

А.В. Зайцев, А.А. Фукалов

Пермский государственный технический университет

**ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ ОБЪЕМНОГО СЖАТИЯ
ДИСПЕРСНО-УПРОЧНЕННЫХ КОМПОЗИТОВ
СО СПЛОШНЫМИ И ПОЛЫМИ АНИЗОТРОПНЫМИ
СФЕРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

В рамках полидисперсных моделей механики композитов получены аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия дисперсно-упрочненных материалов, изотропные матрицы которых армированы трансверсально-изотропными полыми или сплошными сферами различного диаметра, а на межфазных поверхностях выполняются условия идеального сопряжения. На основе полученных решений спрогнозированы эффективные характеристики полиэфирной смолы «Диэпокс 450» для различных наполнений этого связующего мраморной мукой, а также полимербетонов со сплошными сферическими анизотропными мраморными, диабазовыми и гранитными минеральными включениями произвольного размера.

Ключевые слова: дисперсно-упрочненные композиты, анизотропные полные и сплошные сферические включения, полидисперсная модель, идеальный контакт на межфазной поверхности, эффективные модули объемного сжатия; полиэфирное связующее «Диэпокс 450», наполненное мраморной мукой; полимербетон.

Рассмотрим двухфазный композит, армированный сплошными или полыми сферическими включениями различного диаметра. Придерживаясь гипотез полидисперсных моделей механики [1], будем считать, что каждая сферическая частица произвольного радиуса R_A окружена слоем связующего толщиной $R_B - R_A$ таким образом, что отношения $c = R_A/R_B$ для каждого армирующего элемента и $h = R_0/R_A$ для каждого полого включения являются постоянными величинами. Кроме того, будем предполагать, что линейно упругая однородная матрица изотропна, а материал, из которого изготовлены включения, – сферически трансверсально-изотропный (ось симметрии бесконечного порядка совпадает с осью r сферической ортогональной системы координат r, θ и φ с началом в центре составной частицы).

Рассмотрим произвольное включение с неизменным типом упругой симметрии составных частей (частицы армирующего наполнителя и слоя матрицы), находящееся в состоянии однородного гидростатиче-

ского растяжения, которое обеспечивается заданными на внешней поверхности равномерно распределенными радиальным давлением p

$$\sigma_{rr}|_{r=R_B} = p, \quad (1)$$

или перемещением ξ :

$$u_r|_{r=R_B} = \xi. \quad (2)$$

Используя точные аналитические решения задач Ламе о равновесии толстостенных трансверсально-изотропных [2] и изотропных сфер [3], запишем выражения для радиальных перемещений u_r и напряжений σ_{rr} в полем включении и окружающем слое матрицы:

$$u_r^I = A_I r^{n-1/2} + \frac{B_I}{r^{n+1/2}}, \quad \sigma_{rr}^I = \frac{1}{2} \left(r^{n-3/2} A_I H_1 - \frac{B_I H_2}{r^{n+3/2}} \right), \quad (3)$$

$$H_1 = A_{11}(2n-1) + 4A_{12}, \quad H_2 = A_{11}(2n+1) - 4A_{12},$$

$$u_r^M = A_M r + \frac{B_M}{r^2}, \quad \sigma_{rr}^M = 3K_M A_M - 4 \frac{G_M B_M}{r^3}, \quad (4)$$

где K_M и G_M – объемный и сдвиговой упругие модули. Здесь и далее все величины, относящиеся к включениям и матрице, будут отмечены индексами I и M соответственно.

Для дисперсно-упрочненного композита со сплошными включениями в уравнениях (3) исключаются слагаемые с B_I , наличие которых в решении приведет к сингулярности радиальных перемещений и напряжений в центре частиц армирующего наполнителя:

$$u_r^I = C_I r^{n-1/2}, \quad \sigma_{rr}^I = \frac{1}{2} \frac{C_I H_1}{r^{3/2-n}}. \quad (5)$$

Содержащийся в равенствах (3) и (5) показатель анизотропии

$$n = \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \frac{A_{22} + A_{23} - A_{12}}{A_{11}}}$$

