

Д.В. Семенова, К.Б. Устинов

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ЭШЕЛБИ В СЛУЧАЕ КУБИЧЕСКОЙ И ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИИ

Предложен метод вычисления тензора Эшелби для анизотропных тел с помощью асимптотического разложения по малому параметру, соответствующему отклонению тензора упругости тела от случая, для которого тензор Эшелби выражается через элементарные функции. Рассмотрены случаи кубического и гексагонального кристаллов. Для кубического кристалла решение строится в виде ряда поправочных членов к решению для изотропного тела. Для гексагонального кристалла сначала находится решение в элементарных функциях для кристалла специального вида (когда из пяти упругих констант, описывающих поведение гексагонального кристалла, независимы только три), затем решение для гексагонального кристалла общего вида строится в виде ряда поправочных членов к данному решению. Для кубического кристалла рассмотрены включения сферической, дискообразной и игольчатой форм, для гексагонального – дискообразной и игольчатой. Оценены диапазоны применимости решения.

Ключевые слова: тензор Эшелби, анизотропия, малый параметр

1. Введение

Задача об искажениях, вносимых в поле напряжений включениями – областями, претерпевшими изменения формы и линейных размеров, или неоднородностями, которые характеризуются иными значениями упругих констант, чем в остальном материале, – имеет глубокие корни в механике. Одним из основных методов решения задач данного типа является метод Эшелби [1], в основе которого лежит задача нахождения связи компонент стесненной (ε_{ij}) и свободной от напряжения деформации (ε_{kl}^c) во включении. В случае эллипсоидальной формы включения напряжения внутри него однородны и искомая связь осуществляется с помощью компонент тензора Эшелби S_{ijkl} [1]:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^c.$$

Для изотропного тела компоненты тензора Эшелби для включения в форме произвольного трехосного эллипсоида с полуосями a_1, a_2, a_3 выражаются через эллиптические интегралы, для включения

в форме эллипсоида вращения – через элементарные функции [1, 2]. Наиболее простой вид компоненты тензора Эшелби приобретают для включений в форме частных видов эллипсоидов вращения: шарообразного, дискообразного, игольчатого.

Классический подход Эшелби обобщается для случая произвольного анизотропного материала, однако компоненты тензора Эшелби при этом не могут быть посчитаны в замкнутом виде и сводятся лишь к комбинации некоторых поверхностных интегралов, которые путем параметризации сводятся к обыкновенным либо двукратным. Решение в замкнутой форме получено лишь для частного случая включений в трансверсально-изотропной среде [3].

В данной работе предложен способ подсчета компонент тензора Эшелби в случае сфероидальной неоднородности в среде, обладающей кубической и гексагональной анизотропией, с помощью разложения по малому параметру, характеризующему отклонение тензора упругости кристалла от изотропного тела или трансверсально-изотропного кристалла специального вида (соответственно для кубического и гексагонального кристаллов). Результаты, полученные описанным методом, сравниваются с результатами численного интегрирования. Рассматриваются сферические, дискообразные и игольчатые включения.

Хотя численное вычисление интегралов, через которые выражаются компоненты тензора Эшелби для анизотропных кристаллов общего вида, не представляет принципиальных трудностей, оно все же требует значительного числа операций, что весьма затрудняет анализ зависимостей компонент тензора Эшелби от упругих параметров матрицы и геометрии включения. С учетом того, что при вычислении энергии включения, эффективных упругих характеристик тел со включениями, концентрации напряжений внутри включения и на его контуре [2] выражения для компонент тензора Эшелби входят в громоздкие алгебраические выражения, анализ зависимостей данных величин от упругих и геометрических параметров становится еще более сложной задачей. В этой связи наличие асимптотических формул типа полученных в настоящей работе представляется весьма полезным.

2. Асимптотическое разложение компонент тензора Эшелби для кубического кристалла

Тензор Эшелби для случая кубического кристалла может быть посчитан через компоненты вспомогательного тензора \bar{G}_{ipjq} [2]:

$$S_{ijkl} = C_{pqkl}(\bar{G}_{ipjq} + \bar{G}_{jpiq}). \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{1111} = \bar{G}_{2222} &= \frac{2\pi}{a} \int_0^1 \frac{(1-x^2)}{pq} (1-x^2+r^2x^2)[\mu^2(1-x^2+r^2x^2) + \beta r^2x^2] dx + \\ &+ \frac{\pi}{a} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^2}{p(p+q)} [\beta(1-x^2+r^2x^2) + \gamma r^2x^2] dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{3333} &= \frac{4\pi}{a} \int_0^1 \frac{r^2x^2}{pq} (1-x^2+r^2x^2)[\mu^2(1-x^2+r^2x^2) + \beta(1-x^2)] dx + \\ &+ \frac{\pi\gamma}{a} \int_0^1 \frac{r^2x^2(1-x^2)^2}{p(p+q)} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{1122} = \bar{G}_{2211} &= \frac{2\pi}{a} \int_0^1 \frac{(1-x^2)}{pq} \{ (1-x^2+r^2x^2)[\mu^2(1-x^2+r^2x^2) + \beta r^2x^2] dx + \\ &+ (1-x^2)[\beta(1-x^2+r^2x^2) + \gamma r^2x^2] \} dx - \frac{\pi}{a} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^2 [\beta(1-x^2+r^2x^2) + \gamma r^2x^2] dx}{p(p+q)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{1133} = \bar{G}_{2233} &= \frac{2\pi}{a} \int_0^1 \frac{r^2x^2}{pq} \{ 2(1-x^2+r^2x^2)[\mu^2(1-x^2+r^2x^2) + \beta r^2x^2] + \\ &+ (1-x^2)[\beta(1-x^2+r^2x^2) + \gamma r^2x^2] \} dx, \end{aligned}$$

$$\bar{G}_{1212} = -\frac{\pi(\lambda + \mu)}{a} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^2}{p(p+q)} [\mu(1-x^2+r^2x^2) + \mu_1 r^2x^2] dx, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{1313} = \bar{G}_{2323} &= -\frac{2\pi\mu(\lambda + \mu)}{a} \int_0^1 \frac{r^2x^2}{pq} (1-x^2)(1-x^2+r^2x^2) dx - \\ &- \frac{\pi\mu_1(\lambda + \mu)}{a} \int_0^1 \frac{r^2x^2(1-x^2)^2}{p(p+q)} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{3311} = \bar{G}_{3322} &= \frac{2\pi}{a} \int_0^1 \frac{(1-x^2)}{pq} (1-x^2+r^2x^2)[\mu^2(1-x^2+r^2x^2) + \beta(1-x^2)] dx + \\ &+ \frac{\pi\gamma}{2a} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^3}{p(p+q)} dx, \end{aligned}$$

