УДК 519.27

И.Н. Липатов

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет

АППРОКСИМАЦИЯ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ЭРГОДИЧЕСКОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ЗАТУХАЮЩЕЙ КОСИНУСОИДОЙ

Рассматривается аппроксимация оценки корреляционной функции (КФ) эргодического стационарного случайного процесса аналитическим выражением в виде затухающей косинусоиды. Аналитическое выражение в виде затухающей косинусоиды зависит от параметров $\sigma_x, \beta_x, \alpha_x$. *Получены формулы для определения значений этих трех параметров. Выполнены расчеты на ЦВМ по определению значений параметров* $\sigma_x, \beta_x, \alpha_x$. *Приводятся графики оценки КФ* $\hat{K}_x[j]$ *и аппроксимации* $\tilde{K}_x[j]$ *оценки КФ* $\hat{K}_x[j]$, $j = \overline{0,m}$. *Делается вывод о том, как ведет себя погрешность аппроксимации с изменением j.*

Необходимость аппроксимации КФ возникает всякий раз, когда для решения определенных задач необходимо иметь аналитическое выражение экспериментальных КФ. К таким задачам может относиться задача синтеза оптимального дискретного фильтра или формирующего фильтра.

Нахождение подходящего в определенном смысле аппроксимирующего выражения для экспериментальной КФ может быть осуществлено при помощи:

– линейной комбинации конечного числа функций (в частности, возможна аппроксимация одной подходящей функцией, например функцией вида $\varphi_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha_x \tau} \cos\beta_x \tau$);

– конечного ряда системы экспоненциальных функций;

– бесконечного ряда некоторой определенной системы функций (в частности, возможна аппроксимация степенными рядами, ортогональными функциями, асимптотическими рядами и т.д.).

Известны работы [3, 4, 5], в которых анализируется вопрос аппроксимации экспериментальных КФ аналитическим выражением. В работе рассматривается аппроксимация оценки КФ эргодического стационарного случайного процесса аналитическим выражением в виде затухающей косинусоиды, которое зависит от параметров $\sigma_x, \beta_x, \alpha_x$. Отличие данной работы состоит в ином способе определения параметра β_x.

Обозначим через $X[i] = X(t_i),\, t_i = i\Delta t,\, i = \overline{1,n}$ стационарную эргодическую случайную последовательность. Здесь Δt – интервал дискретности измерений стационарного эргодического случайного процесса $X(t)$.

Известно, что оценку КФ эргодического стационарного случайного процесса $X(t)$ можно определить по одной его реализации $x(t)$. В дальнейшем будем использовать последовательность $x[i] = x(t_i),\, i = \overline{1,n}$.

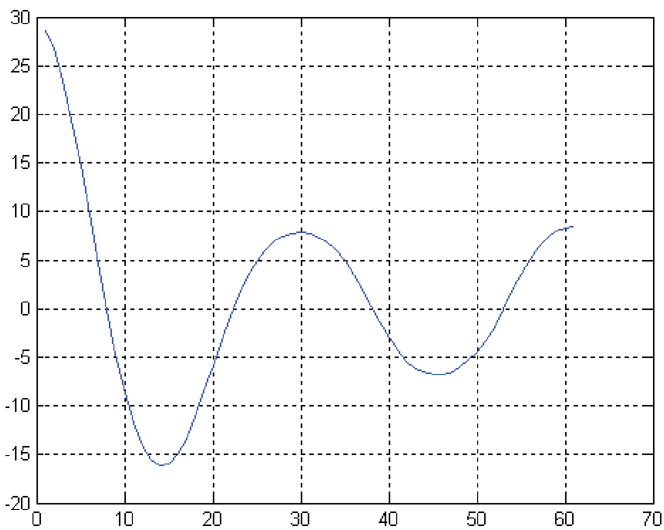

Рис. 1. График оценки КФ $\hat{K}_x[j],\, j = \overline{0,m}$

Оценка КФ $\hat{K}_x[j] = \hat{K}_x(t_j),\, (t_j = j\Delta t;\, j = \overline{0,m};\, m = n/10)$ вычисляется по следующим формулам [1]:

$$\hat{K}_x[j] = \frac{1}{n-j}\sum_{i=1}^{n-j}[x[i] - \hat{m}_x][x[i+j] - \hat{m}_x],\; j = \overline{0,m}, \tag{1}$$

где

$$\hat{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x[i]. \tag{2}$$

Здесь $x[i+j]=x(t_{i+j});\, t_{i+j}=(i+j)\Delta t;\, \hat{m}_x$ – оценка математического ожидания последовательности $x[i],\, i=\overline{1,n}$.

На рис. 1 для параметров Δt = 0,25; n = 600; m = 60 показан график оценки КФ $\hat{K}_x[j],\, j=\overline{0,m}$, рассчитанной по формулам (1), (2).

