

В.И. Большаков, В.В. Данишевский

Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПЕРЕДАЧИ НАГРУЗКИ ОТ ВОЛОКОН К МАТРИЦЕ В СЛУЧАЕ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА

В работе получено решение задачи о продольном растяжении (сжатии) однонаправленного композита, состоящего из упругой матрицы и бесконечно длинных цилиндрических линейно упругих волокон постоянного радиуса. Определены закономерности перераспределения нагрузки и исследован краевой эффект при идеальном и неидеальном контакте между компонентами стеклопластика на основе эпоксидной матрицы.

Ключевые слова: однонаправленно армированные композиты, асимптотические методы осреднения, краевой эффект, неидеальный контакт, закономерности перераспределения нагрузки.

Введение. Краевые эффекты, связанные с перераспределением нагрузки между компонентами, играют важную роль в микромеханике композитных материалов и конструкций [1–6]. Протяженность зоны краевого эффекта невелика и, как правило, находится в пределах одного-двух характерных размеров элементов структуры композита. Однако именно в этой зоне возникают наибольшие локальные напряжения, которые могут приводить к развитию дефектов на микроуровне.

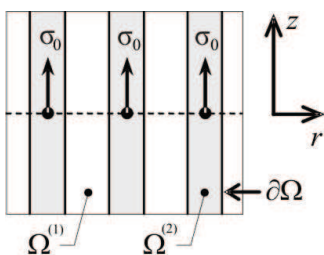


Рис. 1. Схема нагружения

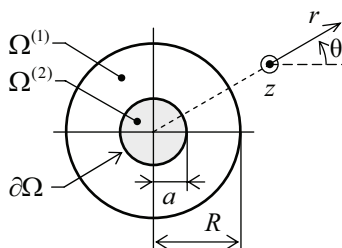


Рис. 2. Расчетная модель

В настоящей работе рассматривается задача о продольном растяжении (сжатии) фрагмента однонаправленного композита, состоящего из упругой матрицы $\Omega^{(1)}$ и бесконечно длинных цилиндрических линейно упругих волокон $\Omega^{(2)}$ с постоянным радиусом a (рис. 1). Будем считать, что к поперечному сечению $z = 0$ каждого волокна в на-

правлении образующей приложена нагрузка интенсивностью σ_0 . Выделим в рассматриваемом сечении ячейку периодичности и, в первом приближении, заменим ее внешней границей окружностью радиуса R (рис. 2). Используемая расчетная схема аналогична полидисперсной модели [7], которая дает хорошие результаты для эффективных упругих модулей трансверсально-изотропных композитов при малых и средних объемных наполнениях $c^{(2)} = (a/R)^2$. Среди моделей сред с регулярной структурой наиболее близкие свойства проявляет композит с гексагональным размещением волокон.

Краевая задача. Будем считать, что компоненты тензора деформаций в точках, принадлежащих матрице, удовлетворяют геометрическим соотношениям Коши:

$$\varepsilon_r^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta^{(1)} = \frac{u_r^{(1)}}{r}, \quad \varepsilon_z^{(1)} = \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(1)} = \varepsilon_{\theta z}^{(1)} = 0,$$

где $u_r^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ – перемещения в радиальном и продольном направлениях, а компоненты тензора напряжений – уравнениям равновесия с отсутствующими массовыми силами:

$$\frac{\partial \sigma_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^{(1)}}{r} = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее верхние индексы (i) , $i = 1, 2, 3$, обозначают матрицу (область $\Omega^{(1)}$), волокна (область $\Omega^{(2)}$) и межфазную границу $\partial\Omega$.