где

$$a = \mu^2(\lambda + 2\mu + \mu_1), \quad b = a^{-1}\mu\mu_1(2\lambda + 2\mu + \mu_1),$$

$$c = a^{-1}\mu_1^2(3\lambda + 3\mu + \mu_1), \quad \gamma = \mu_1(2\lambda + 2\mu + \mu_1),$$

$$p = \left\{ (1-x^2+r^2x^2)^3 + br^2x^2(1-x^2)(1-x^2+r^2x^2) + \frac{1}{4}(1-x^2)^2 [b(1-x^2+r^2x^2) + cr^2x^2] \right\}^{1/2}, \quad 0 < x < 1,$$

$$q = \{ (1-x^2+r^2x^2)^3 + br^2x^2(1-x^2)(1-x^2+r^2x^2) \}^{1/2}, \quad 0 < x < 1.$$

C – тензор упругости; для кубического кристалла он имеет вид

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \mu_1 \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (1.3)$$

Случай $\mu_1 = 0$ соответствует изотропному телу, при этом λ и μ соответствуют константам Ламе изотропного тела.

Сделав в формуле (1.3) замену

$$\mu_1 = \varepsilon \mu, \quad (1.4)$$

будем раскладывать получившееся выражение в ряд по степеням параметра ε , характеризующего отклонение от изотропного случая.

Рассмотрим подробнее некоторые частные случаи для включения в форме сфероида с полуосями $a_1 = a_2$ и a_3 . Для $r \equiv 1/\rho \equiv a_1/a_3 < 1$ имеем вытянутый сфероид, для $r > 1$ – сплюснутый, для $r = 1$ – сферу.

2.1. Асимптотическое разложение для сферического включения

Сделав в выражении (1.3) замену (1.4), разложим его в ряд по степеням ε :

$$S_{ijkl} = S_{ijkl}^{(0)} + \varepsilon S_{ijkl}^{(1)} + \varepsilon^2 S_{ijkl}^{(2)} + \dots$$

Первый член, очевидно, соответствует изотропному телу, следующие члены дают соответствующие поправки.

Подставляя $\rho = 1$, что соответствует сферическому включению, в выражение (1.2), получаем при разложении в ряд этого выражения следующие независимые компоненты тензора Эшелби:

$$S_{1111}^{(0)} = S_{2222}^{(0)} = S_{3333}^{(0)} = \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)},$$

$$S_{1122}^{(0)} = S_{1133}^{(0)} = S_{2211}^{(0)} = S_{2233}^{(0)} = S_{3311}^{(0)} = S_{3322}^{(0)} = -\frac{1-5\nu}{15(1-\nu)},$$

$$S_{1212}^{(0)} = S_{1313}^{(0)} = S_{2323}^{(0)} = \frac{4-5\nu}{15(1-\nu)},$$

$$S_{1111}^{(1)} = S_{2222}^{(1)} = S_{3333}^{(1)} = -2S_{2323}^{(1)} = -2S_{1313}^{(1)} = -2S_{1212}^{(1)} = \frac{17-48\nu+42\nu^2}{315(1-\nu)^2},$$

$$\begin{aligned}
S_{1122}^{(1)} = S_{1133}^{(1)} = S_{2211}^{(1)} = S_{2233}^{(1)} = S_{3311}^{(1)} = S_{3322}^{(1)} &= \frac{2 - 39\nu + 63\nu^2}{315(1-\nu)^2}, \\
S_{1111}^{(2)} = S_{2222}^{(2)} = S_{3333}^{(2)} = -2S_{2323}^{(2)} = -2S_{1313}^{(2)} = -2S_{1212}^{(2)} &= \\
= -\frac{971 - 4134\nu + 7436\nu^2 - 5148\nu^3}{90\,090(1-\nu)^3}, \\
S_{1122}^{(2)} = S_{1133}^{(2)} = S_{2211}^{(2)} = S_{2233}^{(2)} = S_{3311}^{(2)} = S_{3322}^{(2)} &= \\
= -\frac{15 - 4225\nu + 14\,586\nu^2 - 12870\nu^3}{90\,090(1-\nu)^3}.
\end{aligned}$$

Под ν здесь понимается величина $\nu = 9\lambda/12\lambda + 8\mu$, соответствующая коэффициенту Пуассона изотропного тела ($\mu_1 = 0$). Полученные разложения и результаты численного интегрирования представлены на рис. 1. На графиках сплошные линии соответствуют численному интегрированию, пунктирные линии – разложению при учете линейных по ϵ членов, штрихпунктирные – при учете квадратичных. Расчеты проводились для $\nu = 0,25$, что соответствует $\lambda = \mu$.

