УДК 539.3

Е.Ю. Макарова, Ю.В. Соколкин

Пермский государственный технический университет

О ВЫВОДЕ И ВЫЧИСЛЕНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ КОМПОЗИТОВ

Рассматривается способ построения функционалов для микронеоднородных сред с учетом накопления структурных повреждений.

Ключевые слова: статистическая краевая задача, механика композитов, квазиизотропные тела, эффективные модули упругости, функция Грина, микронеоднородная среда, структурные повреждения.

В работе [1] устанавливается важное свойство микронеоднородных квазиизотропных тел, когда моделью сравнения является однородная сплошная среда с осредненными свойствами:

$$\varepsilon^{\circ}_{ij} = \Phi_{ij\alpha\beta}\left(\theta\right) e_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_{ij}\left(\mathbf{r}\right)$ – структурные деформации микронеоднородной среды; $e_{ij} = \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle$ – макроскопические деформации микронеоднородной среды; $\theta_{ijmn}\left(\mathbf{r}\right)$ – случайные модули упругости микронеоднородной среды; $\Phi_{ij\alpha\beta}\left(\theta\right)$ – случайный функционал, зависящий от упругих свойств микронеоднородной среды.

В работе [2] указан метод вычисления моментов различных порядков функционала $\Phi_{ij\alpha\beta}\left(\theta\right)$, позволяющий вычислять как эффективные свойства микронеоднородной среды, так и структурные поля деформирования. На основе полученного решения устанавливается важное свойство микронеоднородной среды: если упругие свойства микронеоднородной среды являются локально-эргодическими, то и поля деформирования микронеоднородной среды являются локально-эргодическими.

В работе [3] дается обобщение соотношения (1) на микронеоднородные тела, когда моделью сравнения является микронеоднородная среда с регулярной структурой. Если микронеоднородная среда макроскопически однородна и макроанизотропна, перемещения границы тела, имеющего конечные размеры, детерминированы, дисперсии физических свойств среды конечны, микродеформации регулярной среды в пределах структурного элемента – гладкие функции координат, то существует случайный функционал $\mathbf{\Phi}^{(p)}(\theta)$, не зависящий от граничных условий, такой, что пульсации структурных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{r})$ связаны со структурными деформациями в регулярной среде $\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r})$ соотношением

$$\varepsilon^{\circ}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Phi}^{(p)}(\theta) : \varepsilon^{(p)}(\mathbf{r}). \tag{2}$$

В этой же работе приводится общий метод вычисления функционала $\mathbf{\Phi}^{(p)}(\theta)$ для микронеоднородных сред. Соотношение (2) позволяет получить более точные формулы для расчета эффективных свойств композитов. Для макроскопически однородной квазиизотропной среды в корреляционном приближении получаем следующие зависимости:

$$C^{*}_{ijmn} = C^{(p)*}_{ijmn} + \left\langle \theta^{\circ}{}_{ij\gamma\delta} \theta^{\circ}{}_{\alpha\beta mn} \right\rangle J^{*}_{\gamma\alpha\delta\beta},$$

где C^{*}_{ijmn} – эффективные модули упругости композита; $C^{(p)*}_{ijmn}$ – макроскопические модули упругости регулярной среды сравнения; $J^{*}_{\gamma\alpha\delta\beta}$ – изотропный тензор четвертого ранга, зависящий от макроскопических модулей неоднородной среды сравнения с периодической структурой.

Аналогичные зависимости получаем для эффективных модулей упругости квазиизотропных композитов с учетом конечных дисперсий физических свойств среды:

$$\begin{gathered} C^{*}_{ijmn} = C^{(p)*}_{ijmn} + \left\langle \theta^{\circ}{}_{ij\gamma\delta} \theta^{\circ}{}_{\alpha_1\beta_1 mn} \right\rangle J^{*}_{\gamma\alpha_1\delta\beta_1} + \ldots + \\ + \left\langle \theta^{\circ}{}_{ij\gamma\delta} \theta^{\circ}{}_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1} \theta^{\circ}{}_{\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2} \ldots \theta^{\circ}{}_{\alpha_k\beta_k mn} \right\rangle J^{*}_{\gamma\alpha_1\delta\beta_1} J^{*}_{\gamma_1\alpha_2\delta_1\beta_2} \ldots J^{*}_{\gamma_{k-1}\alpha_2\delta_{k-1}\beta_k} + \ldots \end{gathered} \tag{3}$$

Соотношение (3) представляет собой решение задачи, если соответствующие ряды сходятся. Сходимость рядов в каждом конкретном случае устанавливается непосредственной проверкой при заданных свойствах структурных компонентов [1].

