В.П. Бегишев [и др.] // Пластические массы. – 1997. – № 8. – С. 29–33.

6. Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода / В.П. Матвеев [и др.]. // Физическая мезомеханика. – 1999. – Т. 2, № 4. – С. 23–29.

7. Труфанов Н.А., Сметанников О.Ю., Завьялова Т.Г. Численное решение краевых задач механики полимеров с учетом фазовых и релаксационных переходов // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 7. – С. 45–50.

8. Сметанников О.Ю. Об одной модели термомеханического поведения полимерных материалов с релаксационным переходом // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. – Самара, 2007. – № 9/1(59). – С. 216–231.

9. Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А. Технологические и остаточные напряжения в неоднородном стеклующемся цилиндрическом стержне // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 180–191.

10. Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А. Экспериментальная идентификация модели термомеханического поведения стеклующихся полимеров // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – Ижевск, 2009. – № 4. – С. 133–145.

11. Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А. Численный анализ технологических и остаточных напряжений в стеклующихся телах // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 1, № 1. – С. 92–108.

12. Сметанников О.Ю. Экспериментальное и численное исследование поведения круглой пластины из эпоксидной смолы при неравномерном охлаждении // Вычислительной механики сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 3. – С. 96–105.

13. Trufanov A. N., Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A. Numerical analysis of residual stresses in preform of stress applying part for PANDA-type polarization maintaining optical fibers // Optical Fiber Technology. – 2010. – Vol. 16. – No. 3. – P. 156–161.

14. Березин А.В., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Технологические напряжения в пластине из композита с сотовым наполнителем // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1995, № 3. – С. 88–97.

15. Сметанников О.Ю. Об одной модели регулирования остаточных напряжений в изделиях из стеклующихся полимеров // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – Самара, 2008. – № 6(65). – С. 309–321.

16. Сметанников О.Ю. Оптимизация остаточного прогиба круглой пластинки из стеклующегося полимера при неравномерном охлаждении // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 81–92.

17. Композиционные материалы: справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.

18. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов [и др.]. – М: Наука, 1990. – 232 с.

References

1. Matveenکو V.P., Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Thermomechanics of polymer materials in a relaxation transition [*Termomekhanika polimernykh materialov v usloviyakh relaksatsionnogo perekhoda*]. Moscow: FIZMATLIT, 2009, 176 p.

2. Shardakov I.N., Trufanov N.A., Begishev V.P., Shadrin O.A., Smetannikov O.Yu. Description of hereditary effects in the glass transition and softening of epoxybinders [Opisanie nasledstvennykh effektov pri steklovanii i razmyagchenii epoksidnykh svyazuyushchikh]. *International Polymer Science and Technology – Plasticheskie massy*, 1991, No. 9, pp. 55–58.

3. Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Mathematical modeling of the formation of residual stresses in the manufacture of fiber composites based on glass bonding [Matematicheskoe modelirovanie protsessy obrazovaniya ostatochnykh napryazheniy pri izgotovlenii voloknistykh kompozitov na osnove stekluyushchikhsya svyazuyushchikh]. *International Polymer Science and Technology – Plasticheskie massy*, 1991, No. 11, pp. 24–26.

4. Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Defining relations for thermo-mechanical behavior of polymeric materials in the glass transition and softening [Opredelyayushchie sootnosheniya termomekhanicheskogo povedeniya polimernykh materialov v usloviyakh steklovaniya i razmyagcheniya]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*, 1997, No. 3, pp. 106–114.

5. Begishev V.P., Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Numerical and experimental analysis of the residual stresses in polymer products conditions of a complex stress state [Chislennyy i eksperimental'nyy analiz ostatochnykh napryazheniy v polimernykh izdeliyakh v usloviyakh slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya]. *International Polymer Science and Technology – Plasticheskie massy*, 1997, No. 8, pp. 29–33.

6. Matveenko V.P., Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Thermomechanics of polymer materials in a relaxation transition [Termomekhanika polimernykh materialov v usloviyakh relaksatsionnogo perekhoda]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*, 1999, Vol. 2, No. 4, pp. 23–29.