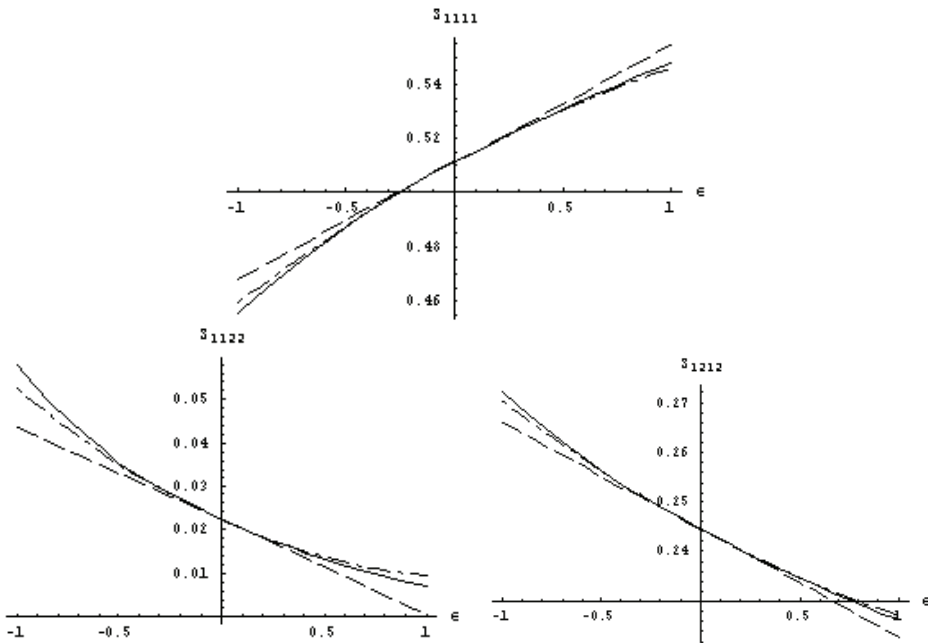


Рис. 1. Расчет компонент тензора Эшелби для сферического включения в кубическом кристалле

2.2. Асимптотическое разложение для дискообразного включения

Если рассматривать предел бесконечно тонких включений $\rho \rightarrow 0$, большинство компонент тензора Эшелби обнуляется. Для приложений, однако, полезно иметь следующие члены разложения. В отличие от предыдущего примера ситуация осложняется наличием двух малых параметров ε и ρ , и разложение можно выписать в форме

$$S_{ijkl} = S_{ijkl}^{(0,0)} + S_{ijkl}^{(0,1)} \varepsilon + S_{ijkl}^{(1,0)} \rho + S_{ijkl}^{(0,2)} \varepsilon^2 + S_{ijkl}^{(1,1)} \rho \varepsilon + S_{ijkl}^{(2,0)} \rho^2 + \dots \quad (1.5)$$

Заметим, что наличие двух малых параметров вовсе не предполагает одинаковость порядка их малости, и мы, в принципе, вправе удерживать различное число членов разложения по каждому из этих параметров. Однако результат подобных разложений нуждается в обосновании; для рассматриваемого случая оно будет выполнено после получения результатов.

Разложение выражения (1.1) по степеням ρ интегрируется по x лишь для членов, не содержащих ρ , причем для произвольных значений ε . Для ненулевых членов

$$S_{3311}^{(0,\varepsilon)} = S_{3322}^{(0,\varepsilon)} = \frac{2\nu}{2 - 2\nu + \varepsilon - 2\nu\varepsilon} \quad S_{3333}^{(0,\varepsilon)} = 2S_{1313}^{(0,\varepsilon)} = 2S_{2323}^{(0,\varepsilon)} = 1, \quad (1.6)$$

что для $\varepsilon = 0$ соответствует хорошо известным выражениям. В выражениях (1.9) второй верхний индекс ε указывает на то, что данные выражения не являются разложениями по ε .

Для линейных по ρ и старших членов соответствующее выражение уже не интегрируется. Однако легко интегрируется почленное (по ε) разложение (1.1). Получаемые при этом выражения, хотя и содержат лишь элементарные функции, достаточно громоздки. Ненулевые компоненты их разложения по ρ имеют вид:

$$\begin{aligned} S_{1111}^{(1,0)} = S_{2222}^{(1,0)} &= \frac{\pi(13 - 8\nu)}{32(1 - \nu)}, & S_{1122}^{(1,0)} = S_{2211}^{(1,0)} &= -\frac{\pi(1 - 8\nu)}{32(1 - \nu)}, \\ S_{1133}^{(1,0)} = S_{3311}^{(1,0)} &= -\frac{\pi(1 - 2\nu)}{8(1 - \nu)}, & S_{3311}^{(1,0)} = S_{3322}^{(1,0)} &= -\frac{\pi(1 + 4\nu)}{8(1 - \nu)}, \\ S_{3333}^{(1,0)} &= -\frac{\pi(1 - 2\nu)}{4(1 - \nu)}, & S_{2323}^{(1,0)} = S_{1313}^{(1,0)} &= -\frac{\pi(2 - \nu)}{8(1 - \nu)}, & S_{1212}^{(1,0)} &= \frac{\pi(7 - 8\nu)}{32(1 - \nu)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{1111}^{(1,1)} = S_{2222}^{(1,1)} &= \frac{\pi[425 - 16v(53 - 40v)]}{4096(1-v)^2}, & S_{1122}^{(1,1)} = S_{2211}^{(1,1)} &= -\frac{\pi[1 + 16v(5 - 24v)]}{4096(1-v)^2}, \\
S_{3311}^{(1,1)} = S_{3322}^{(1,1)} &= \frac{\pi[5 + 128v(1 - 3v)]}{512(1-v)^2}, & S_{1133}^{(1,1)} = S_{2233}^{(1,1)} &= \frac{\pi(5 - 34v + 48v^2)}{512(1-v)^2}, \\
S_{3333}^{(1,1)} &= \frac{\pi(9 - 50v + 64v^2)}{256(1-v)^2}, & S_{2323}^{(1,1)} = S_{1313}^{(1,1)} &= -\frac{\pi(27 - 68v + 64v^2)}{512(1-v)^2}, \\
S_{1212}^{(1,1)} &= -\frac{\pi[65 - 32v(5 - 4v)]}{4096(1-v)^2}, \\
S_{1111}^{(1,2)} = S_{2222}^{(1,2)} &= -\frac{\pi(5345 - 9792v + 12\,544v^2 - 18\,432v^3)}{524\,288(1-v)^3}, \\
S_{1122}^{(1,2)} = S_{2211}^{(1,2)} &= \frac{\pi(333 - 1680v - 15\,104v^2 + 30\,720v^3)}{524\,288(1-v)^3}, \\
S_{1133}^{(1,2)} = S_{2233}^{(1,2)} &= -\frac{\pi(105 - 2598v + 8608v^2 - 7680v^3)}{131\,072(1-v)^3}, \\
S_{3311}^{(1,2)} = S_{3322}^{(1,2)} &= -\frac{\pi(105 + 18\,128v - 99\,840v^2 + 122\,880v^3)}{131\,072(1-v)^3}, \\
S_{3333}^{(1,2)} &= -\frac{\pi(569 - 5550v + 14\,976v^2 - 122\,880v^3)}{65\,536(1-v)^3}, \\
S_{2323}^{(1,2)} = S_{1313}^{(1,2)} &= \frac{\pi(727 - 3212v + 7872v^2 - 7680v^3)}{131\,072(1-v)^3}, \\
S_{1212}^{(1,2)} &= \frac{\pi(1805 - 6296v + 9472v^2 - 6144v^3)}{524\,288(1-v)^3}.
\end{aligned}$$

