

О.С. Скирюк, Р.А. Файзрахманов

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет

**РАЗРАБОТКА ОДНОПРОДУКТОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМАЛЬНОЙ
ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ С УЧЕТОМ
СЕЗОННОСТИ ПРОДАЖ, ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ
И СЫРЬЕВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ**

Разработаны однопродуктовые динамические детерминированные модели оптимальной производственной программы с учетом внешних и внутренних ограничений при помощи теории математического программирования. Акцентируется внимание на важности формирования таких моделей для промышленных предприятий.

Основным процессом на тактическом уровне планирования производства на предприятии является формирование производственной программы. Производственная программа отражает ассортимент и объемы продукции, подлежащей выпуску в плановом периоде. Производственная программа формируется преимущественно с целью выполнения плана продаж с максимальной эффективностью.

Главной задачей при формировании программы является определение объема выпуска по каждому виду продукции с учетом резервов и возможностей предприятия.

В процессе формирования программы должны учитываться действующие и планируемые производственные мощности, потребности в материалах, стратегии потенциальных поставщиков в отношении цен и объемов производства, стратегии снабжения, складская деятельность и т.д. Отсюда можно с уверенностью говорить, что производственная программа является интегрирующим, связующим этапом в планировании, на котором от принятых решений напрямую зависят общая стратегия предприятия, прибыль, ассортимент выпускаемой

продукции. Исходя из этого, формирование программы является сложным процессом, и его необходимо осуществлять комплексно.

С учетом маркетинговой программы, существующих ресурсов, потребностей в ресурсах возможно составление множества производственных программ, обладающих разной эффективностью. Потому становится актуальной задача выбора наиболее оптимальной программы по некоторому критерию, определяемому, исходя из цели, общей стратегии предприятия.

Сформированная оптимальная производственная программа предприятия служит необходимой информационной основой для решения задач, содержащихся в остальных разделах бизнес-плана, в том числе и финансового плана [8].

Наиболее удобным и эффективным методом поиска оптимальной производственной программы является моделирование. Достоинствами моделирования являются возможность проигрывания различных сценариев, параметров на модели объекта и анализ, сравнение полученных результатов, что невозможно осуществить на реальной производственной системе.

Таким образом, определение оптимальных программ с помощью современных экономико-математических методов и моделей с использованием компьютерных технологий и вычислений – это одно из наиболее важных и перспективных направлений повышения экономической эффективности работы предприятия [8].

Исследования в области формирования оптимальной производственной программы начались в 30-х гг. с работ Л.В. Канторовича, который впервые дал математическую постановку производственных задач оптимального планирования и предложил эффективные методы их решения и приемы экономического анализа этих задач. Дальнейшее развитие и обобщение теории оптимального планирования и управления производством на основе экономико-математических методов получила в работах А.А. Первозванского, А.В. Пархоменко, Б.И. Герасимова, А.В. Мищенко, Р.А. Файзрахманова, А.В. Архипова и др.

В центральной работе А.А. Первозванского [4] разработаны различные типы моделей формирования производственной программы, обозначена проблема формирования программы в случае сезонности спроса. Проблему предлагалось решать использованием только лишь начальных запасов готовой продукции в моменты высокого

спроса. Основное внимание уделялось постановке задач, учитывающих специфику работы предприятия в советское время. В большинстве своем построенные модели оказались сложными для понимания и трудно применимыми в практике планирования.

В работах Р.А. Файзрахманова и А.В. Архипова [1, 2, 6] исследованы проблемы моделирования и управления материальными потоками в производственных системах, построены и проанализированы комплексные модели производства и управления запасами. Модели построены с учетом одной стратегии – закупки сырья партиями оптимального объема и без учета возможности производства дополнительного объема продукции в ранние периоды с целью удовлетворения спроса в более поздние периоды, когда производственных мощностей недостаточно. Но именно проработка этих вопросов позволяет создать гибкую и эффективную модель формирования производственной программы.

Среди зарубежных ученых, занимавшихся разработкой положений в области планирования производства на предприятии, можно отметить труды М. Мескона, М. Альберта, Ф. Хедоури, Дж. Стивенсона.

В работе М. Мескона, М. Альберта, Ф. Хедоури [3] рассматриваются и анализируются чистые и смешанные стратегии производства, но не рассматриваются вопросы использования стратегий в моделях оптимального планирования производственной программы.

Рассмотрим построение однопродуктовой динамической детерминированной модели формирования оптимальной производственной программы с учетом сезонности продаж, сырьевых и производственных ограничений.