Определяющие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= 2K_T^{(1)} \left[(1 - \mu^{(1)}) \varepsilon_r^{(1)} + \mu^{(1)} \varepsilon_\theta^{(1)} + \mu^{(1)} \varepsilon_z^{(1)} \right], \\ \sigma_\theta^{(1)} &= 2K_T^{(1)} \left[(1 - \mu^{(1)}) \varepsilon_\theta^{(1)} + \mu^{(1)} \varepsilon_r^{(1)} + \mu^{(1)} \varepsilon_z^{(1)} \right], \\ \sigma_z^{(1)} &= 2K_T^{(1)} \left[(1 - \mu^{(1)}) \varepsilon_z^{(1)} + \mu^{(1)} \varepsilon_r^{(1)} + \mu^{(1)} \varepsilon_\theta^{(1)} \right], \\ \sigma_{rz}^{(1)} &= G^{(1)} \varepsilon_{rz}^{(1)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{\theta z}^{(1)} = 0, \quad K_T^{(1)} = \frac{G^{(1)}}{1 - 2\mu^{(1)}} \end{aligned}$$

содержат модуль сдвига $G^{(1)}$ и коэффициент Пуассона $\mu^{(1)}$ матрицы.

Будем предполагать, что внешняя граница ячейки свободна от напряжений:

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(1)} \Big|_{r=R} = 0. \quad (2)$$

Для моделирования эффекта неидеального контакта примем гипотезу о том, что касательные напряжения $\sigma_{rz}^{(1)} \Big|_{r=a} = \sigma_{rz}^{(3)} \Big|_{r=a}$ на межфазной границе $\partial\Omega$ пропорциональны скачку продольных перемещений $\left[u_z^{(1)} - u_z^{(2)} \right] \Big|_{r=a} = \Delta u_z^{(3)}$:

$$\sigma_{rz}^{(3)} = \frac{G^{(3)}}{b} \Delta u^{(3)}, \quad (3)$$

где $G^{(3)}$ – модуль сдвига материала межфазного слоя, а b – его толщина.

В рассматриваемом случае нарушение связи между компонентами проявляется в проскальзывании волокна относительно матрицы. В то же время в радиальном направлении условия контакта на границе раздела фаз остаются идеальными:

$$\sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=a} = \sigma_{rr}^{(3)}, \quad u_r^{(1)} \Big|_{r=a} = u_r^{(3)}.$$

Предложенная модель справедлива в случае слабого поперечного взаимодействия компонентов, характерного для большинства волокнистых композитов при продольной деформации.

Введем параметр связи α ($0 \leq \alpha \leq 1$):

$$\frac{G^{(3)}}{G^{(1)}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{b}{a}$$

и положим $b/a \rightarrow 0$. В асимптотическом пределе $\alpha = 0$ соответствует идеальному контакту ($\Delta u^{(3)} = 0$), $\alpha = 1$ – полному отсутствию контакта между волокнами и матрицей ($\sigma_{rz}^{(3)} = 0$), а промежуточные значения $0 < \alpha < 1$ описывают случай неидеального контакта.

Еще одно упрощающее предположение заключается в том, что для высокомодульных волокон можно пренебречь поперечными деформациями:

$$u_r^{(1)} \Big|_{r=a} = 0. \quad (4)$$

Данная гипотеза используется во многих работах [2, 4] и позволяет рассматривать волокно как одномерный объект.

Уравнение равновесия для волокна запишем в виде

$$\frac{d\sigma_z^{(2)}}{dz} + f_0(z) + f_1(z) = 0, \quad (5)$$

где $\sigma_z^{(2)} = E^{(2)} du_z^{(2)}/dz$ – продольное напряжение, $E^{(2)}$ – модуль Юнга; $f_0(z) = \sigma_0 \delta(z)$ – приложенная к волокну объемная сила; $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака; $f_1(z) = \int_0^{2\pi} \sigma_{rz}^{(3)} a d\theta / (\pi a^2) = 2\sigma_{rz}^{(3)}/a$ – объемная сила, связанная с перераспределением напряжений между волокном и матрицей.