Полученное разложение отличается по форме от (1.5) и записывается в виде

$$S_{ijkl} = S_{ijkl}^{(0,\varepsilon)} + S_{ijkl}^{(1,0)}\rho + S_{ijkl}^{(1,1)}\rho\varepsilon + S_{ijkl}^{(1,2)}\rho\varepsilon^2 + \dots + S_{ijkl}^{(2,0)}\rho^2 + \dots \quad (1.7)$$

Выражение (1.5) получается отсюда разложением первого члена по ε и перегруппировкой.

Как отмечалось, наличие двух малых параметров ε и ρ не предполагает одинаковость порядка их малости. Оставление большего числа членов разложения по одному из параметров (ε в нашем случае) является оправданным в случае, когда он много больше другого, т.е. $\varepsilon \gg \rho$. Действительно, полагая

$$\rho = \varepsilon^k,$$

подстановкой данного выражения в (1.5) убеждаемся, что удерживание членов вида $S^{(1,1)}$ и отбрасывание членов $S^{(2,0)}$ оправданно при $1 < k < 2$:

$$S_{ijkl} = \underbrace{S_{ijkl}^{(0,\varepsilon)} + S_{ijkl}^{(1,0)} \varepsilon^k + S_{ijkl}^{(1,1)} \varepsilon^{k+1}}_{1 < k < 2} + \underbrace{S_{ijkl}^{(1,2)} \varepsilon^{k+2} + \dots + S_{ijkl}^{(2,0)} \varepsilon^{2k} + \dots}_{2 < k < 3}, \quad (1.8)$$

нижней скобкой отмечены удерживаемые члены. Удерживание членов вида $S^{(1,2)}$ и отбрасывание членов $S^{(2,0)}$ становится оправданно при $2 < k < 3$. Для того чтобы получаемые разложения оставались асимптотически верными, необходимо удерживать члены, содержащие $S^{(1,3)}$ при $3 < k < 4$ и т.д., и, кроме того, формально, следуя процедуре, намеченной (1.5), следовало бы разложить выражение (1.6) в ряд по степеням ε и удерживать определенное число членов. Однако данное действие не представляется рациональным ввиду простоты получившегося выражения: более целесообразным видится оставить выражение (1.6) в полученном виде, который, хоть и содержит избыточные с точки зрения асимптотического разложения члены, более прост. Данные рассуждения относятся также к случаям сильно вытянутых включений и включений в трансверсально-изотропной среде, рассматриваемым ниже.

Полученные разложения и результаты численных расчетов для компонент тензора Эшелби представлены на рис. 2 (для $\nu = 0,25$, $\rho = 0,01$). Сплошные линии соответствуют численному интегрированию, пунктирные линии – разложению при учете линейных по ε членов, штрихпунктирные – при учете квадратичных.

В отличие от случая шарообразных включений, здесь наблюдается систематическое отклонение асимптотического решения от точного для всего рассматриваемого диапазона параметра малости, в том числе для нулевого значения. Данное отклонение связано с тем, что рассматриваемое решение является двойным разложением: по ε и по ρ , т.е. даже для $\varepsilon = 0$ рассматриваемое решение есть лишь главный член разложения точного решения по ρ . Данное отклонение пренебрежимо мало для компоненты S_{3311} , для которой существует ненулевой член разложения по ρ (1.6).