Перейдем теперь к вычислению моментных функций второго порядка структурных деформаций. Перемножив уравнение (2), взятое относительно двух произвольно выбранных точек трехмерного пространства и применив оператор математического ожидания, находим моментную функцию второго порядка структурных деформаций:

$$L_{ijmn}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = F^{iuj\alpha\beta}_{mn\gamma\delta}(\mathbf{r}_1)\,\varepsilon^{(p)}_{\gamma\delta}(\mathbf{r}_2), \tag{4}$$

где через $L_{ijmn}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \left\langle \varepsilon^{\circ}{}_{ij}(\mathbf{r}_1)\,\varepsilon^{\circ}{}_{mn}(\mathbf{r}_2)\right\rangle$ обозначена моментная функция второго порядка структурных деформаций; $F^{ijpq}_{mnrs} = \left\langle \Phi^{(p)}_{ijpq}\Phi^{(p)}_{mnrs}\right\rangle$ – коэффициенты, зависящие только от физических свойств элементов структуры.

Для квазиизотропной среды эти коэффициенты вычисляются в явном виде. Тогда из уравнения (4) получаем явные аналитические зависимости для моментных функций второго порядка структурных деформаций:

$$L_{ijmn}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') = J^{*}_{i\gamma j\delta}J^{*}_{m\phi n\psi}K^{\phi\psi\rho\omega}_{\gamma\delta\alpha\beta}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\,\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}')\,\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}_{\rho\omega}(\mathbf{r}''), \tag{5}$$

где $K^{\phi\psi\rho\omega}_{\gamma\delta\alpha\beta}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$ – моментная функция второго порядка структурных модулей упругости:

$$K^{\phi\psi\rho\omega}_{\gamma\delta\alpha\beta}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') = \left\langle \theta^{\circ}{}_{\phi\psi\rho\beta}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\,\theta^{\circ}{}_{\gamma\delta\alpha\beta}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\right\rangle. \tag{6}$$

Если поля упругих свойств микронеоднородной среды (6) являются локально-эргодическими, то и поля структурных деформаций, как следует из формулы (5), также являются локально-эргодическими.

Для описания структурного разрушения и прогнозирования прочностных свойств композитов в определяющие соотношения вводится новый материальный носитель $\omega_{ijmn}(\boldsymbol{\varepsilon}_h)$, зависящий от условий нагружения [4]. Таким образом, в качестве математической модели процесса квазистатического деформирования и разрушения в рамках такого подхода может быть поставлена стохастическая краевая задача механики композитов [4]:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{0},\ \ \varepsilon(\mathbf{r}) = \operatorname{def}\mathbf{u}(\mathbf{r}),\ \ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{C} : \left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varepsilon})\right] : \boldsymbol{\varepsilon},\ \mathbf{u}(\mathbf{r})\big|_S = \boldsymbol{\varepsilon}^{*}\cdot\mathbf{r}, \tag{7}$$

где $\mathbf{C}$ – тензор модулей упругости изотропной сплошной среды; $\mathbf{I}$ – единичный тензор четвертого ранга; $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$ – заданный тензор макродеформаций; $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ – тензор структурных перемещений.

Для замыкания системы уравнений (7) необходимо дополнить ее уравнениями для определения $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$. Будем предполагать, что заданы явные зависимости

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varepsilon}_h),$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{r})$ – инварианты тензора структурных деформаций.

Наложим на случайное поле $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ математические ограничения общего характера в виде локально-статистической однородности и локальной эргодичности.

Случайное поле $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ есть локально-статистически однородное поле, если многоточечный закон распределения $f_{\omega}^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_n)$, $n = 1, 2, 3, ...$ не изменяется после параллельного переноса точек $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2),...,$ $M_n(\mathbf{r}_n)$ на равные расстояния, не превышающие характерного размера некоторой области статистической зависимости $V^* \subset V$. Под областью V^* понимается шар, радиус которого равен $\varepsilon^2 l$, $0 < \varepsilon << 1$, l – характерный размер конструкции.