Аналитическое решение. Компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в матрице удобно выразить через упругий потенциал Лява W [8]:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= -\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z}, & u_z^{(1)} &= 2 \left(1 - \mu^{(1)} \right) \nabla^2 W - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, & (6) \\ \sigma_r^{(1)} &= 2G^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu^{(1)} \nabla^2 W - \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right), & \sigma_\theta^{(1)} &= 2G^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu^{(1)} \nabla^2 W - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right), \\ \sigma_z^{(1)} &= 2G^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(2 - \mu^{(1)} \right) \nabla^2 W - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right], \\ \sigma_{rz}^{(1)} &= 2G^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \mu^{(1)} \right) \nabla^2 W - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right]. \end{aligned}$$

Тогда уравнения равновесия (1) удовлетворяются тождественно, а условия совместности деформаций сводятся к бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 W = 0. \quad (7)$$

Применим к соотношениям (2)–(7) преобразование Фурье $\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp(-isz) dz$. Тогда в пространстве изображений получим следующие зависимости для компонент вектора перемещений:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^{(1)} &= -is \frac{\partial \bar{W}}{\partial r}, & \bar{u}_z^{(1)} &= 2 \left(1 - \mu^{(1)} \right) \bar{\nabla}^2 \bar{W} + s^2 \bar{W}, \\ \bar{u}_z^{(2)} &= \frac{1}{s^2 E^{(2)}} \left(\sigma_0 + \frac{2}{a} \sigma_{rz}^{(3)} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

и тензора напряжений:

$$\bar{\sigma}_r^{(1)} = 2G^{(1)}is \left(\mu^{(1)}\bar{\nabla}^2\bar{W} - \frac{\partial^2\bar{W}}{\partial r^2} \right), \quad \bar{\sigma}_\theta^{(1)} = 2G^{(1)}is \left(\mu^{(1)}\bar{\nabla}^2\bar{W} - \frac{1}{r} \frac{\partial\bar{W}}{\partial r} \right), \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_z^{(1)} = 2G^{(1)}is \left[\left(2 - \mu^{(1)} \right) \bar{\nabla}^2\bar{W} + s^2\bar{W} \right],$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^{(1)} = 2G^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \mu^{(1)} \right) \bar{\nabla}^2\bar{W} + s^2\bar{W} \right], \quad \bar{\sigma}_z^{(2)} = isE^{(2)}\bar{u}_z^{(2)}, \quad \bar{\sigma}_{rz}^{(3)} \Big|_{r=a} = \bar{\sigma}_{rz}^{(1)} \Big|_{r=a},$$

а также граничные условия

$$\bar{\sigma}_{rr}^{(1)} \Big|_{r=R} = 0, \quad \bar{\sigma}_{rz}^{(1)} \Big|_{r=R} = 0, \quad \bar{u}_r^{(1)} \Big|_{r=a} = 0, \quad (10)$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^{(3)} \Big|_{r=a} = \frac{G^{(1)}(1-\alpha)}{a\alpha} \left[\bar{u}_z^{(1)} - \bar{u}_z^{(2)} \right] \Big|_{r=a}$$

и уравнение для упругого потенциала:

$$\bar{\nabla}^2\bar{\nabla}^2\bar{W} = 0. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) имеет вид

$$\bar{W} = C_1(s)I_0(|s|r) + C_2(s)|s|rI_1(|s|r) + C_3(s)K_0(|s|r) + C_4(s)|s|rK_1(|s|r),$$

где I_0 , I_1 и K_0 , K_1 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Функции $C_1(s)$, $C_2(s)$, $C_3(s)$ и $C_4(s)$ находятся из граничных условий (10).

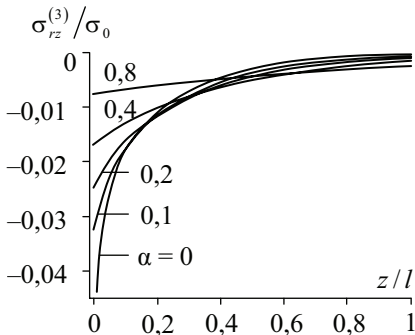


Рис. 3. Касательные напряжения на межфазной границе

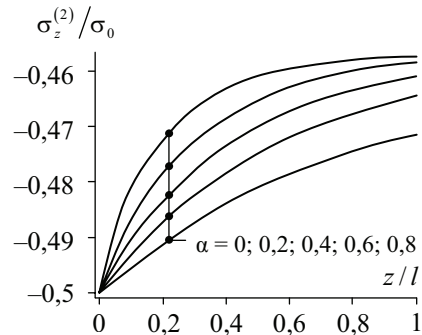


Рис. 4. Продольные напряжения в волокне

Окончательное решение строится путем обращения изображений (8), (9) по формуле

$$f(z) = \frac{1}{2} \pi \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(z) \exp(isz) ds.$$

В работе выполнялось численное интегрирование с использованием пакета Maple.

