

DOI: 10.15593/2224-9982/2019.57.12

УДК 621.755

Н.Н. Зайцев, Д.Н. Зайцев, Д.А. Минеев

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОДИСКОВОГО РОТОРА С ШАРОВЫМ АВТОБАЛАНСИРОМ НА ПЕРЕХОДНЫХ И УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ ВРАЩЕНИЯ

Способность шаровых автобалансирующих устройств осуществлять автобалансировку роторов на их закритических частотах вращения и отсутствие такой способности на докритических частотах обуславливает необходимость изучения динамики роторов с автобалансирующим устройством на переходных режимах вращения. Для численного исследования особенностей таких режимов в данной статье выводится математическая модель динамики однодискового симметричного межопорного ротора с шаровым автобалансирующим устройством, учитывающая нестационарность частоты вращения ротора, воздействие сил тяжести и трение качения шаров в обойме. Для случая автобалансирующего устройства с двумя шарами предлагается вычислительная модель в виде системы дифференциальных уравнений в форме Коши, и приводятся результаты численного моделирования различных режимов вращения с использованием этой модели. При этом на режиме установившегося вращения моделируется динамика при ступенчатом изменении эксцентриситета центра масс диска. Результаты моделирования изотропного ротора представлены графиками изменений прогиба ротора и координат его мгновенного центра масс, а также перемещений шаров по обойме. Для анизотропного ротора показаны соответствующие его динамике два максимума амплитуды прогиба, орбиты прямой и обратной прецессии. Приведенные графики расчетов с учетом и без учета влияния силы тяжести демонстрируют, что прецессионное движение рассматриваемого ротора происходит относительно его оси, смещенной под действием силы веса. Влияние шарового автобалансирующего устройства на динамику ротора при переходных и установившихся режимах иллюстрируется графиками изменений координат его мгновенного центра масс, а соответствующая этим режимам динамика шаров в обойме показана на графиках их перемещений.

Ключевые слова: однодисковый ротор, шаровое автобалансирующее устройство, переходные и установившиеся режимы, мгновенный центр масс, амплитуда прогиба, орбита прецессии.

N.N. Zaytsev, D.N. Zaytsev, D.A. Mineev

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

SIMULATION OF SINGLE-DISC ROTOR DYNAMICS WITH A BALL AUTOBALANCER ON TRANSIENT AND STEADY-STATE MODES OF ROTATION

The ability of ball autobalancers to perform auto-balancing of rotors at their supercritical rotation frequencies and the absence of such ability at subcritical frequencies, necessitates the study of the dynamics of rotors with autobalancer at transient rotation modes. For the numerical study of the peculiarities of such modes in this article the mathematical model of dynamics of the single-disc symmetric inter-supported rotor with the ball auto-balancing device, taking into account the non-stationarity of the rotor speed, the impact of gravity and rolling friction of the balls in the cage, is derived. For the case of two-ball autobalancer, a computational model in the form of a system of differential equations in the form of Cauchy is proposed, and the results of numerical simulation of different rotation modes using this model are presented. Herewith, at the steady-state rotation mode it is modeled the dynamics with an abrupt change in the eccentricity of the center of mass of the disk. The results of isotropic rotor simulation are represented by graphs of changes in the deflection of the rotor and the coordinates of its instantaneous center of mass, the displacements of balls along the cage. For the anisotropic rotor, two maxima of the deflection amplitude and the orbit of the forward and backward precessions typical to its dynamics are shown. The given graphs of calculations taking into account and without taking into account the impact of gravity demonstrate that precessional motion of the rotor under consideration occurs relative to its axis shifted under the influence of weight force. The influence of the ball autobalancer on the rotor dynamics in transient and steady-state modes is illustrated by graphs of changes in the coordinates of its instantaneous center of mass, and the dynamics of balls in the cage corresponding to these modes is shown on the graphs of their movements.

Keywords: single-disk rotor, ball auto-balancing device, transient and steady-state modes, instantaneous center of mass, amplitude of deflection, orbit of precession.

Введение

С целью устранения «на ходу» эксплуатационных изменений дисбаланса быстровращающихся роторов представляет интерес применение шаровых автобалансирующих устройств (АБУ), отличающихся относительной простотой принципа работы и конструкции [1]. Шаровое АБУ представляет собой дисковую обойму с периферийным кольцевым каналом, в котором находятся свободно перемещающиеся шары. На установившихся режимах сверхкритических частот вращения ротора шары автоматически располагаются во вращающейся обойме таким образом, что присутствующий дисбаланс компенсируется. Однако на докритических установившихся частотах вращения такой автобалансировки не происходит.

По теоретическим и экспериментальным исследованиям шаровых АБУ имеются многочисленные публикации, например работы [2–7], в которых рассматриваются условия существования режимов автобалансировки роторов с различной неуравновешенностью. В большинстве теоретических работ на основе получаемых методом Лагранжа математических моделей аналитически исследуются режимы автобалансировки на установившихся частотах вращения с построением их областей устойчивости в пространстве конструктивных параметров на примере роторов с двухшаровыми АБУ. При этом в теоретических исследованиях, как правило, не учитывается влияние сил тяжести и невязкого трения.

Численное моделирование нестационарных режимов вращения однодисковых роторов с АБУ рассматривается в работах [8–11]. Причем в работе [8] дополнительно учитывается сила тяжести, а в источнике [9] – только сила трения качения шаров в обойме АБУ. В работе [10] приводятся результаты параметрического анализа динамики однодискового ротора с двухшаровым АБУ, полученные численным решением безразмерных уравнений движения без учета сил тяжести и невязкого трения шаров, а в источнике [11] моделируются переходы частоты вращения ротора с «неидеальной» обоймой двухшарового АБУ через критическую частоту.

Если механизм возникновения эффекта автобалансировки шаровыми АБУ на сверхкритических частотах вращения ротора и его отсутствие на докритических частотах изучены и описаны, в частности в источниках [1, 12], то, судя по доступным публикациям, остается мало исследованным влияние динамического поведения шаров в обойме на динамику ротора при его переходных и различных стационарных режимах вращения, в том числе с учетом сил тяжести и невязкого трения шаров.

В данной работе рассматривается построение математической модели динамики однодискового ротора с шаровым АБУ, учитывающей нестационарность частоты вращения ротора при наличии сил тяжести и трения качения шаров в обойме. Для случая АБУ с двумя шарами предлагается вычислительная модель в виде системы дифференциальных уравнений в форме Коши, и приводятся результаты численного моделирования с использованием этой модели.

Математическая модель

Для построения математической модели используется методологический подход из работы [12] со следующими допущениями: статически неуравновешенный диск с обоймой шарового АБУ располагается на горизонтальном упругом невесомом валу посередине пролета между одинаковыми упругодемпферными опорами, масса отдельного шара мала по отношению к массе диска с обоймой, шары катятся без проскальзывания по внешней стороне кольцевой дорожки обоймы, шары при движении не сталкиваются, на них действуют силы вязкого сопротивления среды, трения качения и тяжести.

Расчетная схема в плоскости прецессии диска с АБУ представлена на рис. 1, на котором показаны следующие системы координат (СК):

1. Неподвижная СК $Oxу$ с началом O на оси расточки опорных подшипников. Оси Ox и Oy в плоскости, перпендикулярной оси подшипников. Ось Oz направлена по оси подшипников, образуя правую систему координат.