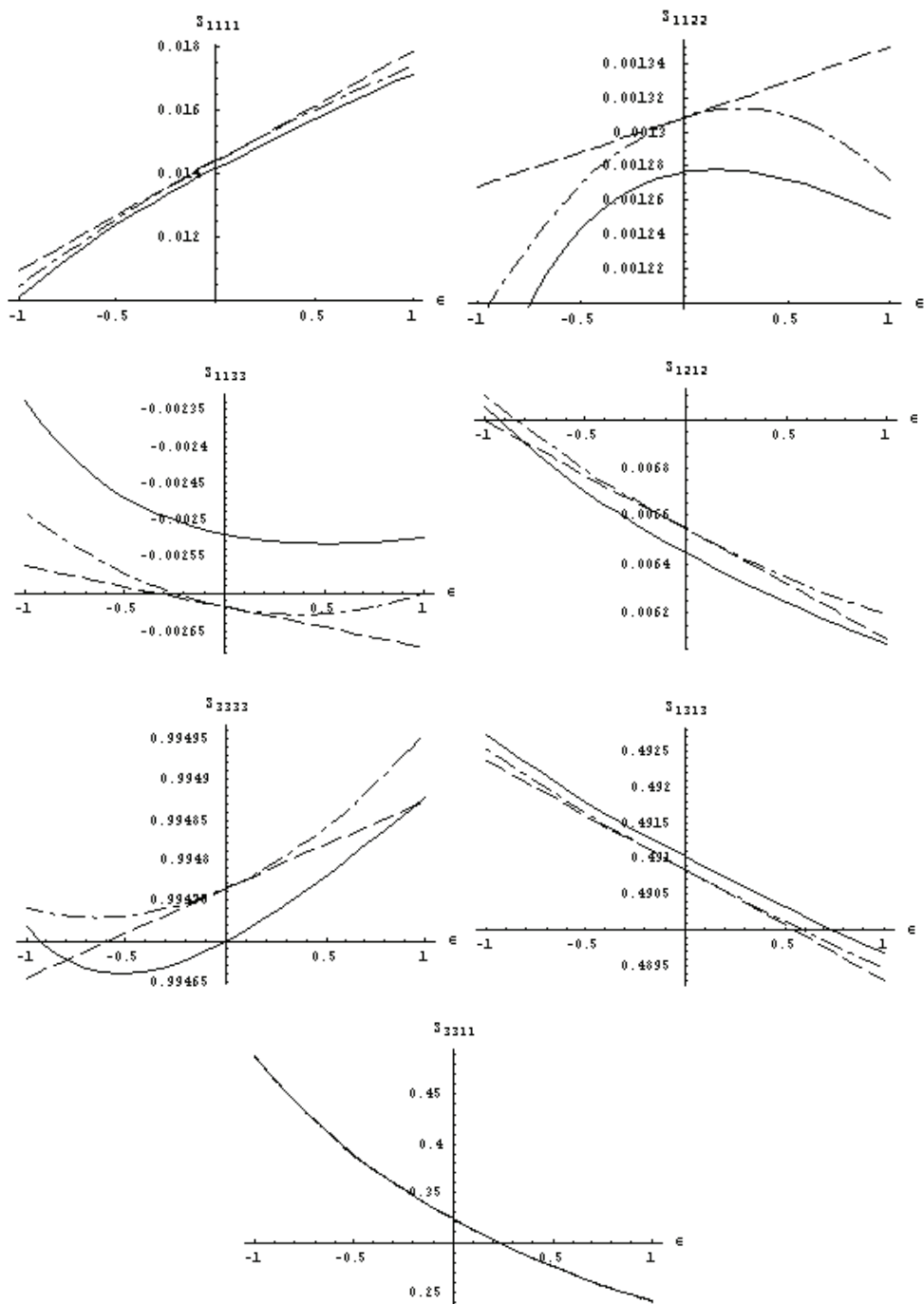


Рис. 2. Расчет компонент тензора Эшелби для дискообразного включения в кубическом кристалле

2.3. Асимптотическое разложение для игольчатого включения

Данный случай соответствует $r \rightarrow 0$. Разложим, аналогично предыдущему пункту, выражение (1.1) в ряд по степеням r . Для членов, не содержащих r , интегрирование по x выполняется элементарно в замкнутом виде для произвольных значений ε . Для ненулевых членов

$$S_{1111}^{(0,\varepsilon)} = S_{2222}^{(0,\varepsilon)} = \frac{-2 + \gamma - (1 - \gamma)\varepsilon}{\gamma\varepsilon}; \quad S_{1122}^{(0,\varepsilon)} = S_{2211}^{(0,\varepsilon)} = \frac{4 + \varepsilon - 2\gamma(1 - \nu) - 2\nu(2 + \varepsilon)}{2\nu\varepsilon(2 + \varepsilon) - \varepsilon(4 + \varepsilon)},$$

$$S_{1133}^{(0,\varepsilon)} = S_{2233}^{(0,\varepsilon)} = \frac{2\nu(2 + \gamma + \varepsilon)}{\gamma(2 + \varepsilon)[2 + \varepsilon - 2\nu(1 + \varepsilon)]};$$

$$S_{1212}^{(0,\varepsilon)} = \frac{4 + \gamma + \varepsilon - 2\nu(2 + \gamma + 2\varepsilon)}{(2 + \gamma)[4 + \varepsilon - 2\nu(2 + \varepsilon)]},$$

$$S_{1313}^{(0,\varepsilon)} = S_{2323}^{(0,\varepsilon)} = 1/4,$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{(2 + \varepsilon)[4 + \varepsilon - 2\nu(2 + \varepsilon)]}{2 + \varepsilon - 2\nu(1 + \varepsilon)}},$$

что для $\varepsilon = 0$ соответствует хорошо известным выражениям.

Для старших членов соответствующее выражение уже не интегрируется. Однако легко интегрируется почленное (по ε) разложение (1.1). Получаемые при этом выражения, хотя и содержат лишь элементарные функции, достаточно громоздки. Ненулевые компоненты их разложения по r имеют вид:

$$\begin{aligned} S_{1111}^{(2,0)} r^2 &= S_{2222}^{(2,0)} r^2 = \frac{1 - 8\nu + 4(1 - 2\nu) \ln r/2}{16(1 - \nu)} r^2, \\ S_{1122}^{(2,0)} r^2 &= S_{2211}^{(2,0)} r^2 = -\frac{5 - 8\nu + 4(1 - 2\nu) \ln r/2}{16(1 - \nu)} r^2, \\ S_{1133}^{(2,0)} r^2 &= S_{2233}^{(2,0)} r^2 = \frac{3 + 2\nu + 2(1 + \nu) \ln r/2}{4(1 - \nu)} r^2, \\ S_{3311}^{(2,0)} r^2 &= S_{3322}^{(2,0)} r^2 = \frac{3 - 4\nu + 2(1 - 2\nu) \ln r/2}{4(1 - \nu)} r^2, \\ S_{1313}^{(2,0)} r^2 &= S_{2323}^{(2,0)} r^2 = \frac{2 + \nu + (1 + \nu) \ln r/2}{4(1 - \nu)} r^2, \\ S_{1212}^{(2,0)} r^2 &= \frac{3 - 8\nu + 4(1 - 2\nu) \ln r/2}{16(1 - \nu)} r^2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$S_{1111}^{(2,1)} r^2 = S_{2222}^{(2,1)} r^2 = -\frac{103 - 372v + 336v^2 + 24(3 - 10v + 8v^2) \ln r/2}{768(1-v)^2} r^2,$$