определяется модулями Юнга E_I , \tilde{E}_I и коэффициентами Пуассона ν_I и $\tilde{\nu}_I$ материала включений:

$$A_{11} = \frac{\tilde{E}_I(1-\nu_I)}{F}, \quad A_{12} = \frac{E_I \tilde{\nu}_I}{F}, \quad A_{22} = \frac{E_I}{F(1+\nu_I)} \left(1 - \tilde{\nu}_I^2 \frac{E_I}{\tilde{E}_I} \right),$$

$$A_{23} = \frac{E_I}{F(1 + \nu_I)} \left(\nu_I + \tilde{\nu}_I^2 \frac{E_I}{\tilde{E}_I} \right), \quad F = 1 - \nu_I - 2\tilde{\nu}_I^2 \frac{E_I}{\tilde{E}_I}.$$

Рассмотрим наиболее простой случай, когда на межфазной поверхности выполняются условия идеального контакта

$$u_r^I \Big|_{r=R_A} = u_r^M \Big|_{r=R_A}, \quad \sigma_{rr}^I \Big|_{r=R_A} = \sigma_{rr}^M \Big|_{r=R_A}, \quad (6)$$

а внутренняя поверхность полых сферических включений свободна от напряжений:

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R_0} = 0. \quad (7)$$

Тогда из решения системы линейных алгебраических уравнений, которая получается при подстановке (4) и (5) в равенства (1) и условия (6), могут быть однозначно вычислены константы интегрирования:

$$C_I = 2H_C(4G_M + 3K_M)R_A^{3/2-n}, \quad A_M = H_C(H_1 + 8G_M),$$

$$B_M = -(H_1 - 6K_M)H_C R_A^3,$$

$$H_C = p \left[4G_M(H_1 - 6K_M)c^3 + 3K_M(H_1 + 8G_M) \right]^{-1},$$

если композит армирован сплошными сферическими включениями. В случае, когда включения являются полыми, подстановка (3) и (4) в выражения (1) и условия (6) и (7) позволяет записать систему алгебраических уравнений и решить ее относительно неизвестных постоянных интегрирования:

$$A_I = 2H_2H_I(4G_M + 3K_M)R_A^{3/2-n}, \quad B_I = 2H_1H_I(4G_M + 3K_M)h^{2n}R_A^{3/2+n},$$

$$A_M = H_I(4H_3G_M - H_1H_2H_5), \quad B_M = H_I(H_1H_2H_5 + 3H_3K_M)R_A^3,$$

$$H_3 = 2(H_1h^{2n} + H_2), \quad H_I = p \left[H_7 - A_{11}^2H_4H_5(4n^2 - 1) - H_8 \right]^{-1},$$

$$H_4 = 4c^3G_M + 3K_M, \quad H_5 = h^{2n} - 1, \quad H_6 = c^3 - 1,$$

$$H_7 = 16A_{12}H_5(A_{12}H_4 - 6G_MK_MH_6),$$

$$H_8 = 8A_{11} \left\{ A_{12}H_4H_5 + 3H_6K_MG_M \left[2n(h^{2n} + 1) - H_5 \right] \right\}.$$

Если предположить, что армирующие элементы однородно распределены внутри композита, то рассматриваемая среда квазиоднородна и сферически трансверсально-изотропна. Поставим в соответст-

вие составным частицам, находящимся в условиях однородного гидростатического растяжения, эквивалентные включения, упругие модули которых являются эффективными деформационными характеристиками композита. Из равенства радиальных перемещений на внешних границах эквивалентных однородных включений

$$u_r \Big|_{r=R_B} = \frac{pR_B}{3K_{\theta\phi}^*},$$

и составных частиц

$$u_r^M \Big|_{r=R_B} = A_M R_B + \frac{B_M}{R_B^2}$$

могут быть найдены оценки сверху для аналогов эффективного модуля объемного сжатия для сферически трансверсально-изотропного дисперсно-упрочненного материала со сплошными

$$K_{\theta\phi}^* = \frac{4G_M c^3 (H_1 - 6K_M) + 3K_M (H_1 + 8G_M)}{3[H_1 + 8G_M - c^3 (H_1 - 6K_M)]} \quad (8)$$