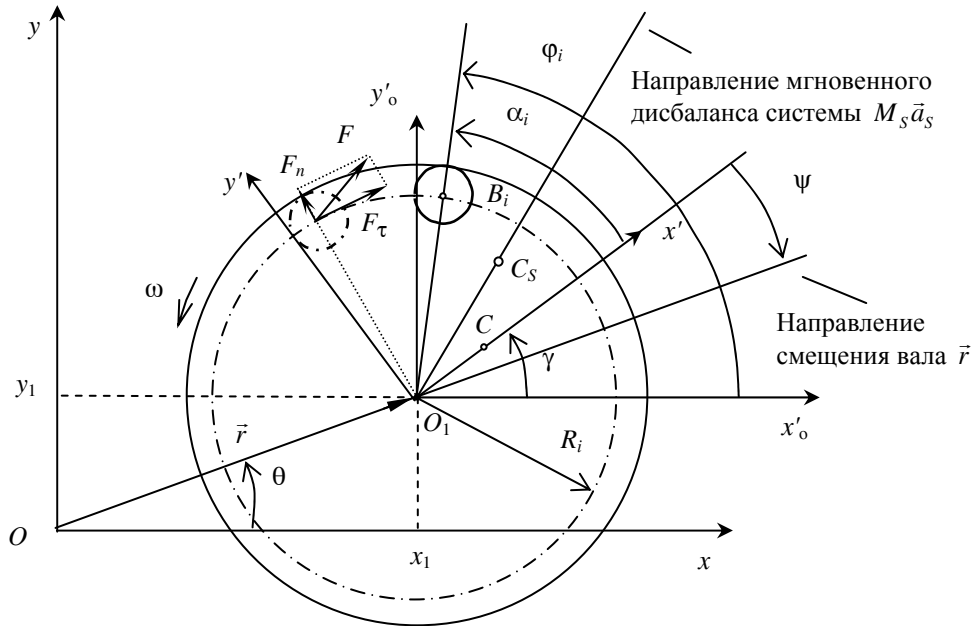


Рис. 1. Расчетная схема динамики системы ротор–шаровое АБУ в плоскости прецессии диска

2. Подвижная СК $O_1x'_0y'_0$ с началом O_1 в центре диска обоймы, расположенном на геометрической оси вала и смещенном относительно оси подшипников на величину r в результате прогиба вала и/или смещения вала в опорах. Плоскость $O_1x'_0y'_0$ совпадает с плоскостью неподвижной СК Oxy . В плоскости прецессионного движения направления осей $O_1x'_0$ и $O_1y'_0$ всегда параллельны осям Ox и Oy соответственно.

3. Вращающаяся СК (ВСК) $O_1x'y'$ с началом O_1 в центре диска. Ось O_1x' направлена по вектору дисбаланса (эксцентриситета центра масс) диска с обоймой без шаров. Оси O_1x' и O_1y' вращаются вокруг начала координат с направлением и частотой вращения ω диска. Таким образом, диск в СК $O_1x'y'$ неподвижен.

На рис. 1 введены следующие обозначения: O – начало неподвижной СК; O_1 – центр диска и обоймы АБУ (точка крепления к оси вала); C – центр масс диска с обоймой без шаров; C_s – мгновенный центр масс системы диск–шары; B_i – центр масс шара; R_i – радиус орбиты центра масс B_i ; $O_1C_s = a_s$ – мгновенный эксцентриситет центра масс системы диск–шары; $O_1C = a$ – эксцентриситет центра масс диска с обоймой без шаров; $OO_1 = r$ – смещение вала; ω – частота собственного вращения ротора; γ – фазовый угол вращения диска; ψ – координата направления вектора смещения \vec{r} в СК $O_1x'y'$; α_i и ϕ_i – угловые координаты положения шара в соответствующих СК; θ – угловая координата вектора смещения \vec{r} в неподвижной СК Oxy ; x_1, y_1 – координаты центра O_1 диска в СК Oxy ; F, F_τ, F_n – действующая на шар инерционная сила и ее тангенциальная и нормальная проекции.

Уравнения динамики рассматриваемого однодискового ротора с шаровым АБУ находятся из уравнений Лагранжа в предположении, что в обойме АБУ имеется n разных по массе шаров, движущихся по своим кольцевым дорожкам, выполненным концентрично с центром диска.

Уравнения Лагранжа для рассматриваемого случая представлены в общем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} = Q_{qi}, \quad (1)$$

где q_i и \dot{q}_i – обобщенная координата и ее производная по времени; T и U – соответственно кинетическая и потенциальная энергия; W – диссипативная функция Релея, учитывающая влияние сил вязкого сопротивления; Q_{q_i} – обобщенная сила.

Обобщенными координатами принимаются координаты x_1 и y_1 точки O_1 в неподвижной СК Oxy и угловые координаты φ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ шаров, отсчитываемые от оси $O_1x'_0$. При этом (см. рис. 1)

$$\varphi_i(t) = \alpha_i(t) + \gamma(t), \quad (2)$$

где $\alpha_i(t)$ – угловая координата шара во вращающейся СК $O_1x'y'$,

$$\gamma(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \gamma_0$$

– фазовый угол вращающейся с диском оси O_1x' с учетом начального сдвига фазы $\gamma_0 = \gamma(0)$. В неустановившихся и установившихся режимах вращения ротора соответственно $\omega = \omega(t)$ и $\omega = \text{const}$.

Кинетическая энергия вращающегося диска с АБУ

$$\begin{aligned} T = & 0,5M(\dot{x}_1 - a\dot{\gamma}\sin\gamma)^2 + 0,5M(\dot{y}_1 + a\dot{\gamma}\cos\gamma)^2 + 0,5J_C\dot{\gamma}^2 + \\ & + \sum_{i=1}^n 0,5m_i(\dot{x}_1 - R_i\dot{\varphi}_i\sin\varphi_i)^2 + \sum_{i=1}^n 0,5m_i(\dot{y}_1 + R_i\dot{\varphi}_i\cos\varphi_i)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^n 0,5\frac{J_i}{r_i^2}[R_i(\dot{\varphi}_i - \dot{\gamma}) - r_i\dot{\gamma}]^2, \end{aligned}$$

где J_C , M , a – соответственно полярный момент инерции, масса и эксцентриситет центра масс диска с обоймой; m_i , J_i , r_i – соответственно масса, момент инерции и радиус i -го шара, R_i – радиус орбиты движения центра масс i -го шара.

Потенциальная энергия упругих и гравитационных сил

$$U = 0,5c_x x_1^2 + 0,5c_y y_1^2 + M_S g y_1 + M g a \sin\gamma + \sum_{i=1}^n m_i g R_i \sin\varphi_i,$$

где c_x, c_y – эквивалентные коэффициенты упругости ротора в направлении осей СК Oxy , определяемые через соответствующие коэффициенты жесткости вала и опор [12]; M_S – масса диска с обоймой и шарами, $M_S = M + \sum_{i=1}^n m_i$.

Диссипативная функция системы, учитывающая влияние на динамику ротора внешнего вязкого сопротивления, зависящего от скорости абсолютных перемещений центра диска в СК Oxy , и влияние на движение шаров вязкого сопротивления, зависящего от тангенциальной скорости $V_i^{\tau} = R_i(\dot{\varphi}_i - \dot{\gamma})$ центра масс шара, имеет вид

$$W = 0,5b_x \dot{x}_1^2 + 0,5b_y \dot{y}_1^2 + \sum_{i=1}^n 0,5b_i R_i^2 (\dot{\varphi}_i - \dot{\gamma})^2,$$

где b_x, b_y – коэффициенты внешнего демпфирования ротора в направлении осей СК Oxy ; b_i – коэффициент вязкого сопротивления для i -го шара.