Случайное поле $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ есть локально-эргодическое поле если $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ локально-статистически однородно и моментные функции произвольного порядка k финитны в области $V^* \subset V$, т.е.

$$\mathbf{K}_{\omega}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_k)\equiv\left\langle\boldsymbol{\omega}^{\circ}(\mathbf{r}_1)\boldsymbol{\omega}^{\circ}(\mathbf{r}_2)...\boldsymbol{\omega}^{\circ}(\mathbf{r}_k)\right\rangle=\begin{cases}\neq 0, r_m<D\\ \equiv 0, r_m\geq D, \quad k=2,3,...,\end{cases}$$

$\mathbf{r}_m = \max\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|$, $i, j = \overline{1,k}$, D – характерный размер области V^*.

Сформулируем свойство микронеоднородных сред аналогично свойству (1). Если микронеоднородная среда с однородными упругими и неоднородными прочностными свойствами макроскопически однородна и квазиизотропна, поля структурных повреждений при деформировании локально-эргодические, средние деформации макроскопически гладкие функции координат, граничные условия детерминированы, то существует случайный функционал $\boldsymbol{\Phi}^p(\boldsymbol{\omega})$, зависящий только от поля структурных повреждений, такой, что пульсации структурных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}$ связаны со средними деформациями $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ в регулярной среде сравнения соотношениями:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{r})=\boldsymbol{\Phi}^{(p)}(\boldsymbol{\omega}):\mathbf{e}(\mathbf{r}). \qquad (8)$$

Доказательство соотношения (8) аналогично доказательству соотношения (1).

Из соотношения (8) вытекает, что если поля структурных повреждений локально-эргодические, то и поля деформирования тоже являются локально-эргодическими. Как показывают прямые численные эксперименты [5, 6], локальность полей структурных повреждений имеет место на стадии дисперсного накопления повреждений, что является признаком ближнего порядка во взаимодействии полей микродеформаций и структурных повреждений на начальном этапе структурного разрушения. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к укрупнению дефектов и местной локализации повреждений.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда поля упругих свойств $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r})$ и структурных повреждений $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ являются локально-эргодическими. Будем также предполагать, что эти поля являются собственными, т.е. отсутствует взаимная корреляция между полями:

$$\langle\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})\rangle=\mathbf{0}.$$

Сформулируем свойство микронеоднородных сред, аналогичное свойству (2). Если микронеоднородная среда с неоднородными упругими и неоднородными прочностными свойствами макроскопически однородна и квазиизотропна, поля структурных повреждений при деформировании локально-эргодические, структурные деформации в периодической среде сравнения в пределах упругого элемента – гладкие функции координат, граничные условия детерминированы, то существует случайный функционал $\boldsymbol{\Phi}^{p}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega})$, зависящий от полей упругих свойств и структурных повреждений, такой, что пульсации структурных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}$ связаны со структурными деформациями $\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r})$ в регулярной среде сравнения соотношениями:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{r})=\boldsymbol{\Phi}^{(p)}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega}):\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r}). \qquad (9)$$

Для доказательства формулы (9) рассмотрим стохастическую краевую задачу механики микронеоднородных сред в отсутствии объемных сил:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})=\mathbf{0},\ \ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})=\operatorname{def}\mathbf{u}(\mathbf{r}),\ \ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})=\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r}):\left[\mathbf{I}-\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varepsilon})\right]:\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}),$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varepsilon}) \qquad (10)$$

с условиями специального вида

$$\frac{1}{d^I V}\int\limits_{d^I V}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})\,d^I V=\boldsymbol{\varepsilon}^*,$$

которые, как известно [4], эквивалентны условиям на поверхности S тела V:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})\Big|_S=\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\mathbf{r}. \qquad (11)$$

при макроскопически однородном деформированном состоянии.