Будем аппроксимировать оценку КФ $\hat{K}_x[j],\, j=\overline{0,m}$ аналитическим выражением в виде затухающей косинусоиды. Имеем

$$\hat{K}_x[j]\approx\sigma_x^2 e^{-\alpha_x|j\Delta t|}\cos\beta_x j\Delta t,\; j=\overline{0,m}, \tag{3}$$

где $\sigma_x,\beta_x,\alpha_x$ – параметры, подлежащие определению.

Параметр σ_x будет определяться в виде

$$\sigma_x=\sqrt{\hat{K}_x(0)}. \tag{4}$$

Для получения значения параметра β_x определим оценку односторонней спектральной плотности $\hat{G}[k]=\hat{G}(f_k),\, k=\overline{0,m}$ по формуле [2]:

$$\hat{G}[k]=2\Delta t[\hat{K}_x[0]+2\sum_{r=1}^{m-1}\hat{K}_x[r]\cos\left(\frac{\pi rk}{m}\right)+(-1)^k\hat{K}_x[m]],\, k=\overline{0,m}, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &f_k=\frac{kf_c}{m}=k\Delta f,\; k=\overline{0,m};\\ &f_c=\frac{1}{2\Delta t};\;\; \Delta f=\frac{f_c}{m}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Здесь $\Delta f=f_{k+1}-f_{k},\, k=\overline{0,m-1};$ f_c – частота среза, Гц.

Определим сглаженную оценку $G^*[k],\, k=\overline{0,m}$ спектральной плотности в виде [2]:

$$\left.\begin{aligned} &G^*[0]=0{,}5\hat{G}[0]+0{,}5\hat{G}[1];\\ &G^*[k]=0{,}25\hat{G}[k-1]+0{,}5\hat{G}[k]+0{,}25\hat{G}[k+1],\, k=\overline{1,m-1}\\ &G^*[m]=0{,}5\hat{G}[m-1]+0{,}5\hat{G}[m]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

На рис. 2 приведен график $G^*[k],\, k=\overline{0,m}$ сглаженной оценки спектральной плотности, рассчитанной по формулам (5)–(7).

Найдем максимальный элемент в массиве $G^*[k],\ k=\overline{0,m}$ и индекс $k=k_2^*$ для этого элемента. Тогда параметр β_x определяется в виде

$$\beta_x = 2\pi k_2^* \Delta f\ . \tag{8}$$

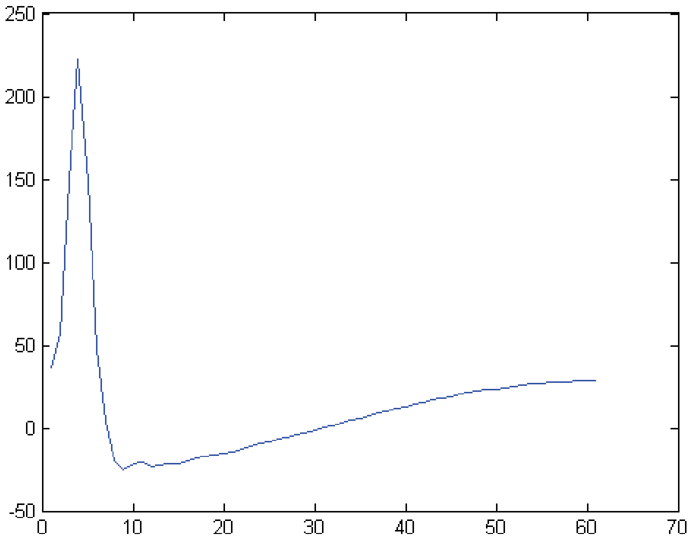

Рис. 2. График $G^*[k],\ k=\overline{0,m}$ сглаженной оценки спектральной плотности

Параметр α_x будем находить из условия

$$F(\alpha_x) = \sum_{j=0}^{m_1} (\hat{K}_x[j] - \sigma_x^2 e^{-\alpha_x j\Delta t} \cdot \cos\beta_x j\Delta t)^2 = \min. \tag{9}$$

Отсюда для определения α_x имеем уравнение

$$W(\alpha_x) = \frac{dF(\alpha_x)}{d\alpha_x} = 0 = \\ = \sum_{j=0}^{m_1} (\hat{K}_x[j] - \sigma_x^2 e^{-\alpha_x j\Delta t} \cdot \cos\beta_x j\Delta t)(j\Delta t) e^{-\alpha_x j\Delta t} \cdot \cos\beta_x j\Delta t. \tag{10}$$