и полыми

$$K_{\theta\phi}^* = \frac{2H_3 (A_{12}H_4 - 6H_6K_MG_M) - A_{11}H_4H_9}{3H_1H_2H_6H_5 + 3H_3H_{10}}, \quad (9)$$

$$H_9 = H_2(1 - 2n) + h^{2n}H_1(1 + 2n), \quad H_{10} = 4G_M + 3c^3K_M$$

включениями. Обратим внимание на то, что замена условий (1) на кинематические (2), обеспечивающие однородное перемещение внешней поверхности составной сферы, позволяет определить константы интегрирования для сплошных

$$C_I = 2\xi(4G_M + 3K_M)H_C R_A^{3/2-n}, \quad A_M = \xi H_C (H_1 + 8G_M),$$

$$B_M = -\xi(H_1 - 6K_M)H_C R_A^3, \quad H_C = \left\{ R_B \left[H_1 + 8G_M - (H_1 - 6K_M)c^3 \right] \right\}^{-1}$$

и полых

$$A_I = -2\xi H_2 H_I (4G_M + 3K_M) R_A^{3/2-n}, \quad B_I = -2\xi H_1 H_I (4G_M + 3K_M) h^{2n} R_A^{3/2+n},$$

$$A_M = \xi H_I [H_1 H_2 H_5 - 4H_3 G_M], \quad B_M = -\xi H_I [H_1 H_2 H_5 + 3H_3 K_M] R_A^3,$$

$$H_{11} = A_{11} - 4A_{12},$$

$$H_I = \left\{ R_B \left[H_5 H_{11} (2H_8 + H_6 H_{11}) - 4A_{11} n (H_{10} + H_{10} h^{2n} + A_{11} H_6 H_5 n) \right] \right\}^{-1}$$

включений, а также получить оценки снизу для эффективных модулей $K_{\theta\varphi}^*$ из равенства радиальных напряжений на внешних границах эквивалентных однородных включений

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R_B} = 3 \frac{\xi}{R_B} K_{\theta\varphi}^*$$

и составных частиц

$$\sigma_{rr}^M \Big|_{r=R_B} = 3K_M A_M - 4 \frac{G_M B_M}{R_B^3}.$$

Несложно показать, что эти оценки совпадут с полученными выражениями (8) и (9). Следовательно, полученные решения являются точными в рамках ограничений, используемых в полидисперсных моделях. Обратим также внимание на то, что при подстановке $R_0 = 0$ в уравнения (9), последние упрощаются и принимают вид (8).

В частном случае $\tilde{E}_I = E_I = 9G_I K_I / (3K_I + G_I)$ и $\tilde{\nu}_I = \nu_I = (3K_I - 2G_I) / (6K_I + 2G_I)$ из выражений (8) и (9) следуют эффективные модули объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов, изотропная матрица которых содержит однородно распределенные изотропные ($n = 1,5$) сплошные

$$\begin{aligned} K^* &= \frac{4\nu_I G_M (K_I - K_M) + K_M (3K_I + 4G_M)}{3\nu_I (K_I - K_M) - 3K_I - 4G_M} = \\ &= K_M + (K_I - K_M) \frac{\nu_I (4G_M + 3K_M)}{4G_M + 3K_I + 3\nu_I (K_M - K_I)} \end{aligned} \quad (10)$$

и полые

$$K^* = 4 \frac{G_I K_I (1 - h^3) (4\nu_I G_M + 3K_M) + G_M K_M (1 - \nu_I) (4G_I + 3h^3 K_I)}{3K_I [h^3 + 4G_I (1 - \nu_I) (1 - h^3)] + 4G_I (4G_M + 3\nu_I K_M)} \quad (11)$$

сферические включения. Обратим внимание на то, что в формулах (10) и (11) проведена замена $c^3 = \nu_I$ (где ν_I — объемное наполнение), а равенство (10) в точности совпадает с выражением, впервые записанным З. Хашином [1].

В качестве примера рассмотрим задачу прогнозирования эффективных модулей объемного сжатия полимербетонов — дисперсно-упрочненных композитов на основе полиэфирных смол, армированных

диабазовым, мраморным или гранитным щебнем. Матрицы полимербетонов сами являются композитами, наполненными до концентрации $v_{AG} \leq 0,28$ молотым известняком, кварцевым песком, мраморной, диабазовой мукой или цементом. Отличительная особенность полимербетонов – высокая (достигающая 0,9) степень наполнения этих материалов минеральными частицами, размер, форма и взаимное расположение которых случайны [4]. Содержание наполнителя в пластмассах изменяется в зависимости от функционального назначения в пределах от 0,1 до 0,4, а объемная доля включений в сферопластиках конструкционного назначения, как правило, не превышает 0,6–0,7.