Идея излагаемого ниже метода заключается в использовании в качестве основы решения аналогичной краевой задачи для среды с регулярной микроструктурой:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(p)}(\mathbf{r})=\mathbf{0},\ \ \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r})=\operatorname{def}\mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}),\ \boldsymbol{\sigma}^{(p)}(\mathbf{r})=\mathbf{C}^{(p)}(\mathbf{r}):\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r}),$$

$$\frac{1}{d^I V}\int\limits_{d^I V}\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r})\,dV=\boldsymbol{\varepsilon}^*,$$

где $\mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r})$, $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}(\mathbf{r})$ – детерминированные периодические функции структурных перемещений, деформаций и напряжений, $\mathbf{C}^{(p)}(\mathbf{r})$ – тензор структурных модулей упругости среды с регулярной структурой. Предположим, что решение краевой задачи (4) нам известно [7]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r})=\mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{r}):\boldsymbol{\varepsilon}^*,\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r})=\boldsymbol{\varepsilon}^*+\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{C}^{*(p)}=\left[\mathbf{C}^{(p)}(\mathbf{r})\right]+\left[\mathbf{C}^{(p)}(\mathbf{r}):\mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{r})\right],\ \boldsymbol{\sigma}^{*(p)}=\mathbf{C}^{*(p)}\boldsymbol{\varepsilon}^*,$$

где $\mathbf{C}^{*(p)}$ – эффективные модули упругости среды с регулярной структурой; $\mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{r})$ – структурные функции [7]; [...] – оператор осреднения по представительному объему.

С целью доказательства соотношения (9) исследуем решение краевой задачи (10) с граничными условиями (11), которая приводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений при нулевых граничных условиях:

$$\nabla\cdot(\mathbf{C}^{(p)}:\operatorname{def}\mathbf{u}^{\circ})=-\nabla\cdot\mathbf{\Pi},\ \mathbf{u}^{\circ}\big|_S=\mathbf{0},\tag{12}$$

где

$$\mathbf{\Pi}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\circ}\operatorname{def}\mathbf{u}^{(p)}+\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\circ}:\operatorname{def}\ \mathbf{u}^{\circ}-\left\langle\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\circ}:\operatorname{def}\ \mathbf{u}^{\circ}\right\rangle,$$

$$\tilde{\theta}^{\circ}_{ijmn}=\tilde{\theta}^{\circ}\cdot_{ijmn}-\tilde{\theta}^{\circ}_{ij\gamma\delta}\left\langle\omega_{\gamma\delta mn}\right\rangle-\tilde{\theta}^{\circ}_{ij\gamma\delta}\omega^{\circ}{}_{\gamma\delta mn},$$

$$\tilde{\theta}_{ijmn}=\theta_{ij\gamma\delta}\left[I_{\gamma\delta mn}-\omega_{\gamma\delta mn}\right].$$

Уравнения (12) можно рассматривать как уравнения краевой задачи теории упругости микронеоднородных сред с регулярной структурой $\mathbf{C}^{(p)}(\mathbf{r})$ и перемещениями $\mathbf{u}^{\circ}(\mathbf{r})$, обусловленными действием фиктивных случайных объемных сил $\nabla\cdot\Pi$.

При введении функции Грина среды с регулярной структурой $\mathbf{G}^{(p)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ система дифференциальных уравнений (12) преобразуется в систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{u}^{\circ}(\mathbf{r})=\int_V\mathbf{G}^{(p)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\left[\nabla\cdot\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}')\right]dV'.\tag{13}$$

Для определения полей структурных деформаций необходимо знать градиент пульсаций структурных перемещений, поэтому дифференцируем (6):

$$\nabla\mathbf{u}^{\circ}(\mathbf{r})=\int_V\nabla\mathbf{G}^{(p)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\left[\nabla\cdot\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}')\right]dV'.\tag{14}$$

Уравнение (13) решаем методом последовательных приближений при ограничениях, сформулированных в виде макроскопической однородности и квазиизотропности микронеоднородной среды.

В первом приближений полагаем:

$$\nabla\mathbf{u}^{\circ}_{(1)}(\mathbf{r})=\int_V\nabla\mathbf{G}^{(p)}\cdot\nabla\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\circ}:\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}\right)dV'.\tag{15}$$

Для макроскопически однородной среды интегралы в выражение (15) фактически распространяются на $\varepsilon^2\ell$-окрестность микронеоднородной среды, где $\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$ – постоянны, поэтому соотношения (15) принимают вид:

$$\nabla\mathbf{u}^{\circ}_{(1)}(\mathbf{r})=\nabla\boldsymbol{\rho}^{(p)}_{(1)}:\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)},\tag{16}$$

где $\nabla\boldsymbol{\rho}_{(1)}^{(p)} = \int\limits_V \nabla\mathbf{G}^{(p)}\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)\left(\nabla'\cdot\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\circ}\right)dV'$, а $\nabla\boldsymbol{\rho}_{(1)}^{(p)}\left(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\circ},\mathbf{r}\right)$ тензор-функционал третьего ранга относительно физических свойств микронеоднородной среды.