$$S_{1122}^{(2,1)} r^2 = S_{2211}^{(2,1)} r^2 = \frac{95 - 384v + 720v^2 + 24(3 - 14v + 24v^2) \ln r/2}{768(1-v)^2} r^2,$$

$$S_{1133}^{(2,1)} r^2 = S_{2233}^{(2,1)} r^2 = \frac{35 + 15v + 180v^2 + 12(1 - v + 12v^2) \ln r/2}{192(1-v)^2} r^2,$$

$$S_{3311}^{(2,1)} r^2 = S_{3322}^{(2,1)} r^2 = \frac{35 - 168v + 96v^2 + 12(1 - 4v) \ln r/2}{192(1-v)^2} r^2,$$

$$S_{3333}^{(2,1)} r^2 = -\frac{182 - 261v + 144v^2 + 12(8 - 13v + 8v^2) \ln r/2}{96(1-v)^2} r^2,$$

$$S_{1313}^{(2,1)} r^2 = S_{2323}^{(2,1)} r^2 = \frac{107 - 186v + 144v^2 + 12(5 - 10v + 4v^2) \ln r/2}{192(1-v)^2} r^2,$$

$$S_{1212}^{(2,1)} r^2 = -\frac{25 - 72v + 240v^2 + 24(1 - 4v + 8v^2) \ln r/2}{768(1-v)^2} r^2,$$

где $S_{ijkl}^{(2,0)}$ соответствуют членам разложения компонент тензора Эшелби изотропного тела; выражения $S_{ijkl}^{(2,2)}$ не представлены ввиду их громоздкости.

В выражениях (1.9) и аналогичных выражениях, получаемых ниже, удержаны как члены с логарифмами r , так и без них.

Поскольку полученное разложение не содержит нечетных степеней по r , оно записывается для данного случая в виде

$$S_{ijkl} = S_{ijkl}^{(0,\varepsilon)} + S_{ijkl}^{(2,0)} r^2 + S_{ijkl}^{(2,1)} r^2 \varepsilon + S_{ijkl}^{(2,2)} r^2 \varepsilon^2 + \dots + S_{ijkl}^{(4,0)} r^4 + \dots \quad (1.10)$$

Полагая $r = \varepsilon^k$ в формуле (1.10), убеждаемся, что удерживание членов вида $S^{(2,1)}$ и отбрасывание членов $S^{(4,0)}$ оправданно при $1/2 < k < 1$:

$$S_{ijkl} = \underbrace{S_{ijkl}^{(0,\varepsilon)} + S_{ijkl}^{(2,0)} \varepsilon^{2k} + S_{ijkl}^{(2,1)} \varepsilon^{2k+1} + S_{ijkl}^{(2,2)} \varepsilon^{2k+2} + \dots + S_{ijkl}^{(4,0)} \varepsilon^{4k} + \dots}_{\substack{1/2 < k < 1 \\ 1 < k < 3/2}}$$

Нижней скобкой отмечены удерживаемые члены. Удерживание членов вида $S^{(2,2)}$ и отбрасывание членов $S^{(4,0)}$ становится оправданно при $1 < k < 3/2$. Остальные замечания, сделанные для случая дискообразных включений, остаются справедливыми и для данного случая.

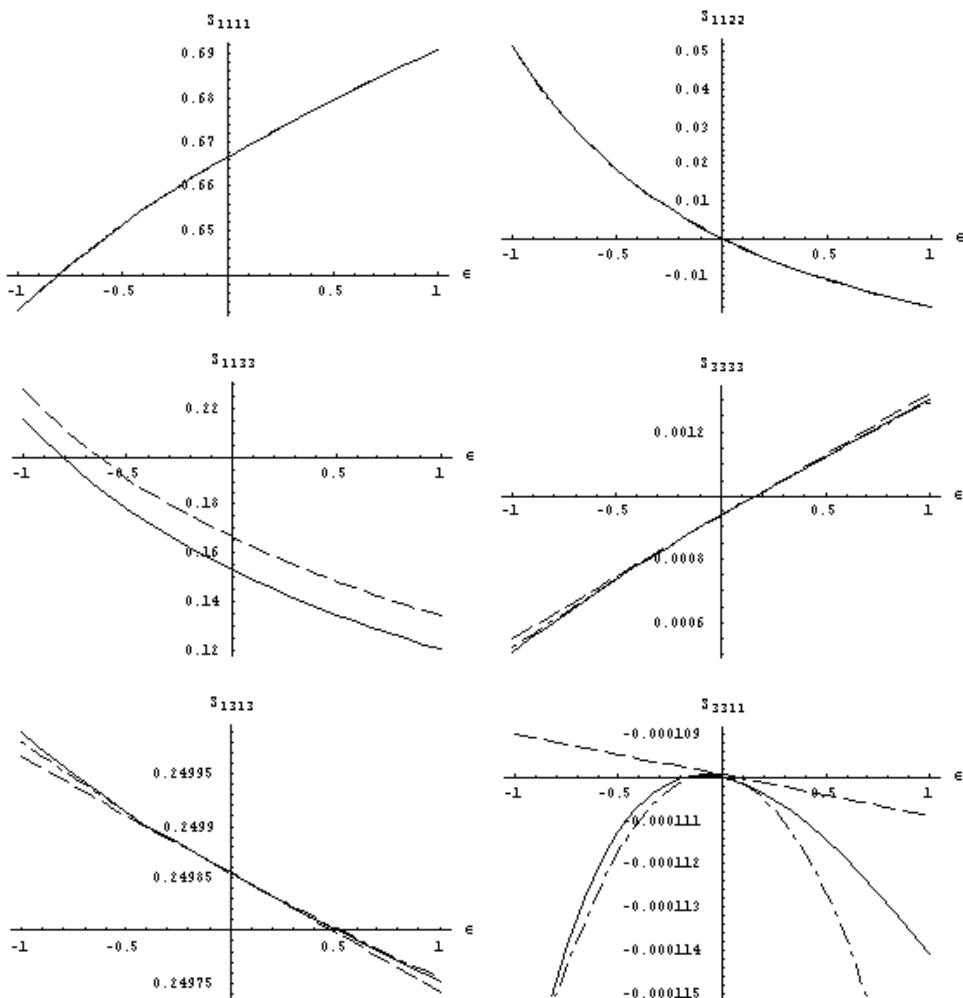


Рис. 3. Расчет компонент тензора Эшелби для игольчатого включения в кубическом кристалле