В уравнениях Лагранжа (1) инерционные, потенциальные и диссипативные силы учтены непосредственно, поэтому обобщенные силы Q_{q_i} определяются как коэффициенты в выражениях для элементарных работ δA_{q_i} по виртуальным отклонениям δq_i обобщенных координат, совершаемых активными силами и/или реакциями в направлении этих перемещений. Эти силы, так же как тангенциальная и потенциальная энергии, рассматриваются в абсолютной СК Oxy . Для возможных перемещений $\delta x_1, \delta y_1$ таких внешних сил и реакций нет, поэтому $Q_{x_1} = Q_{y_1} = 0$.

Для перемещения $\delta \varphi_i$ i -го шара по координате φ_i работу δA_{φ_i} будет совершать сила трения качения шара по внешней стороне дорожки обоймы. Сила трения обусловлена нормальной силой F_n (см. рис. 1), равной

$$F_{ni} = -m_i a_{ni} = m_i (R_i \dot{\varphi}_i^2 - \ddot{x}_1 \cos \varphi_i - \ddot{y}_1 \sin \varphi_i),$$

где a_{ni} – абсолютное нормальное ускорение, соответственно в скобках первое слагаемое – это величина центростремительного ускорения движения шара в СК $O_1 x'_0 y'_0$, остальные – величина ускорения переносного движения СК $O_1 x'_0 y'_0$.

Сила трения качения, приложенная к центру масс шара, будет иметь вид

$$F_{\text{три}} = \frac{\mu_i}{r_i} m_i (R_i \dot{\varphi}_i^2 - \ddot{x}_1 \cos \varphi_i - \ddot{y}_1 \sin \varphi_i) \text{sgn}(\dot{\varphi} - \dot{\gamma}),$$

где μ_i – коэффициент трения качения; $\text{sgn}(\dots)$ – функция знака.

Элементарная работа по перемещению $\delta \varphi_i$ определяется как $\delta A_{\varphi_i} = -M_{\varphi_i} \delta \varphi_i$, где M_{φ_i} – момент силы трения относительно центра O_1 , $M_{\varphi_i} = R_i F_{\text{три}}$, а отрицательный знак свидетельствует, что совершаемая работа направлена в сторону, противоположную положительному направлению $\delta \varphi_i$.

Таким образом, обобщенная сила Q_{φ_i} имеет вид

$$Q_{\varphi_i} = -M_{\varphi_i} = -R_i \frac{\mu_i}{r_i} m_i (R_i \dot{\varphi}_i^2 - \ddot{x}_1 \cos \varphi_i - \ddot{y}_1 \sin \varphi_i) \text{sgn}(\dot{\varphi}_i - \dot{\gamma}).$$

Математическая модель динамики однодискового ротора с АБУ, содержащим n шаров, получается подстановкой T, U, W, Q_{q_i} в уравнения Лагранжа (1) и представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, имеющую порядок $2n + 4$:

$$\begin{aligned} M_S \ddot{x}_1 + b_x \dot{x}_1 + c_x x_1 &= Ma (\ddot{\gamma} \sin \gamma + \dot{\gamma}^2 \cos \gamma) + \sum_{i=1}^n m_i R_i (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i); \\ M_S \ddot{y}_1 + b_y \dot{y}_1 + c_y y_1 &= -Ma (\ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma) - \sum_{i=1}^n m_i R_i (\ddot{\varphi}_i \cos \varphi_i - \dot{\varphi}_i^2 \sin \varphi_i) - M_S g; \\ \left(m_i + \frac{J_i}{r_i^2} \right) R_i \ddot{\varphi}_i + b_i R_i (\dot{\varphi}_i - \dot{\gamma}) &= m_i (\ddot{x}_1 \sin \varphi_i - \ddot{y}_1 \cos \varphi_i) - m_i g \cos \varphi_i + \\ + J_i \frac{R_i + r_i}{r_i^2} \ddot{\gamma} - m_i \frac{\mu_i}{r_i} (R_i \dot{\varphi}_i^2 - \ddot{x}_1 \cos \varphi_i - \ddot{y}_1 \sin \varphi_i) &\text{sgn}(\dot{\varphi}_i - \dot{\gamma}), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) содержит два уравнения прецессионного движения геометрического центра диска с АБУ и n уравнений движения шаров. Распределением в этих уравнениях шаров по нескольким концентрическим беговым дорожкам соответственно получается математическая модель однодискового ротора с многорядным шаровым АБУ.

При движущихся относительно обоймы шарах координаты мгновенного центра масс C_S системы диск-шары в СК $O_1x'y'$ определяются формулами

$$x'_S = M_S^{-1} \left(Ma + \sum_{i=1}^n m_i R_i \cos \alpha_i \right); \quad y'_S = M_S^{-1} \left(\sum_{i=1}^n m_i R_i \sin \alpha_i \right). \quad (4)$$

Система уравнений динамики ротора с двухшаровым АБУ в форме Коши

Для записи системы уравнений (3) динамики ротора с двухшаровым ($n = 2$) АБУ в форме Коши вводятся переменные состояния системы (с учетом уравнения (2)):

$$z_1 = x_1; \quad z_2 = \dot{x}_1; \quad z_3 = y_1; \quad z_4 = \dot{y}_1; \quad z_5 = \alpha_1; \quad z_6 = \dot{\alpha}_1; \quad z_7 = \alpha_2; \quad z_8 = \dot{\alpha}_2.$$