Используя метод Ньютона для решения уравнения (10), получим [3]

$$\alpha_x^{(l+1)} = \alpha_x^{(l)} - \frac{W(\alpha_x^{(l)})}{W'(\alpha_x^{(l)})},\ l = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Здесь

$$W'(\alpha_x) = \frac{dW(\alpha_x)}{d\alpha_x} = \sum_{j=0}^{m_1} (2\sigma_x^2 e^{-\alpha_x j\Delta t} \cdot \cos\beta_x j\Delta t - \hat{K}_x[j])(j\Delta t)^2 e^{-\alpha_x j\Delta t} \cdot \cos\beta_x j\Delta t.$$

Начальное приближение $\alpha_x^{(0)}$ параметра α_x следует вычислять по формуле [3]

$$\alpha_x^{(0)} = \frac{1}{T_0} \ln\left(\frac{\hat{K}_x(0)}{\hat{K}_x(1)}\right), \tag{12}$$

где [3]

$$T_0 = \frac{T}{2};\; T = \frac{2\pi}{\beta x}. \tag{13}$$

Вычисление по формуле (11) прекращается при выполнении неравенства

$$\left|\frac{W(\alpha_x^{(l)})}{W'(\alpha_x^{(l)}}\right|\Bigg|_{l=l^*} < \varepsilon.$$

Тогда параметр α_x определяется как

$$\alpha_x = \alpha_x^{(l^*)}. \tag{14}$$

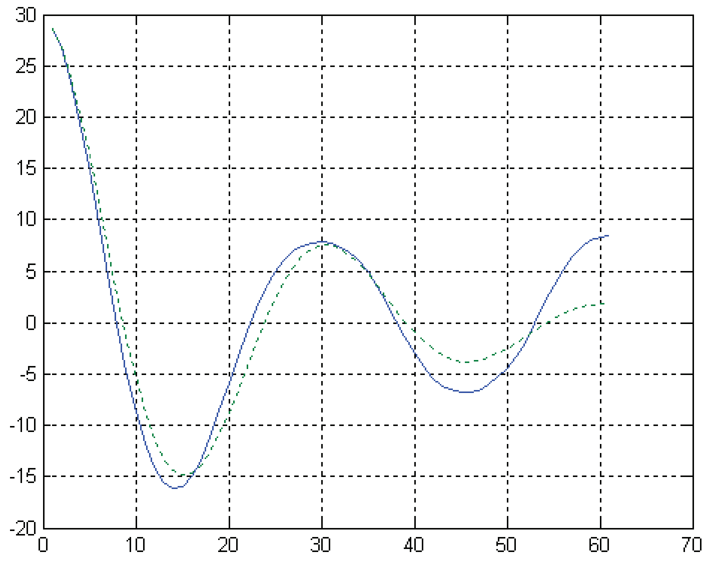

Рис. 3. Графики оценки КФ $\hat{K}_x[j]$ и аппроксимации $\tilde{K}_x[j]$ оценки КФ $\hat{K}_x[j], j=\overline{0,m}$: ——— – оценка КФ $\hat{K}_x[j], j=\overline{0,m}$;
- - - - - – аппроксимация $\tilde{K}_x[j]$ оценки КФ $\hat{K}_x[j], j=\overline{0,m}$

Для оценки КФ $\hat{K}_x[j], j=\overline{0,m}$ были определены следующие значения параметров $\sigma_x, \beta_x, \alpha_x$:

$$\sigma_x = 5{,}35;\; \beta_x = 0{,}824;\; \alpha_x = 0{,}1776.$$

При определении значения параметра α_x принималось, что $m_1 = m/3$; $\varepsilon = 0{,}002$.

Введем обозначения:

$$\tilde{K}_x[j] = \sigma_x^2 e^{-\alpha_x j \Delta t} \cdot \cos\beta_x j \Delta t, \quad j = \overline{0,m}, \qquad (15)$$

где $\tilde{K}_x[j] = \tilde{K}_x(t_j)$ – аппроксимация оценки КФ $\hat{K}_x[j], j = \overline{0,m}$.

На рис. 3 показаны графики оценки КФ $\hat{K}_x[j]$ и аппроксимации $\tilde{K}_x[j]$, $j = \overline{0,m}$.

Из рис. 3 видно, что с ростом *j* погрешность аппроксимации возрастает. Наибольшая точность аппроксимации достигается в области сравнительно малых значений *j*. Если учесть, что аппроксимация проводится применительно к оценке КФ $\hat{K}_x[j], j = \overline{0,m}$, точность которой с ростом *j* также уменьшается, следует рассматривать исследуемую аппроксимацию как целесообразную с практической точки зрения.

Таким образом, в статье выполнена аппроксимация оценки КФ $\hat{K}_x[j], j = \overline{0,m}$ аналитическим выражением в виде затухающей косинусоиды.

Библиографический список

1. Росин М.Ф., Булыгин В.С., Статистическая динамика и теория эффективности систем управления. – М.: Машиностроение, 1981.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974.
3. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. – М.: Советское радио, 1968.
4. Ленинг Дж., Беттин Р.Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.
5. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применение. – М.: Наука, 1965.

Получено 19.09.2011