Подставляя (15) в (14), с учетом (16) получаем второе приближение:

$$\nabla\mathbf{u}_{(2)}^{\circ}\left(\bar{\mathbf{r}}\right) = \left(\nabla\boldsymbol{\rho}_{(1)}^{(p)} + \nabla\boldsymbol{\rho}_{(2)}^{(p)}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)},$$

$$\nabla\boldsymbol{\rho}_{(2)}^{(p)} = \int\limits_V \nabla\mathbf{G}^{(p)}(\nabla'\left(\tilde{\theta}^{\circ} : \nabla\boldsymbol{\rho}_{(1)}^{(p)}\right)dV'.$$

Окончательно запишем:

$$\nabla\mathbf{u}^{\circ}\left(\mathbf{r}\right) = \nabla\boldsymbol{\rho}^{(p)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)},$$

$$\nabla\boldsymbol{\rho}^{(p)} = \sum_{k=1}^{\infty}\nabla\boldsymbol{\rho}_{(k)}^{(p)}. \tag{17}$$

Поскольку пульсации структурных деформаций определяются выражением

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}\left(\mathbf{r}\right) = \operatorname{def}\mathbf{u}^{\circ}\left(\mathbf{r}\right),$$

то в силу (17) приходим к соотношению (9):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}\left(\mathbf{r}\right) = \boldsymbol{\Phi}^{(p)}\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}\left(\mathbf{r}\right),$$

где функционал $\boldsymbol{\Phi}^{(p)}\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega}\right)$ определяется уравнением:

$$\boldsymbol{\Phi}^{(p)}\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega}\right) = \operatorname{def}\boldsymbol{\rho}^{(p)}\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega}\right).$$

В первом (корреляционном) приближении эти функционалы определяются следующими соотношениями:

$$\Phi_{ijmn}^{(p)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\rho_{imn}^{(p)}}{\partial x_j} + \frac{\partial\rho_{jmn}^{(p)}}{\partial x_i}\right),$$

$$\frac{\partial\rho_{imn}^{(p)}}{\partial x_j} = \int\limits_V \frac{\partial G_{i\alpha}^{(p)}\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x'_{\beta'}}\tilde{\theta}_{\alpha\beta mn}^{\circ}\left(\mathbf{r}'\right)dv', \tag{18}$$

где $\mathbf{G}_{ij}^{(p)}\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)$ – тензорная функция Грина для периодической среды сравнения с неоднородными свойствами.

Из соотношения (18) следует, что указанные выше функционалы являются функционалами относительно свойств микронеоднородной среды $\theta_{ijmn}(\mathbf{r})$ и тензора микроповреждаемости ω_{ijmn}, а также функциями относительно текущей координаты **r**. Из уравнения (10) следует, что моментная функция второго порядка функционала $\Phi_{ijmn}^{(p)}$ однозначно определяется через моментную функцию второго порядка функционала $\rho_{imn,j}^{(p)}$, где через запятую обозначается дифференцирование по координате x_j. Следовательно, для вычисления моментной функции второго порядка необходимо вычислить двойной интеграл

$$F_{pqrs}^{ijmn}\left(\mathbf{r},\mathbf{r}^*\right)=\frac{\partial\rho_{imn}^{(p)}(\mathbf{r})}{\partial x_j}\frac{\partial\rho_{prs}^{(p)}\left(\mathbf{r}^*\right)}{\partial x_q}=$$

$$=\iint\limits_V\frac{\partial G_{i\alpha}^{(p)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial x_j}\frac{\partial G_{p\gamma}^{(p)}\left(\mathbf{r}^*,\mathbf{r}''\right)}{\partial x_q}\frac{\partial^2 K_{\gamma\delta rs}^{\alpha\beta mn}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')}{\partial x'_\beta\partial x''_\delta}dv'dv'', \tag{19}$$