Система уравнений в форме Коши, полученная методом исключений, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= F_1 = z_2; \\ \dot{z}_2 &= F_2 = -M_S^{-1} b_x z_2 - M_S^{-1} c_x z_1 + M_S^{-1} Ma \ddot{\gamma} \sin \gamma + M_S^{-1} Ma \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + \\ &\quad + M_S^{-1} m_1 R_1 (F_6 + \ddot{\gamma}) \sin(z_5 + \gamma) + M_S^{-1} m_1 R_1 (z_6 + \dot{\gamma})^2 \cos(z_5 + \gamma) + \\ &\quad + M_S^{-1} m_2 R_2 (F_8 + \ddot{\gamma}) \sin(z_7 + \gamma) + M_S^{-1} m_2 R_2 (z_8 + \dot{\gamma})^2 \cos(z_7 + \gamma); \\ \dot{z}_3 &= F_3 = z_4; \\ \dot{z}_4 &= F_4 = -M_S^{-1} b_y z_4 - M_S^{-1} c_y z_3 - M_S^{-1} Ma \ddot{\gamma} \cos \gamma + M_S^{-1} Ma \dot{\gamma}^2 \sin \gamma - \\ &\quad - M_S^{-1} m_1 R_1 (F_6 + \ddot{\gamma}) \cos(z_5 + \gamma) + M_S^{-1} m_1 R_1 (z_6 + \dot{\gamma})^2 \sin(z_5 + \gamma) - \\ &\quad - M_S^{-1} m_2 R_2 (F_8 + \ddot{\gamma}) \cos(z_7 + \gamma) + M_S^{-1} m_2 R_2 (z_8 + \dot{\gamma})^2 \sin(z_7 + \gamma) - g; \\ \dot{z}_5 &= F_5 = z_6; \\ \dot{z}_6 &= F_6 = D_1^{-1} H_1 + D_1^{-1} f_1(\alpha_2) G_2^{-1} T_2 + S_1; \\ \dot{z}_7 &= F_7 = z_8; \\ \dot{z}_8 &= F_8 = G_2^{-1} T_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} M_S &= M + \sum_{i=1}^2 m_i; \quad I_1 = \left(m_1 + \frac{J_1}{r_1^2} \right) R_1; \quad I_2 = \left(m_2 + \frac{J_2}{r_2^2} \right) R_2; \\ K_1 &= \frac{J_1}{r_1} - m_1 R_1; \quad K_2 = \frac{J_2}{r_2} - m_2 R_2; \quad \eta_1 = I_1^{-1} m_1 \frac{\mu_1}{r_1}; \quad \eta_2 = I_2^{-1} m_2 \frac{\mu_2}{r_2}; \\ A_1 &= \eta_1 \cos(z_5 + \gamma) \operatorname{sgn} z_6 + I_1^{-1} m_1 \sin(z_5 + \gamma); \\ A_2 &= \eta_2 \cos(z_7 + \gamma) \operatorname{sgn} z_8 + I_2^{-1} m_2 \sin(z_7 + \gamma); \\ B_1 &= \eta_1 \sin(z_5 + \gamma) \operatorname{sgn} z_6 - I_1^{-1} m_1 \cos(z_5 + \gamma); \\ B_2 &= \eta_2 \sin(z_7 + \gamma) \operatorname{sgn} z_8 - I_2^{-1} m_2 \cos(z_7 + \gamma); \\ D_1 &= 1 - A_1 M_S^{-1} m_1 R_1 \sin(z_5 + \gamma) + B_1 M_S^{-1} m_1 R_1 \cos(z_5 + \gamma); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= 1 - A_2 M_S^{-1} m_2 R_2 \sin(z_7 + \gamma) + B_2 M_S^{-1} m_2 R_2 \cos(z_7 + \gamma); \\
 P_1 &= M_S^{-1} m_1 R_1 \ddot{\gamma} \sin(z_5 + \gamma) + M_S^{-1} m_1 R_1 (z_6 + \dot{\gamma})^2 \cos(z_5 + \gamma); \\
 P_2 &= M_S^{-1} m_2 R_2 \ddot{\gamma} \sin(z_7 + \gamma) + M_S^{-1} m_2 R_2 (z_8 + \dot{\gamma})^2 \cos(z_7 + \gamma); \\
 Q_1 &= -M_S^{-1} m_1 R_1 \ddot{\gamma} \cos(z_5 + \gamma) + M_S^{-1} m_1 R_1 (z_6 + \dot{\gamma})^2 \sin(z_5 + \gamma); \\
 Q_2 &= -M_S^{-1} m_2 R_2 \ddot{\gamma} \cos(z_7 + \gamma) + M_S^{-1} m_2 R_2 (z_8 + \dot{\gamma})^2 \sin(z_7 + \gamma); \\
 H_1 &= -I_1^{-1} b_1 R_1 z_6 - A_1 M_S^{-1} (b_x z_2 + c_x z_1) + A_1 M_S^{-1} M a \ddot{\gamma} \sin \gamma + \\
 &\quad + A_1 M_S^{-1} M a \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + A_1 P_1 - B_1 M_S^{-1} (b_y z_4 + c_y z_3) + \\
 &\quad + B_1 M_S^{-1} M a \dot{\gamma}^2 \sin \gamma - B_1 M_S^{-1} M a \ddot{\gamma} \cos \gamma - B_1 g + B_1 Q_1 - \\
 &\quad - I_1^{-1} m_1 g \cos(z_5 + \gamma) + I_1^{-1} K_1 \ddot{\gamma} - \eta_1 R_1 (z_6 + \dot{\gamma})^2 \operatorname{sgn} z_6; \\
 H_2 &= -I_2^{-1} b_2 R_2 z_8 - A_2 M_S^{-1} (b_x z_2 + c_x z_1) + A_2 M_S^{-1} M a \ddot{\gamma} \sin \gamma + \\
 &\quad + A_2 M_S^{-1} M a \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + A_2 P_2 - B_2 M_S^{-1} (b_y z_4 + c_y z_3) + \\
 &\quad + B_2 M_S^{-1} M a \dot{\gamma}^2 \sin \gamma - B_2 M_S^{-1} M a \ddot{\gamma} \cos \gamma - B_2 g + B_2 Q_2 - \\
 &\quad - I_2^{-1} m_2 g \cos(z_7 + \gamma) + I_2^{-1} K_2 \ddot{\gamma} - \eta_2 R_2 (z_8 + \dot{\gamma})^2 \operatorname{sgn} z_8; \\
 f_1(\alpha_2) &= A_1 M_S^{-1} m_2 R_2 \sin(z_7 + \gamma) - B_1 M_S^{-1} m_2 R_2 \cos(z_7 + \gamma); \\
 f_2(\alpha_1) &= A_2 M_S^{-1} m_1 R_1 \sin(z_5 + \gamma) - B_2 M_S^{-1} m_1 R_1 \cos(z_5 + \gamma); \\
 S_1 &= D_1^{-1} A_1 P_2 + D_1^{-1} B_1 Q_2; \\
 S_2 &= D_2^{-1} A_2 P_1 + D_2^{-1} B_2 Q_1; \\
 G_2 &= 1 - D_2^{-1} f_2(\alpha_1) D_1^{-1} f_1(\alpha_2); \\
 T_2 &= D_2^{-1} H_2 + D_2^{-1} f_2(\alpha_1) D_1^{-1} H_1 + D_2^{-1} f_2(\alpha_1) S_1 + S_2.
 \end{aligned}$$

Верификация вычислительной модели

Для численного интегрирования системы (5) методом Рунге – Кутты 4-го порядка (МРК) была написана программа на языке VBA в среде Excel. Программа позволяет на каждом шаге МРК осуществлять вычисления правых частей системы (5) в требуемой последовательности с пересчетом внутри шага $\gamma(t)$ в соответствии с выбранным законом вращения $\omega(t)$.

Для верификации вычислительной программы были проведены расчеты по данным для ротора с двухшаровым АБУ из работы [9]: масса диска $M = 0,1$ кг с эксцентриситетом центра масс $a = 100$ мкм, коэффициенты жесткости $c_x = c_y = 1000$ Н/м, коэффициенты внешнего демпфирования $b_x = b_y = 0,2$ Н·с/м, радиус круговой орбиты центра масс шаров $R = 0,01$ м, масса шаров $m_1 = m_2 = 0,001$ кг, коэффициент вязкого сопротивления шаров $b_1 = b_2 = 1$ Н·с/м, коэффициенты трения качения $\mu_1 = \mu_2 = 0,000\,001$ м, радиусы шаров $r_1 = r_2 = 0,003\,13$ м, моменты инерции $J_1 = J_2 = 3,91 \cdot 10^{-9}$ кг·м², критическая частота вращения 100 рад/с. Задавались нулевые начальные условия.

При расчетах правых частей уравнений на каждом шаге МРК значения частоты ω и фазы γ вращения ротора рассчитывались по формулам

$$\omega(t) = \omega(t_i) + \dot{\omega}(t - t_i); \quad \gamma(t) = \gamma(t_i) + \omega(t_i)(t - t_i) + 0,5\dot{\omega}(t - t_i)^2, \quad (6)$$

где t_i – текущее время на начало i -го шага интегрирования; t – текущее время, для которого вычисляются правые части. Принималось $\dot{\omega} = 40$ рад/с² и $\omega(0) = \gamma(0) = 0$. Результат данного расчета (графики на рис. 2 для случая $g = 0$) идентичен расчету работы [9], показанному в ней на Fig. 4.