Численные результаты. Для иллюстрации полученного решения рассмотрим однонаправленный композит на основе эпоксидной матрицы ($G^{(1)} = 1,53$ ГПа и $\mu^{(1)} = 0,33$), армированной стеклянными волокнами ($E^{(2)} = 69$ ГПа). На рис. 3 и 4 представлены зависимости напряжений $\sigma_{rz}^{(3)}$, $\sigma_{zz}^{(2)}$ от безразмерной продольной координаты z/l (l – расстояние между центрами соседних волокон, а $z = 2R$). Расчеты были выполнены для объемного наполнения стекловолокном $c^{(2)} = 0,4$.

В случае идеального контакта ($\alpha = 0$) наличие сосредоточенной нагрузки в точке $z = 0$ приводит к сингулярности решения. Имеют место следующие пределы:

$$\left| \sigma_{rz}^{(3)} \right| \rightarrow \infty, \quad \left| \sigma_z^{(2)} \right| \rightarrow \frac{\sigma_0}{2} \quad \text{при } z \rightarrow 0,$$

$$\left| \sigma_{rz}^{(3)} \right| \rightarrow 0, \quad \left| \sigma_z^{(2)} \right| \rightarrow \frac{\sigma_0 c^{(2)} E^{(2)}}{2E_0} \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

где $E_0 \approx (1 - c^{(2)}) E^{(1)} + c^{(2)} E^{(2)}$ – эффективный модуль Юнга в направлении армирования, определенный по правилу смеси, и $E^{(1)} = 2G^{(1)}(1 + \mu^{(1)})$.

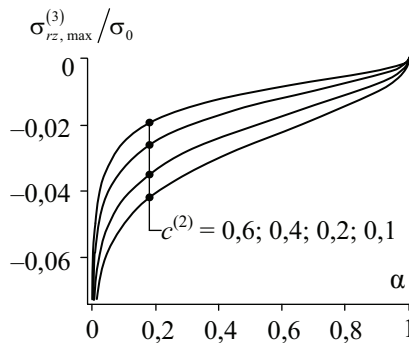


Рис. 5. Максимальные касательные напряжения при $z = 0$

На рис. 5 проиллюстрирована зависимость $\sigma_{rz, \max}^{(3)}$ от параметра α . Как видим, ослабление связи между волокнами и матрицей снимает сингулярность и позволяет ограничить максимальные напряжения $\sigma_{rz, \max}^{(3)} = \sigma_{rz}^{(3)}|_{z=0}$ на границе раздела $\partial\Omega$. При этом обеспечивается более равномерное перераспределение нагрузки, а также увеличивается протяженность зоны краевого эффекта.

Библиографический список

1. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.
2. Маневич Л.И., Павленко А.В. Асимптотический метод в микромеханике композитных материалов. – Киев: Вища школа, 1991. – 131 с.
3. Гузь А.Н., Коханенко Ю.В. Краевые эффекты в композитах // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 3. – С. 3–23.
4. Lenci S., Menditto G. Weak Interface in Long Fibre Composites // Int. J. Solids Structures. – 2000. – Vol. 37. – P. 4239–4260.
5. Andrianov I.V., Danishevs'kyu V.V., Weichert D. Analytical Study of the Load Transfer in Fibre-Reinforced 2D Composite Materials // Int. J. Solids Structures. – 2008. – Vol. 45. – P. 1217–1243.
6. Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. – Днепропетровск: Пороги, 2008. – 196 с.
7. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
8. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.; Л.: Изд-во ОНТИ, 1935. – 674 с.

Получено 22.11.2010