Постановка задачи. Найти оптимальные объемы выпуска продукции x_i , $i = \overline{1, n}$ и требуемого сырья λx_i , $i = \overline{1, n}$ максимизирующие прибыль предприятия при следующих данных и предположениях:

- предприятие производит по одной технологии продукцию одного вида, для производства которой требуется один вид сырья;
- продукция и сырье не подвергаются естественной убыли;
- продажи производятся в конце каждого месяца;
- известны месячные значения ожидаемых продаж d_i , $i = \overline{1, n}$;
- известны месячные номинальные производственные мощности m_i , $i = \overline{1, n}$;

- закупка сырья производится по стратегии периодических закупок;
- известен технологический коэффициент λ , показывающий объем необходимого сырья на единицу готовой продукции;
- известны: оптовая цена $p^{\text{прод}}$ продажи единицы продукции; цена $p^{\text{зак.с}}$ закупки сырья у поставщика; цена $p^{\text{тр}}$ транспортировки, отгрузки единицы сырья поставщиком;
- известны: стоимость $C^{\text{труд}}$ труда, затраченного рабочим коллективом на производство единицы продукции; месячная стоимость C_h^c хранения единицы сырья на складе; месячная стоимость $C_h^{\text{гот}}$ хранения единицы готовой продукции на складе; затраты C^3 на выполнение одного заказа у поставщика; переменные производственные затраты $C^{\text{перем.пр}}$ на единицу продукции;
- известны остатки готовой продукции $z_0^{\text{гот}}$ на начало планового периода;
- остатки сырья на начало планового периода считаем равными нулю;
- известны постоянные производственные издержки $C^{\text{пост}}$ (эксплуатация оборудования, аренда помещения, коммунальные расходы и т.д.);

Построение модели. Построим модель, используя теорию математического программирования. В качестве целевого функционала выберем прибыль предприятия. Прибыль предприятия определим формулой: $\Pi = TR - C^{\text{пост}} - C^{\text{перем}}$, где TR – выручка от реализации продукции за весь период планирования, $C^{\text{пост}}$ – постоянные затраты, $C^{\text{перем}}$ – переменные затраты.

При формировании комплексной модели будем учитывать как производственные затраты, так и затраты, связанные с запасами и закупками сырья. Соответственно при расчете затрат не последнюю роль играет и выбранная стратегия закупки сырья. Вопросы о выборе наиболее эффективной стратегии с точки зрения минимизации затрат исследованы в работах [5, 7].

Так, при предположении об использовании стратегии периодических закупок закупки сырья происходят через одинаковые промежутки времени. При построении данной модели будем считать, что закупки происходят 1 раз в месяц.

Определим составляющие прибыли:

$$TR = p^{\text{прод}} \sum_{i=1}^n d_i - p^{\text{прод}} \left(\sum_{i=1}^n (d_i - x_i) - z_0^{\text{гот}} \right) = p^{\text{прод}} \left(\sum_{i=1}^n x_i + z_0^{\text{гот}} \right), \quad (1)$$

$$C^{\text{перем}} = (C^{\text{перем.пр}} + C^{\text{труд}}) \cdot \sum_{i=1}^n x_i + C^{\text{зак.с}} + C^{\text{пз.с}} + C^{\text{хр.с}} + C^{\text{хр.г}}, \quad (2)$$

$$C^{\text{зак.с}} = p^{\text{зак.с}} \cdot \lambda \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3)$$

$$C^{\text{пз.с}} = n \cdot C^3 + p^{\text{тр}} \cdot \lambda \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4)$$

$$C^{\text{хр.с}} = C_h^c \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda x_i}{2} \right), \quad (5)$$

$$C^{\text{хр.г}} = C_h^{\text{гот}} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i + z_{i-1}^{\text{гот}}}{2} \right). \quad (6)$$

При вычислении затрат на пополнение запаса (4) учитывались расходы на транспортировку сырья до места производства, которые в общем случае прямо пропорциональны объемам закупок.

При вычислении затрат на хранение сырья (5) и готовой продукции (6) использовалось предположение о равномерном потреблении сырья и производстве продукции.

Подставив полученные выражения в целевую функцию прибыли, получим оптимизационную модель вида:

$$\begin{aligned} \Pi = & p^{\text{прод}} \left(\sum_{i=1}^n x_i + z_0^{\text{гот}} \right) - (C^{\text{перем.пр}} + C^{\text{труд}}) \sum_{i=1}^n x_i - (p^{\text{зак.с}} + p^{\text{тр}}) \lambda \sum_{i=1}^n x_i - \\ & - n \cdot C^3 - C^{\text{пост}} - C_h^c \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda x_i}{2} \right) - C_h^{\text{гот}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i + z_{i-1}^{\text{гот}}}{2} \right) \rightarrow \max; \end{aligned} \quad (7)$$

$$x_i \geq \min(d_i, m_i); x_i \leq m_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (8)$$

$$z_i^{\text{гот}} + \sum_{j=i}^n x_j \leq \sum_{j=i}^n d_j; z_i^{\text{гот}} \geq z_0^{\text{гот}} + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - d_j); z_i^{\text{гот}} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (9)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Ограничения (8) показывают производство продукции в объемах x_i , не ниже ожидаемых объемов продаж d_i и не выше производственных мощностей m_i . Производство продукции в объемах больше d_i позволяет создать запас для использования его в том случае, когда уровень производства ниже ожидаемых продаж.

Ограничения (9) задают схему использования запасов готовой продукции.