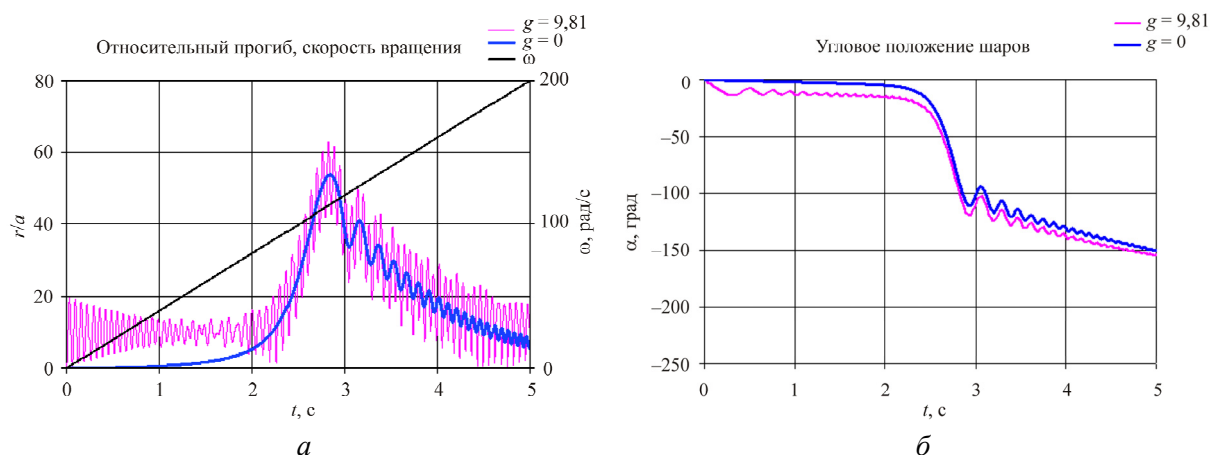


Рис. 2. Режим разгона с учетом ($g = 9,81$) и без учета ($g = 0$) сил тяжести

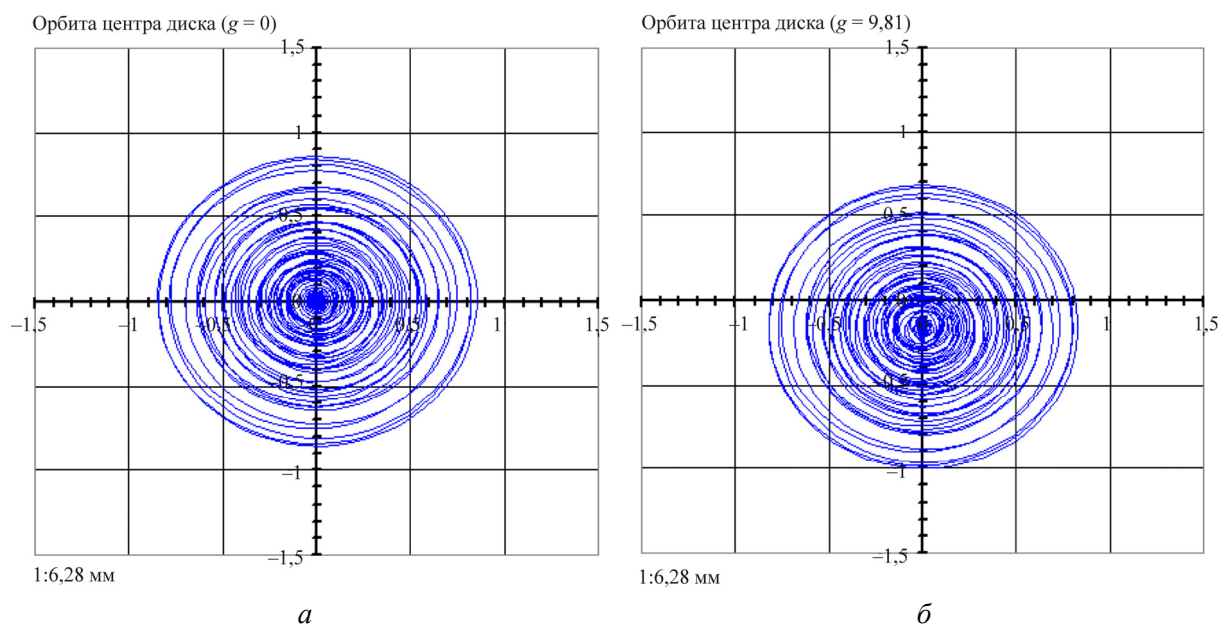


Рис. 3. Орбиты при разгоне без учета (а) и с учетом (б) сил тяжести

На рис. 2 приведен также результат данного расчета при наличии сил тяжести (случай $g = 9,81$), не учитываемых в работе [9]. В этом случае график относительного прогиба r/a на рис. 2, а показывает, что колебания ротора происходят относительно его оси, смещенной под воздействием силы веса. Об этом же свидетельствуют орбиты прецессий на рис. 3, соответствующие расчетам с учетом и без учета сил тяжести.

Данное обстоятельство согласуется с теорией динамики роторов [13]. Влияние сил тяжести на перемещение шаров во ВСК можно видеть на рис. 2, б.

На рис. 2, а также видно, что максимум амплитуды колебаний ротора при разгоне имеет место не в момент совпадения его частоты вращения с критической частотой, а позже. Причем

амплитуда колебаний после первого максимума не убывает монотонно, а имеет несколько максимумов меньшей величины. Это характерно для быстрого разгона [14, с. 131; 11].

Проведенные расчеты позволяют считать, что разработанная вычислительная модель динамики однодискового ротора с двухшаровым АБУ приемлема для проведения исследований численным моделированием.

Численное моделирование

Численное моделирование проводилось для ротора с двухшаровым АБУ со следующими параметрами: масса диска без шаров $M = 8,91$ кг при начальном эксцентриситете $a = 50$ мкм, коэффициенты жесткости ротора $c_x = c_y = 2\,923\,676,7$ Н/м, коэффициенты внешнего демпфирования $b_x = b_y = 57,28$ Н·с/м, радиус круговой орбиты центров масс шаров $R_1 = R_2 = 0,081$ м, массы шаров $m_1 = m_2 = 0,0036$ кг, коэффициенты вязкого сопротивления шаров $b_1 = b_2 = 0,004$ Н·с/м, коэффициенты трения качения шаров $\mu_1 = \mu_2 = 0,000\,05$ м, радиусы шаров $r_1 = r_2 = 0,004\,762\,5$ м, моменты инерции шаров $J_1 = J_2 = 3,266 \cdot 10^{-8}$ кгм², критическая частота вращения $572,83$ рад/с ($91,169$ Гц).

Моделировались участки разгона $[0, t_1]$, установившегося вращения (t_1, t_2) при $\omega_{уст}$ и принудительного торможения $[t_2, t_k]$. Разгон и торможение осуществлялись с постоянными ускорениями: $\dot{\omega}_p = \omega_{уст} / t_1$ и $\dot{\omega}_t = -\omega_{уст} / (t_k - t_2)$.

Фазовый угол вращения ротора вычислялся на каждом шаге МРК подобно уравнению (6):

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma(t_i) + \omega(t_i)(t - t_i) + 0,5\dot{\omega}_p(t - t_i)^2, & 0 \leq t_i \leq t_1; \\ \gamma(t_i) + \omega(t_i)(t - t_i), & t_1 < t_i < t_2; \\ \gamma(t_i) + \omega(t_i)(t - t_i) + 0,5\dot{\omega}_t(t - t_i)^2, & t_2 \leq t_i \leq t_k. \end{cases}$$

Численное интегрирование системы (5) выполнялось с шагом $0,0005$ с (частота дискретизации 2000 Гц) при выводе на печать с шагом $0,002$ с (частота дискретизации 500 Гц) при $\omega_{уст} = 754$ рад/с (120 Гц). Границы продолжительности режимов вращения: $t_1 = 12$ с, $t_2 = 44$ с, $t_k = 56$ с. В момент $t = 28$ с увеличивался эксцентриситет a в $1,3$ раза. Начальные условия: $x_1(0) = y_1(0) = 0$, $\alpha_1(0) = -93,36^\circ$, $\alpha_2(0) = -86,64^\circ$.