Большинство исследователей, изучающих полимербетоны, занимаются экспериментальным и теоретическим определением кратковременной и длительной ползучести и долговечности полиэфирных связующих, наполненных минеральной мукой, и материалов на их основе [4–6], а также изучают сорбционные свойства композита [7, 8]. Ограниченное число работ посвящено экспериментальному определению модулей Юнга, коэффициентов Пуассона и модулей объемного сжатия (или их аналогов при неупругом деформировании) в опытах на сжатие и изгиб [4, 7] сухих и влажных (после двухлетней выдержки в воде) образцов. Сравнение спрогнозированных эффективных упругих модулей полимербетонов с использованием аналитических решений, полученных в рамках полидисперсных моделей для композитов с изотропными сферическими включениями, с данными экспериментов показывает отсутствие удовлетворительного согласования [5, 6, 9, 10] результатов. Минеральные наполнители имеют ярко выраженную анизотропию свойств, что предопределяет необходимость проверки полученных выражений для эффективных модулей объемного сжатия на их соответствие данным экспериментов.

На основе полученных аналитических выражений (8) для модуля $K_{\theta\phi}^*$ могут быть определены

расчетные зависимости этих характеристик для связующих от концентрации частиц минерального наполнителя v_{AG} . Для этого в формуле (8)

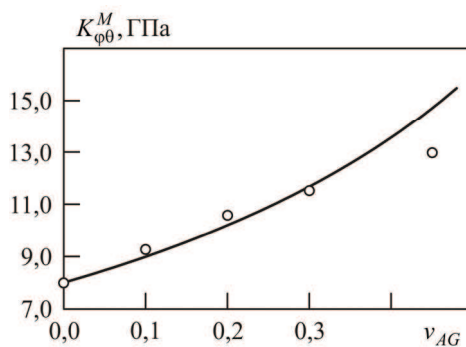


Рис. 1. Зависимость объемных модулей эпоксидной смолы «Дизпокс 450» от объемной доли мраморной муки

необходимо выполнить подстановку $c^3 = v_{AG}$. На рис. 1 показано изменение эффективного объемного модуля $K_{\theta\phi}^M$ изотропной эпоксидной смолы «Диэпокс 450» ($E = 4,8$ ГПа, $\nu = 0,40$) при увеличении объемного наполнения мраморной мукой ($E = 55,0$ ГПа, $\nu = 0,29$, $\tilde{E} = 23,0$ ГПа и $\tilde{\nu} = 0,32$). Сравнение расчетной зависимости с результатами эксперимента [5], которые на рис. 1 показаны точками, свидетельствует о том, что при $v_{AG} \leq 0,3$ максимальное отличие значений $K_{\theta\phi}^M$ не превышает 3%. Существенное несовпадение значений при $v_{AG} > 0,3$ связано с тем, что при увеличении v_{AG} в структуре матрицы возникают домены, образованные агрегацией частиц мрамора. Кроме того, при высоких объемных наполнениях уменьшаются минимальные расстояния между включениями, а также при полимеризации эпоксидной смолы возникают поры и межфазные слои, не учитываемые в рассматриваемой модели.

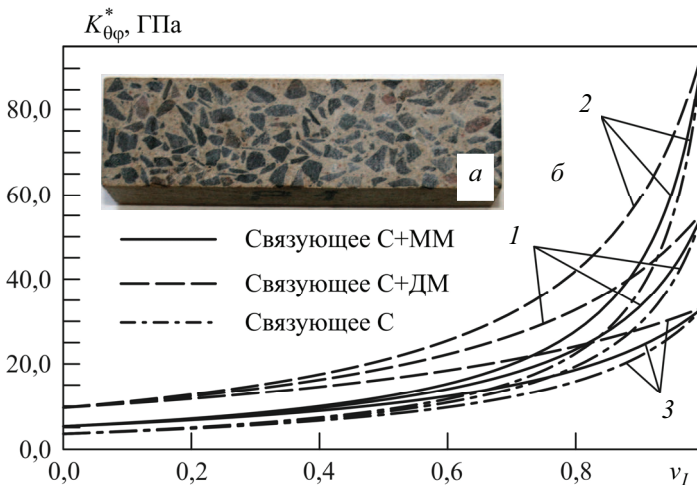


Рис. 2. Случайная структура полимербетона на основе полиэфирной смолы «Диэпокс 450» с базальтовой мукой и гранитными включениями (а), эффективные модули объемного сжатия полимербетонов, армированных диабазом (кривые 1), мраморными (кривые 2) и гранитными (кривые 3) сферами (б)