При ограничениях $s_i, i = \overline{1, n}$ на объемы поставляемого сырья получаем модель:

$$\begin{aligned} \Pi = & p^{\text{прод}} \left(\sum_{i=1}^n x_i + z_0^{\text{гот}} \right) - (C^{\text{перем. пр}} + C^{\text{труд}}) \sum_{i=1}^n x_i - \\ & - (p^{\text{зак. с}} + p^{\text{тр}}) \lambda \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot C^3 - C^{\text{пост}} - \end{aligned} \quad (11)$$

$$- C_h^c \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda x_i}{2} \right) - C_h^{\text{гот}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i + z_{i-1}^{\text{гот}}}{2} \right) \rightarrow \max;$$

$$x_i \geq \min(d_i, m_i); \quad x_i \leq m_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (12)$$

$$z_i^{\text{гот}} + \sum_{j=i}^n x_j \leq \sum_{j=i}^n d_j; \quad z_i^{\text{гот}} \geq z_0^{\text{гот}} + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - d_j); \quad z_i^{\text{гот}} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (13)$$

$$\lambda x_i \leq s_i; \quad \lambda x_i \geq \min(\lambda d_i, \lambda m_i), \quad i = \overline{1, n}; \quad (14)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

В этой модели группа (14) задает ограничения на доступное сырье, что оказывает влияние и на объем производимой продукции. Это обстоятельство подтверждает необходимость совместного рассмотрения задач планирования производства и закупок сырья.

При рассмотрении ограничений на вместимость складов сырья V^c и готовой продукции $V^{\text{гот}}$ получим модель:

$$\begin{aligned} \Pi = & p^{\text{прод}} \left(\sum_{i=1}^n x_i + z_0^{\text{гот}} \right) - (C^{\text{перем. пр}} + C^{\text{труд}}) \sum_{i=1}^n x_i - (p^{\text{зак. с}} + p^{\text{тр}}) \lambda \sum_{i=1}^n x_i - \\ & - n \cdot C^3 - C^{\text{пост}} - C_h^c \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda x_i}{2} \right) - C_h^{\text{гот}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i + z_{i-1}^{\text{гот}}}{2} \right) \rightarrow \max; \end{aligned} \quad (16)$$

$$x_i \geq \min(d_i, m_i); \quad x_i \leq m_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (17)$$

$$z_i^{\text{гот}} + \sum_{j=i}^n x_j \leq \sum_{j=i}^n d_j; \quad z_i^{\text{гот}} \geq z_0^{\text{гот}} + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - d_j); \quad z_i^{\text{гот}} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (18)$$

$$\lambda x_i \leq V^c; \quad x_i + z_{i-1}^{\text{гот}} \leq V^{\text{гот}}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (19)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Таким образом, отталкиваясь от базовой модели и учитывая все новые ограничения, получаем семейство моделей, применимых в определенных ситуациях.

Выводы. В работе построены детерминированные динамические модели производства продукции одного вида с учетом сезонности продажи готовой продукции, сырьевых и производственных ограничений. Модели позволяют определить график производства, объемы закупок сырья, выявить резервы производственных мощностей, выявить, обеспечено ли производство необходимым сырьем (материалами), оценить упущенную прибыль. Основным достоинством моделей является подбор наилучших параметров производства продукции и объемов закупки сырья при заданных ограничениях.

Построенные модели позволяют оценить получаемую прибыль, затраты и выбрать наиболее оптимальный вариант и могут служить базой для разработки моделей с учетом новых ограничений и специфики производства.

Построение подобных моделей имеет огромное значение для предприятий, занимающихся производством продукции, так как позволяет объединить процессы производства, поставок, управления запасами и тому подобное с целью найти и построить оптимальное решение. Кроме того, представляется возможным визуализировать, проанализировать и исследовать полученное решение при заданных и изменяемых параметрах, на базе моделей разработать систему поддержки принятия решений.

Библиографический список

1. Архипов А.В., Файзрахманов Р.А. Модель согласования объемов производства и сбыта продукции // Информационные управляющие системы: сб. науч. тр. – Пермь, 2005. – С. 102–106.
2. Архипов А.В., Файзрахманов Р.А. Модель определения оптимальной производственной программы для непостоянного спроса

с учетом дискретного изменения мощностей предприятия // Экономика и финансы. – 2005. – № 11. – С. 83–86.

3. Мескон М., Альберт М., Хедоури Ф. Основы менеджмента. – М.: Дело, 1997. – 704 с.

4. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. – М., 1975. – 616 с.

5. Скирюк О.С., Файзрахманов Р.А. Анализ стратегий закупок в ситуации неполного удовлетворения спроса поставщиком // Автоматизированные системы управления и информационные технологии: матер. краевой науч.-техн. конф. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – С. 144–148.

6. Файзрахманов Р.А. Моделирование и управление материальными потоками производственной системы с учетом факторов неопределенности и риска / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 2002. – 180 с.

7. Файзрахманов Р.А., Скирюк О.С. Метод определения эффективности стратегий закупок с учетом возможностей предприятия на основе расчета затрат, связанных с запасами // Вестник ПГТУ. Электротехника, информационные технологии, управляющие системы. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – № 4. – С. 148–155.

8. Царев В.В. Внутрифирменное планирование. – СПб.: Питер, 2002. – 496 с.

Получено 09.09.2011