На рис. 4–8 представлены результаты расчетов без учета и с учетом сил тяжести при АБУ с двумя шарами (абу2) и без шаров (абу0). На рис. 4 показаны изменения прогиба $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ на рассматриваемых режимах вращения, на рис. 5 – только на установившемся режиме. На ри-

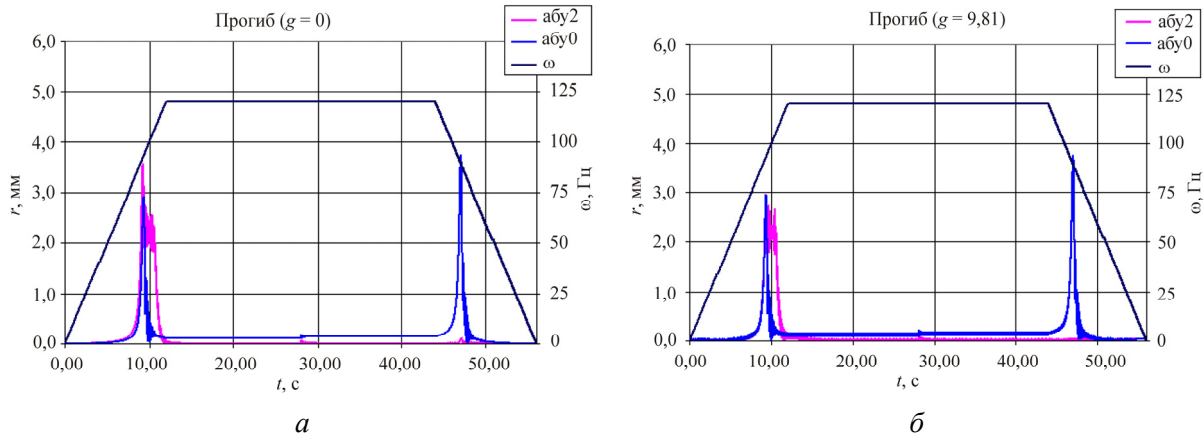


Рис. 4. Прогиб без учета (а) и с учетом (б) сил тяжести: с двумя шарами в АБУ (абу2) и без шаров (абу0)

сунках видно, что шары обеспечивают автобалансировку при сверхкритическом установившемся вращении, сохраняя ее вплоть до прохождения критической частоты при торможении (см. рис. 6).

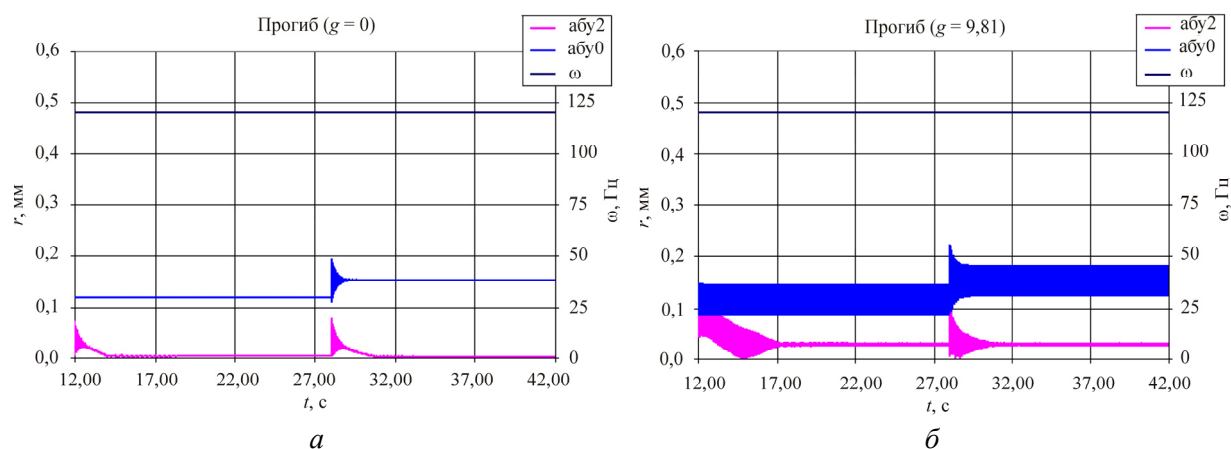


Рис. 5. Прогиб при равномерном вращении без учета (а) и с учетом (б) сил тяжести: с двумя шарами в АБУ (абу2) и без шаров (абу0)

Рис. 6 иллюстрирует изменения во вращающейся СК координат мгновенного центра масс, определяемых по формулам (4), а также ступенчатое изменение эксцентриситета a центра масс диска без шаров. На рис. 6 можно видеть, что на установившемся режиме эксцентриситет центра масс ротора с шарами $a_S = \sqrt{(x'_S)^2 + (y'_S)^2}$ соответствует условию автобалансировки, когда $a_S \rightarrow 0$.

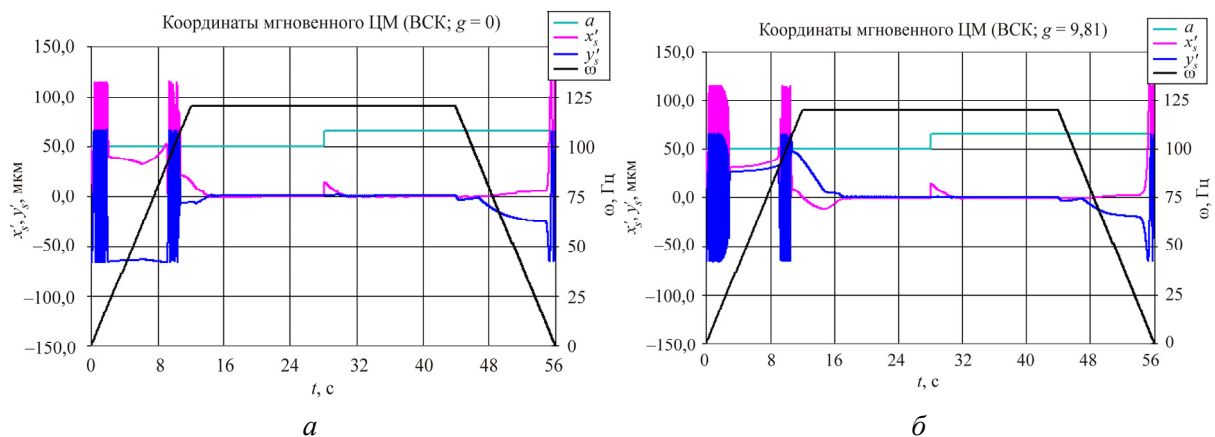


Рис. 6. Координаты мгновенного центра масс без учета (а) и с учетом (б) сил тяжести

Движение шаров в АБУ показано во вращающейся СК в виде углового перемещения по обойме (см. рис. 7) и изменений их угловых координат (см. рис. 8). По рисункам можно видеть, как движение шаров синхронизируется с вращением обоймы. В частности, на рис. 8, а видно, что при отсутствии сил тяжести после изменения эксцентриситета a шары меняются местами относительно своего установившегося расположения.