Количественное совпадение результатов прогнозирования модулей объемного сжатия полиэфирной смолы «Диэпокс 450» позволяет сделать предположение о возможности использования полидисперс-

ной модели для описания и оценки влияния типа связующего и минерального наполнителя на эффективные деформационные характеристики полимербетонов. На рис. 2, а представлен образец полимербетона на основе полиэфирной смолы «Диэпокс 450» с базальтовой мукой и гранитными включениями, а на рис. 2, б – эффективные объемные модули $K_{\theta\phi}^*$ композитов на основе различных связующих: С (смола «Виналкид 550» без наполнителя), С+ДМ (смола «Виналкид 550» с диабазовой мукой, $\nu_{AG} = 0,28$) и С+ММ (смола «Виналкид 550» с мраморной мукой, $\nu_{AG} = 0,28$), соответствующие следующим упругим постоянным материалов фаз: $E = 5,7$ ГПа и $\nu = 0,32$ (смола С); $E = 9,7$ ГПа и $\nu = 0,30$ (смола С+ММ); $E = 11,0$ ГПа и $\nu = 0,31$ (смола С+ДМ) [9]; $E = 88,0$ ГПа, $\nu = 0,26$, $\tilde{E} = 65,0$ ГПа и $\tilde{\nu} = 0,23$ (диабаз); $E = 60,0$ ГПа, $\nu = 0,28$, $\tilde{E} = 40,0$ ГПа и $\tilde{\nu} = 0,18$ (гранит). Как видим, до объемной доли $\nu_I = 0,73$ вне зависимости от типа горной породы, армирующей матрицу, наиболее высокие значения эффективных модулей имеют материалы на основе связующего С+ДМ, а при $\nu_I > 0,90$ – композиты с мраморными включениями. Полученные зависимости позволяют сделать еще один вывод: для повышения модуля объемного сжатия необходимо отказаться от связующих без минеральных наполнителей, поскольку композит с этим типом матрицы имеет наиболее низкие эффективные характеристики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал № 07-01-96056).

Библиографический список

1. Хашин З. Упругие модули неоднородных материалов // Прикл. механика: тр. Амер. о-ва инж.-мех. – 1962. – Т. 29, № 1. – С. 159–167.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
3. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 492 с.

4. Максимов Р.Д., Иргенс Л.А., Янсонс Ю.О., Плуме Э.З. Механические свойства полиэфирного полимербетона // Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, № 2. – С. 147–162.

5. Христова Ю., Анискевич К. Прогнозирование ползучести полимербетона // Механика композит. материалов. – 1995. – Т. 31, № 3. – С. 305–309.

6. Христова Ю., Анискевич К. Прогнозирование ползучести отвержденной эпоксидной смолы, наполненной мраморной мукой // Механика композит. материалов. – 1994. – Т. 30, № 5. – С. 590–599.

7. Максимов Р.Д., Иргенс Л.А., Плуме Э.З., Янсонс Ю.О. Водостойкость полиэфирного полимербетона // Механика композит. материалов. – 2003. – Т. 39, № 2. – С. 147–164.

8. Анискевич К., Христова Ю., Янсонс Ю. Сорбционные характеристики полимербетона при длительной выдержке в воде // Механика композит. материалов. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 463–476.

9. Анискевич К., Христова Ю. Влияние старения связующего на ползучесть полимербетона // Механика композит. материалов. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 787–794.

10. Анискевич К., Христова Ю. Влияние концентрации и дисперсности наполнителя на ползучесть полимерного композита // Механика композит. материалов. – 1995. – Т. 31, № 2. – С. 179–185.

Получено 27.11.2010