где через $K_{pqrs}^{ijmn}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')=\left\langle\tilde{\theta}_{ijmn}^{\circ}(\mathbf{r}')\tilde{\theta}_{pqrs}^{\circ}(\mathbf{r}'')\right\rangle$ обозначена структурная моментная функция второго порядка свойств микронеоднородной среды. Как показывают многочисленные теоретические и экспериментальные исследования, эта функция локальна (затухает на расстояниях намного меньших линейного размера элемента) и имеет область отрицательных значений [1, 4]. Для корреляционной функции, входящей в соотношение (19), используются аппроксимирующие зависимости через единичные функции, предложенные в [1]. Тогда для описания функции $F_{pqrs}^{ijmn}\left(\mathbf{r},\mathbf{r}^*\right)$ достаточно вычислить некоторые значения этой функции, получаемые при $\mathbf{r}=\mathbf{r}^*=\mathbf{0}$ в уравнении (19). Для вычисления интеграла (25) необходимо знать функцию Грина $G_{ij}^{(p)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ для неоднородной среды сравнения с периодической структурой. Используя технику осреднения, предложенную в работе [3], представим функцию Грина $G_{ij}^{(p)}(\mathbf{0},\boldsymbol{\xi};\mathbf{0},\mathbf{r})$ в виде асимптотического ряда разложения по малому параметру α:

$$G_{ij}^{(p)}(\mathbf{0},\xi;\mathbf{0},\mathbf{r}) = G_{ij}^{*}(\mathbf{r}) + \alpha N_{ij\alpha\beta\gamma_1}^{(1)}(\xi)\frac{\partial G_{\alpha\beta}^{*}(\mathbf{r})}{\partial x_{\gamma_1}} +$$

$$+\alpha^2 N_{ij\alpha\beta\gamma_1\gamma_2}^{(2)}(\xi)\frac{\partial^2 G_{\alpha\beta}^{*}(\mathbf{r})}{\partial x_{\gamma_1}\partial x_{\gamma_2}} + \ldots + \tag{20}$$

$$+\alpha^n N_{ij\alpha\beta\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}^{(n)}(\xi)\frac{\partial^n G_{\alpha\beta}^{*}(\mathbf{r})}{\partial x_{\gamma_1}\partial x_{\gamma_2}\ldots\partial x_{\gamma_n}} + \ldots,$$

где $G_{ij}^{*}(\mathbf{r})$ – функция Грина для эквивалентной однородной изотропной или анизотропной среды сравнения с модулями упругости $C_{ijmn}^{(p)*}$; $C_{ijmn}^{(p)*}$ – эффективные модули упругости неоднородной среды сравнения с периодической структурой; $N_{ij\alpha\beta\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}^{(n)}(\xi)$ – локальные функции быстрых координат ξ n-го уровня, α – малый параметр ($0 < \alpha = l/L \ll 1$); ℓ – характерный линейный размер неоднородности; L – характерный линейный размер конструкции.

Рассмотрим случай, когда микронеоднородная среда макроскопически однородна и квазиизотропна. В этом случае первое слагаемое в выражении (20) есть тензор Кельвина – Сомильяны для однородной изотропной среды сравнения с эффективными свойствами $C_{ijmn}^{(p)*}$. Подставляя формулу (20) в соотношение (19) и используя метод, предложенный в работе [2], получаем

$$F_{pqrs}^{ijmn}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = I_{i\alpha j\beta}^{*} I_{r\gamma s\delta}^{*} \left\langle \tilde{\theta}_{\alpha\beta mn}^{\circ} \tilde{\theta}_{\gamma\delta rs}^{\circ} \right\rangle, \tag{21}$$

где через I_{ipjq}^{*} обозначен изотропный тензор четвертого ранга, зависящий от макроскопических модулей неоднородной среды сравнения с периодической структурой.