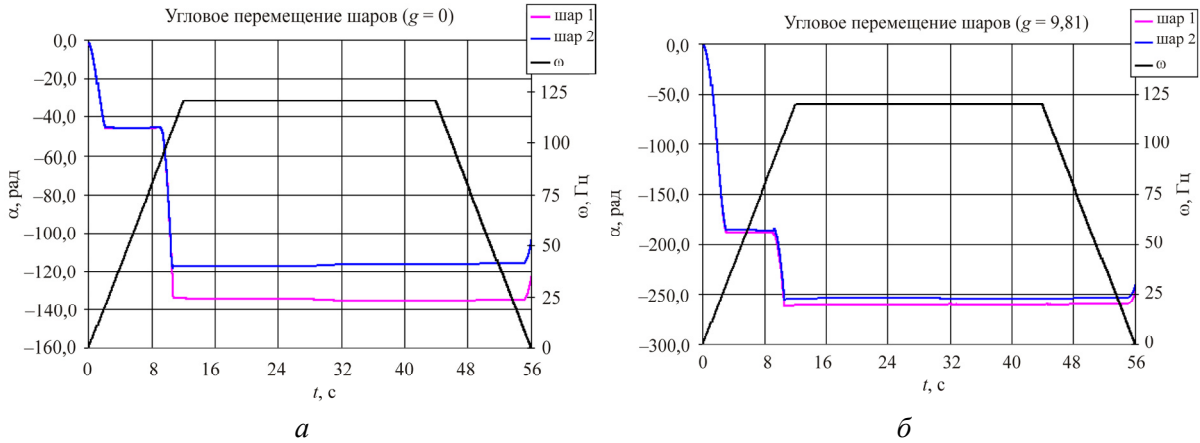


Рис. 7. Угловое перемещение шаров без учета (а) и с учетом (б) сил тяжести

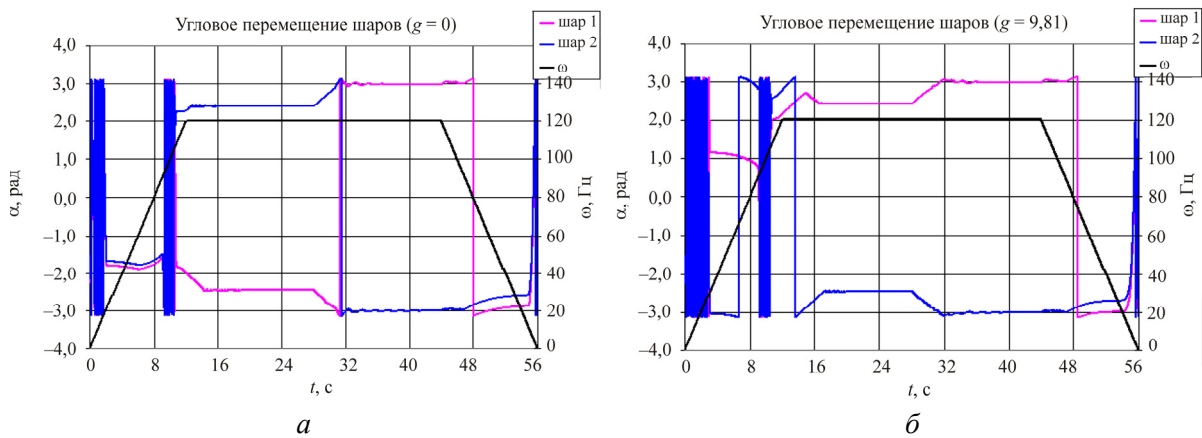


Рис. 8. Приведенное ($\kappa \pm \pi$) угловое перемещение шаров без учета (а) и с учетом (б) сил тяжести

На рис. 9 приведены прогиб и орбиты прецессии для рассматриваемого ротора с анизотропной жесткостью $c_y = 2c_x$ и коэффициентом трения качения шаров $\mu_1 = \mu_2 = 0,00015$ м. Орбиты на рис. 9, б соответствуют одному обороту ротора, а их координаты отнесены к максимальному значению вблизи рассматриваемого момента времени. Ожидается [15], что у ротора имеются две критические частоты вращения (см. рис. 9, а), на частоте вращения между которыми наблюдается обратная прецессия (см. рис. 9, б).

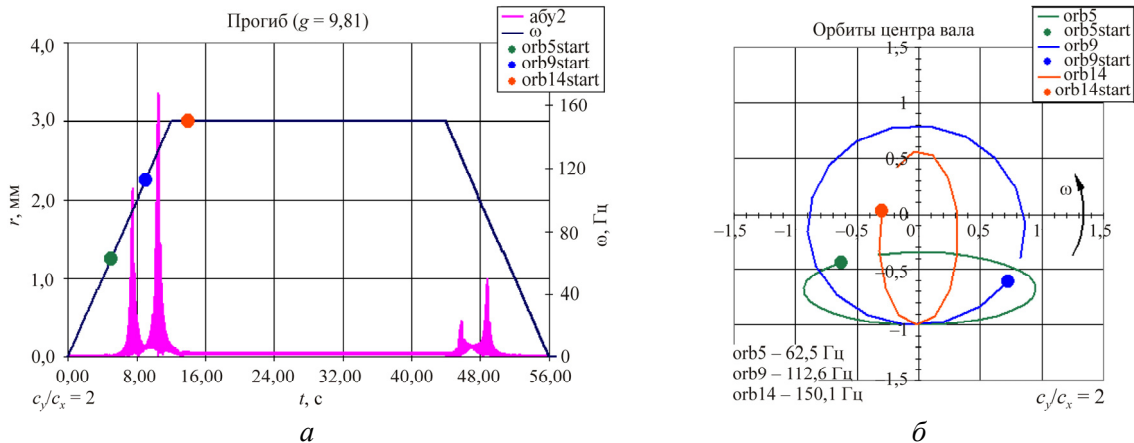


Рис. 9. Модуль прогиба (а) и орбиты (б) при анизотропном роторе. Точками обозначены начала траекторий в рассматриваемый момент времени

Заключение

По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Полученная при указанных допущениях нелинейная математическая модель динамики однодискового симметричного ротора с многорядным шаровым АБУ, учитывающая нестационарность скорости вращения, воздействие сил тяжести и трение качения шаров, пригодна для построения вычислительных моделей задач численного моделирования установившихся и переходных режимов вращения.

2. Математическая модель динамики, полученная для однодискового ротора с двухшаровым АБУ и приведенная к форме Коши, может быть использована для численного параметрического исследования динамики, в том числе с учетом анизотропности ротора.

3. Полученные результаты численного моделирования соответствуют основным теоретическим положениям динамики симметричного однодискового ротора. При этом численное решение разработанной математической модели методом Рунге – Кутты 4-го порядка показало, что его применение требует особого внимания к выбору шага интегрирования и организации расчета правых частей уравнений.

Библиографический список

1. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. – М.: Наука, 2002. – 119 с.
2. Горбенко А.Н. Влияние силы тяжести на колебания ротора с шариковым автобалансирующим устройством // Вестник Технологического университета Подолья. – 2000. – № 1. – С. 110–114.
3. Bolton J.N. Single- and dual-plane automatic balancing of an elastically mounted cylindrical rotor with considerations of coulomb friction and gravity: dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in Engineering Mechanics. – 2010. – URL: https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/29946/Bolton_JN_D_2010.pdf?sequence=1 (accessed 04 May 2019).
4. Гончаров В.В., Филимонович Г.Б. Вид и структура дифференциальных уравнений движения и процесса уравнивания роторной машины с автобаланси́рами // Известия Томского политехнического университета. – 2015. – Т. 326, № 12. – С. 20–30.
5. Экспериментальное исследование процесса статической и динамической балансировки шаровыми автобаланси́рами крыльчатки осевого вентилятора / Л.С. Олийниченко, В.В. Гончаров, В.Н. Сидей, О.В. Горпинченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2017. – Вып. 2, № 1. – С. 42–50.
6. Зайцев Н.Н., Зайцев Д.Н., Минеев Д.А. Моделирование динамики горизонтального ротора с двумя двухшаровыми автобаланси́рами // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации – 2018: материалы XIX Всерос. науч.-техн. конф., г. Пермь, 15–17 нояб. 2018 г. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2018. – С. 113–118.
7. Experimental investigation of ABB effect on unbalanced rotor vibration / M. Makram1, S.S. Kossal, M.K. Khalil, A.F. Nemnem, G. Samer // J. of Coupled Systems and Multiscale Dynamics. – 2017. – Vol. 5. – P. 225–231. DOI: 10.1166/jcsmd.2017.1135
8. Chung J., Shuichi Yoshida, Teruyuki Naka. Effect of gravity and angular velocity on an automatic ball balancer // SICE J. of Control, Measurement and System Integration. – May 2014. – Vol. 7, no. 3. – P. 141–146.
9. Yoshida Shuichi, Teruyuki Naka. Reduction method of residual balancing error on auto-balancer mechanism // SICE J. of Control, Measurement and System Integration. – May 2014. – Vol. 7, no. 3. – P. 141–146.
10. Быков В.Г. Нестационарные режимы движения статически неуравновешенного ротора с автобаланси́ровочным механизмом // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2010. – Вып. 3. – С. 89–96.
11. Быков В.Г., Ковачев А.С. Прохождение через резонанс статически неуравновешенного ротора с «неидеальным» автобаланси́ровочным устройством // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – Т. 4 (62). – С. 671–680.
12. Зайцев Н.Н., Зайцев Д.Н., Макаров А.А. Инженерный анализ установившихся режимов однодискового ротора с многорядным шаровым автобаланси́рующим устройством // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. – 2017. – № 48. – С. 43–59.