7. Trufanov N.A., Smetannikov O.Yu., Zavyalova T.G. Numerical solution of boundary-value problems of polymer mechanics with allowance for phase and relaxation transitions [Chislennoe reshenie kraevykh zadach mekhaniki polimerov s uchetom fazovykh i relaksatsionnykh perekhodov]. *Mat. Model. – Mat. моделирование*, 2000, Vol. 12, No. 7, pp. 45–50.

8. Smetannikov O.Yu. A model of thermo-mechanical behavior of polymeric materials with a relaxation transition [Ob odnoy modeli termomekhanicheskogo povedeniya polimernykh materialov s relaksatsionnym perekhodom]. *VESTNIK SamGU, estestvennonauchnaya ser.*, 2007, No. 9-1 (59), pp. 216–231.

9. Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A. Technological and residual stresses in the non-uniform vitrifying cylindrical rod [Tekhnologicheskie i ostatochnye napryazheniya v neodnorodnom stekluyushchemsya tsilindricheskom sterzhne]. *Journal on Composite Mechanics and Design – Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, 2009, Vol. 15, No. 2, pp. 180–191.

10. Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A. Experimental identification of thermomechanical model for glass polymers [Eksperimentalnaya identifikatsiya modeli termomekhanicheskogo povedeniya stekluyushchikhsya polimerov]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye nauki*, 2009, No. 4, pp. 133–145.

11. Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A. Numerical analysis of technological and residual stress in vitrified media [Chislennyy analiz tekhnologicheskikh i ostatochnykh napryazheniy v stekluyushchikhsya telakh]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational continuum mechanics*, 2008, Vol. 1, No. 1, pp. 92–108.

12. Smetannikov O.Yu. Experimental and numerical study of the evolution of deformation in an epoxy composite circular plate during non-uniform cooling [Eksperimentalnoe i chislennoe issledovanie povedeniya krugloy plastiny iz epoksidnoy smoly pri neravnomernom okhlazhdenii]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational continuum mechanics*, 2009, Vol. 2, No. 3, pp. 96–105.

13. Trufanov A. N., Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A. Numerical analysis of residual stresses in preform of stress applying part for PANDA-type polarization maintaining optical fibers. *Optical Fiber Technology*, 2010, Vol. 16, No. 3, pp. 156–161.

14. Berezin A.V., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Technological stresses in composite plate with a honeycomb [Tekhnologicheskie napryazheniya v plastine iz kompozita s sotovym zapolnitelem]. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability – Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 1995, No. 3, pp. 88–97.

15. Smetannikov O.Yu. About model of regulation of residual stresses in glass polymers [Ob odnoy modeli regulirovaniya ostatochnykh napryazheniy v izdeliyakh iz stekluyushchikhsya polimerov]. *VESTNIK SamGU, estestvennonauchnaya ser.*, 2008, No. 6(65), pp. 309–321.

16. Smetannikov O.Yu. Optimization of the residual bending flexure of round polymer plate with glass transition at non-uniform cooling [Optimizatsiya ostatochnogo progiba krugloy plastinki iz stekluyushchegosya polimera pri neravnomernom okhlazhdenii]. *Vychislitelnaya mekhanika sploshnykh sred – Computational continuum mechanics*, 2010, Vol. 3, No 1, pp 81–92.

17. Composite Materials: Handbook [*Kompozitsionnye materialy: Spravochnik*]. Kiev: Naukova dumka, 1985, 592 p.

18. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. Numerical methods for solving incorrect problems [*Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach*]. Moscow: Nauka, 1990, 232 p.

Об авторах

Сметанников Олег Юрьевич (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29; e-mail: sou2009@mail.ru).

About the authors

Smetannikov Oleg Yuriyevich (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (614990, 29, Komsomolsky prospect, Perm, Russian Federation, e-mail: sou2009@mail.ru).

Получено 19.02.12.