В силу свойства предельной локальности функционала $\rho_{imn,j}^{(p)}$ и вычисленного главного значения (21) следует, что функционал $\rho_{imn,j}^{(p)}$ аппроксимируется координатной зависимостью

$$\frac{\partial \rho_{imn}^{(p)}}{\partial x_j} = I_{i\alpha j\beta}^{*} \tilde{\theta}_{\alpha\beta mn}^{\circ}(\mathbf{r}). \tag{22}$$

В этом случае поправка, как это следует из формулы (22), вычисляется в явном виде:

$$C^*_{ijmn} = C^{(p)*}_{ijmn} \left\langle \tilde{\theta}^{\circ}_{ij\gamma\delta} \tilde{\theta}^{\circ}_{\alpha\beta mn} \right\rangle I^*_{\gamma\alpha\delta\beta}.$$

Рассмотрим одномерный случай накопления структурных повреждений

$$\sigma(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r})\left[1 - \omega(\varepsilon)\right]\varepsilon(r).$$

Пусть элементарный макрообъем первого порядка малости (с характерным линейным размером $\varepsilon\ell$) представляет собой совокупность микрообъемов второго порядка малости (с характерным линейным размером $\varepsilon^2\ell$). Будем предполагать, что для каждого элементарного объема второго порядка малости возможно лишь два состояния: либо элементарный объем разрушен, либо нет. Введем скалярную функцию ω, равную единице в неразрушенных микрообъемах и нулю – в разрушенных. Тогда

$$\omega = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p \\ 0 & \text{с вероятностью } (1-p). \end{cases} \tag{23}$$

Из соотношения (23) находим

$$\langle \omega \rangle = p.$$

Таким образом, математическое ожидание функции микроповрежденности, введенное с помощью функции (23), совпадает с вероятностью разрушения микрообъемов второго порядка малости.

Запишем теперь закон Гука для элементарных объемов первого порядка малости:

$$\sigma^* = E\left[1 - \omega^*(\varepsilon)\right]\varepsilon^*, \tag{24}$$

где величины со звездочками относятся к элементарному объему первого порядка малости. Величина ω^* имеет смысл вероятности разрушения p^* элементарного объема первого порядка малости. Из соотношения (24) для момента разрушения величина макронапряжений равна пределу прочности $\sigma^* = \sigma^*_{\text{в}}$, а макродеформация равна предельной деформации: $\varepsilon^* = \varepsilon^*_{\text{в}}$. Отсюда находим формулу для оценки критического значения макроповрежденности:

$$\omega^*_{\text{кр}} = 1 - \frac{\sigma^*_{\text{в}}}{E\,\varepsilon^*_{\text{в}}}. \qquad (25)$$

Установим теперь связь между вероятностями макроскопического разрушения p^* и структурного разрушения p. Принимая степенной закон распределения микроповреждений

$$F(\omega) = (\omega)^{\alpha},\ 0 \le \omega < 1,\ \alpha > 0, \qquad (26)$$

неизвестные постоянные α определим по формуле

$$\langle\omega\rangle = \int_0^1 \omega F'(\omega)\,d\omega = p. \qquad (27)$$

Из (27) находим

$$\alpha = \frac{p}{1-p}.$$

Из формулы (26) получаем зависимость вероятности макроразрушения от вероятности микроразрушения

$$p^* = 1 - \left(\omega^*_{\text{кр}}\right)^{\frac{p}{(1-p)}}.$$

Как видно из формулы (25), $\omega^*_{\text{кр}}$ не является новой константой материала, а выражается через известные предельные макроскопические характеристики материала.

Если записать обобщенный закон Гука через связи первых и вторых инвариантов, то для изотропных материалов получим два независимых критерия разрушения, аналогично тому, как это сделано выше для одномерного случая.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 10-08-92-062).

Библиографический список

1. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 208 с.

2. Соколкин Ю.В. О методе вычисления многоточечных моментных функций полей деформирования и напряжений в микронеоднородных средах // Структурно-механическое исследование композиционных материалов конструкций. – Свердловск, 1984. – С. 12–14.

3. Макарова Е.Ю. Синтез современных методов усреднения при решении стохастических краевых задач механики микронеоднородных сред // Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 3–12.

4. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. – М.: Наука, 1984. – 116 с.

5. Соколкин Ю.В., Вильдеман В.Э., Зайцев А.В., Рочев И.Н. Накопление структурных повреждений и устойчивое закритическое деформирование композитных материалов // Механика композит. материалов. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 234–250.

6. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Зайцев А.В. Эволюция структурных повреждений и макроразрушение неоднородной среды на закритической стадии деформирования // Механика композит. материалов. – 1997. – Т. 33, № 3. – С. 329–339.

7. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.

Получено 29.11.2010