13. Скубачевский Г.С. Авиационные газотурбинные двигатели. – М.: Машиностроение, 1969. – 543 с.

14. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела: Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. – М.: Наука, 1981. – Т. III. – 480 с.

15. Подольский М.Е., Черенкова С.В. Физическая природа и условия возбуждения прямой и обратной прецессий ротора // Теория механизмов и машин. – 2014. – Т. 12, № 1. – С. 27–40.

References

1. Gusarov A. A. Avtobalansiruyushchie ustroystva pryamogo deystviya [Autobalancing device of direct action]. Moscow: Nauka, 2002, 119 p.

2. Gorbenko A.N. Vliyaniye sily tyazhesti na kolebaniya rotora s sharikovym avtobalansiruyushchim ustroystvom [Influence of gravity on vibrations of a rotor with ball autobalancing device]. *Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta Podolya*, 2000, № 1, pp. 110–114.

3. Bolton J.N. Single- and dual-plane automatic balancing of an elastically mounted cylindrical rotor with considerations of coulomb friction and gravity. Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy In Engineering Mechanics, 2010. URL: https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/29946/Bolton_JN_D_2010.pdf?sequence=1 (Treatment date: 04/05/2019).

4. Goncharov V.V., Filimonikhin G. B. Vid i struktura differentsialnykh uravneniy dvizheniya i protsessa uravnoveshivaniya rotornoy mashiny s avtobalansirami [Form and structure of differential equations of motion and process of auto-balancing in the rotor machine with auto-balancers]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2015, vol. 326, no. 12, pp. 20-30.

5. Oliynichenko L.S., Goncharov V.V., Sidey V.N., Gorpichenko O.V. Eksperimentalnoe issledovanie protsessy staticheskoy i dinamicheskoy balansirovki sharovymi avtobalansirami krylchatki oseвого ventilyatora [Experimental study of the process of static and dynamic balancing of the axial fan impeller by ball autobalancers]. *Eastern-European Journal Of Enterprise Technologies*, 2017, vol. 2, no. 1, pp. 42-50.

6. Zaytsev N.N., Zaytsev D.N., Mineev D.A. Modelirovaniye dinamiki gorizontalnogo rotora s dvumya dvukhsarovymi avtobalansirami [Simulation of horizontal rotor dynamics with two double-ball autobalances]. *Aerokosmicheskaya tekhnika, vysokie tekhnologii i innovatsii – 2018: Materials of the XIX All-Russian Scientific and Technical Conference (Perm, 15–17 November, 2018)*, Perm: Perm National Research Polytechnic University, 2018, pp. 113-118.

7. Makram M. Experimental investigation of ABB effect on unbalanced rotor vibration / M. Makram1, S.S. Kossa1, M.K. Khalil, A.F. Nemnem, G. Samer // *Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics*, 2017, Vol. 5, pp. -231. DOI: 10.1166/jcsmd.2017.1135

8. Chung J. Effect of gravity and angular velocity on an automatic ball balancer / Shuichi Yoshida, Teruyuki Naka. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, May 2014, Vol. 7, No. 3, pp. 141-146.

9. Shuichi Yoshida, Teruyuki Naka. Reduction Method of Residual Balancing Error on Auto-Balancer Mechanism. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*. - May 2014, Vol. 7, No. 3, pp. 141-146.

10. Bykov V.G. Nestatsionarnyye rezhimy dvizheniya staticheskoy neuravnoveshennogo rotora s avtobalansirovochnym mekhanizmom [Non-steady motion modes of statically unbalanced rotor with autobalancing mechanism]. *Vestnik of Saint Petersburg University*, Iss. 1, 2010, no. 3, pp. 89-96.

11. Bykov V.G., Kovachev A.S. Prokhozhdeniye cherez rezonans staticheskoy neuravnoveshennogo rotora s «neidealnym» avtobalansirovochnym ustroystvom [Passing through the resonance of a static unbalanced rotor with an "non-ideal " autobalancing device]. *Vestnik Of Saint Petersburg University Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62, no. 4, pp. 671- 680.

12. Zaytsev N.N., Zaytsev D.N., Makarov A.A. Inzhenernyy analiz ustanovivshikhsya rezhimov odnodiskovogo rotora s mnogoryadnym sharovym avtobalansiruyushchim ustroystvom [Engineering analysis of steady-state regimes of the single-disk rotor with multi-row automatic ball balancing device]. *PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*, 2017, no. 48, pp. 43-59.

13. Skubachevskiy G.S. Aviatsionnyye gazoturbinnyye dvigateli [Aviation gas-turbine engines]. Moscow: Mashinostroeniye, 1969, 543 p.

14. Filin A.P. Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruемого tela: Soprotivleniye materialov s elementami teorii sploshnykh sred i stroitelnoy mekhaniki. T.III [Applied mechanics of solid deformed body: resistance

of materials with elements of the theory of continuous medium and construction mechanics]. Moscow: Nauka, 1981, vol.3, 480 p.

15. Podolskiy M.E., Cherenkova S.V. Fizicheskaya priroda i usloviya возбуждениya pryamoy i obratnoy pretsessii rotora [Physical nature and conditions of excitation of direct and reverse precession of the rotor]. The Theory of Mechanisms and Machines, 2014, no.1, vol. 12, pp. 27-40.

Об авторах

Зайцев Николай Николаевич (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор кафедры «Ракетно-космическая техника и энергетические системы» ФГБОУ ВО ПНИПУ (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29, e-mail: znn@perm.ru).

Зайцев Денис Николаевич (Пермь, Россия) – ведущий инженер кафедры «Ракетно-космическая техника и энергетические системы» ФГБОУ ВО ПНИПУ (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29, e-mail: rkt@pstu.ru).

Минеев Дмитрий Андреевич (Пермь, Россия) – аспирант кафедры «Ракетно-космическая техника и энергетические системы» ФГБОУ ВО ПНИПУ (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29, e-mail: mda886@mail.ru).

About the authors

Nikolay N. Zaytsev (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor of Rocket and Space Engineering and Power Generating Systems Department, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: znn@perm.ru).

Denis N. Zaytsev (Perm, Russian Federation) – Leading Engineer of Rocket and Space Engineering and Power Generating Systems Department, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: rkt@pstu.ru).

Dmitriy A. Mineev (Perm, Russian Federation) – PhD Student of Rocket and Space Engineering and Power Generating Systems Department, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: mda886@mail.ru).

Получено 29.05.2019