Полученные разложения и результаты численных расчетов для компонент тензора Эшелби представлены на рис. 3 (для $\nu = 0,25$, $\rho = 0,01$). Сплошные линии соответствуют численному интегрированию, пунктирные линии – разложению при учете линейных по ϵ членов, штрихпунктирные – при учете квадратичных. Подобно случаю дискообразных включений, здесь наблюдается систематическое отклонение асимптотического решения от точного для всего рассматриваемого диапазона параметра малости, в том числе для нулевого значения. Данное отклонение особенно заметно для компонент, не содержащих нулевого члена разложения по r .

3. Асимптотическое разложение компонент тензора Эшелби в случае гексагональной анизотропии

Для гексагонального кристалла (трансверсально-изотропного тела) выражения для компонент тензора \bar{G}_{ipjq} , через которые выражается тензор Эшелби, имеют вид [2]:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{1111} &= \bar{G}_{2222} = \frac{1}{2} \pi \int_0^1 \Delta(1-x^2) \{ [f(1-x^2) + hr^2x^2] \times \\
 &\times [(3e+d)(1-x^2) + 4fr^2x^2] - g^2r^2x^2(1-x^2) \} dx, \\
 \bar{G}_{3333} &= 4\pi \int_0^1 \Delta r^2 x^2 [d(1-x^2) + fr^2x^2] [e(1-x^2) + fr^2x^2] dx, \\
 \bar{G}_{1122} &= \bar{G}_{2211} = \frac{1}{2} \pi \int_0^1 \Delta(1-x^2) \{ [f(1-x^2) + hr^2x^2] \times \\
 &\times [(e+3d)(1-x^2) + 4fr^2x^2] - 3g^2r^2x^2(1-x^2) \} dx, \\
 \bar{G}_{1133} &= \bar{G}_{2233} = 2\pi \int_0^1 \Delta r^2 x^2 \{ [(d+e)(1-x^2) + 2fr^2x^2] \times \\
 &\times [f(1-x^2) + hr^2x^2] - g^2r^2x^2(1-x^2) \} dx; \\
 \bar{G}_{3311} &= \bar{G}_{3322} = 2\pi \int_0^1 \Delta(1-x^2) [d(1-x^2) + fr^2x^2] [e(1-x^2) + fr^2x^2] dx, \\
 \bar{G}_{1212} &= \frac{1}{2} \pi \int_0^1 \Delta(1-x^2)^2 \{ g^2r^2x^2 - (d-e)[f(1-x^2) + hr^2x^2] \} dx, \\
 \bar{G}_{1313} &= \bar{G}_{2323} = -2\pi \int_0^1 \Delta gr^2x^2(1-x^2) [e(1-x^2) + fr^2x^2] dx,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\Delta^{-1} = [e(1-x^2) + fr^2x^2] \{ [d(1-x^2) + fr^2x^2] [f(1-x^2) + hr^2x^2] - g^2r^2x^2(1-x^2) \}.$$

Ненулевые компоненты тензора упругости гексагонального кристалла, характеризуемого пятью константами,

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= C_{2222} = d, \quad C_{3333} = h, \quad C_{1122} = C_{2211} = d - 2e, \\
 C_{1133} &= d - f, \\
 C_{2233} &= C_{3311} = C_{3322} = g - f, \quad C_{1212} = C_{2121} = C_{1221} = C_{2112} = e,
 \end{aligned}$$

$$C_{1313} = C_{3131} = C_{3232} = C_{2323} = C_{1331} = C_{3113} = C_{3223} = C_{2332} = f.$$

Среди многообразия упругих констант может быть выделен подкласс, подчиняющийся условию

$$d = \lambda + 2\mu, \quad e = \mu, \quad f = \mu\eta, \quad g = (\lambda + \mu)\eta, \quad h = (\lambda + 2\mu)\eta^2, \quad (2.2)$$

для которого можно ожидать существенного упрощения вида упругих решений. Данный подкласс является, по сути, одним из подклассов, выделенных Сен-Венаном [4] (см. также работу [5]) для ортотропных сред. Уравнения теории упругости для среды с подобными упругими свойствами могут быть получены масштабированием (с коэффициентом η) соответствующих уравнений для изотропного тела по одной из осей, которая становится трансверсальной осью. Действительно, для данного случая подстановка выражения (2.2) в (2.1), а затем в (1.1) дает следующие ненулевые компоненты тензора Эшелби:

$$\begin{aligned} S_{1111} = S_{2222} &= \frac{\sqrt{r^2\eta-1} [6\lambda + 10\mu - (15\lambda + 19\mu)r^2\eta]}{8(\lambda + 2\mu)(r^2\eta-1)^{5/2}} + \\ &+ \frac{r^2\eta [-4\mu + (9\lambda + 13\mu)r^2\eta] \operatorname{arctg}(\sqrt{r^2\eta-1})}{8(\lambda + 2\mu)(r^2\eta-1)^{5/2}}, \\ S_{1122} = S_{2211} &= \frac{-\sqrt{r^2\eta-1} [-2\lambda + 2\mu + (5\lambda + \mu)r^2\eta]}{8(\lambda + 2\mu)(r^2\eta-1)^{5/2}} + \\ &+ \frac{r^2\eta [4\mu + (3\lambda - \mu)r^2\eta] \operatorname{arctg}(\sqrt{r^2\eta-1})}{8(\lambda + 2\mu)(r^2\eta-1)^{5/2}}, \\ S_{1133} = S_{2233} &= \frac{\eta\sqrt{r^2\eta-1}(\lambda + 2\lambda r^2\eta + 3\mu r^2\eta)}{2(\lambda + 2\mu)(r^2\eta-1)^{5/2}} - \\ &- \frac{r^2\eta [3\lambda + \mu(2 + r^2\eta)] \operatorname{arctg}(\sqrt{r^2\eta-1})}{2(\lambda + 2\mu)(r^2\eta-1)^{5/2}}, \\ S_{3311} = S_{3322} &= \frac{r^2\sqrt{r^2\eta-1}(\lambda + 3\mu + 2\lambda r^2\eta)}{2(\lambda + 2\mu)(r^2\eta-1)^{5/2}} - \\ &- \frac{[2\mu + (3\lambda + \mu)r^2\eta] \operatorname{arctg}(\sqrt{r^2\eta-1})}{2(\lambda + 2\mu)(r^2\eta-1)^{5/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{3333} &= \frac{r^2 \eta \sqrt{r^2 \eta - 1} [-4\lambda - 5\mu + (\lambda + 2\mu)r^2 \eta]}{(\lambda + 2\mu)(r^2 \eta - 1)^{5/2}} + \\
&+ \frac{[3\lambda + \mu(4 - r^2 \eta)] \operatorname{arctg}(\sqrt{r^2 \eta - 1})}{(\lambda + 2\mu)(r^2 \eta - 1)^{5/2}}, \\
S_{2323} = S_{1313} &= \frac{r^2 \eta \sqrt{r^2 \eta - 1} [\lambda + 2\mu + 3\lambda r^2 \eta + 2(\lambda + 2\mu)r^4 \eta^2]}{4(\lambda + 2\mu)(r^2 \eta - 1)^{5/2}} - \\
&- \frac{r^2 \eta [3\lambda + 2\mu + (3\lambda + 4\mu)r^2 \eta] \operatorname{arctg}(\sqrt{r^2 \eta - 1})}{4(\lambda + 2\mu)(r^2 \eta - 1)^{5/2}}, \\
S_{1212} &= \frac{\sqrt{r^2 \eta - 1} [2\lambda + 6\mu - (5\lambda + 9\mu)r^2 \eta]}{8(\lambda + 2\mu)(r^2 \eta - 1)^{5/2}} + \\
&+ \frac{r^2 \eta [-4\mu + (3\lambda + 7\mu)r^2 \eta] \operatorname{arctg}(\sqrt{r^2 \eta - 1})}{8(\lambda + 2\mu)(r^2 \eta - 1)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

Для трансверсально-изотропного тела общего вида представим следующий набор упругих констант:

$$\begin{aligned}
d &= \lambda + 2\mu, \quad e = \mu, \quad f = \mu\eta(1 + \varepsilon\alpha), \\
g &= (\lambda + \mu)\eta(1 + \varepsilon\beta), \quad h = (\lambda + 2\mu)\eta^2,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

одна из констант (α , β) может быть без нарушения общности выбрана произвольно. Искомое решение находится разложением в ряд по степеням ε .

Поскольку для рассматриваемого случая факт сферичности включения не приводит к сколько-нибудь существенным упрощениям, сферические включения в данной главе не рассматриваются. Подстановка выражения (2.3) в (2.1) с последующим разложением по малым ε , интегрированием по x позволяет получить выражения для компонент тензора Эшелби в виде ряда. Хотя члены данного ряда содержат лишь элементарные функции (полиномы, корень и арктангенс), они все же слишком громоздки для того, чтобы быть рекомендованными к использованию на практике. Поэтому были рассмотрены частные случаи сильно сплюснутых и сильно вытянутых включений.

3.1. Асимптотическое разложение для дискообразного включения

Аналогично случаю кубической симметрии, компоненты тензора Эшелби могут быть представлены в виде разложения (1.7). Подстановка выражения (2.3) в (2.1) с последующим переходом $\rho \rightarrow 0$ и интегрированием дает следующие ненулевые компоненты:

$$S_{3311}^{(0,\varepsilon)} = S_{3322}^{(0,\varepsilon)} = \frac{g-f}{h} = \frac{\lambda(1+\beta\varepsilon) + \mu\varepsilon(\beta-\alpha)}{(\lambda+2\mu)\eta},$$

$$S_{3333}^{(0,\varepsilon)} = 2S_{1313}^{(0,\varepsilon)} = 2S_{2323}^{(0,\varepsilon)} = 1.$$

Для старших членов соответствующее выражение уже не интегрируется. Подобно случаю кубического кристалла, искомое разложение может быть получено интегрированием разложения по ε (1.1) с последующим разложением результата по ρ . Ненулевые компоненты разложения имеют вид:

$$S_{1111}^{(1,0)} = S_{2222}^{(1,0)} = \frac{(9\lambda+13\mu)\pi}{16(\lambda+2\mu)\sqrt{\eta}}, \quad S_{1122}^{(1,0)} = S_{2211}^{(1,0)} = \frac{(3\lambda-\mu)\pi}{16(\lambda+2\mu)\sqrt{\eta}},$$

$$S_{1133}^{(1,0)} = S_{2233}^{(1,0)} = -\frac{\pi\mu\sqrt{\eta}}{4(\lambda+2\mu)}, \quad S_{3311}^{(1,0)} = S_{3322}^{(1,0)} = -\frac{(3\lambda+\mu)\pi}{4(\lambda+2\mu)\eta^{3/2}},$$

$$S_{3333}^{(1,0)} = -\frac{\mu\pi}{2(\lambda+2\mu)\sqrt{\eta}}, \quad S_{2323}^{(1,0)} = S_{1313}^{(1,0)} = -\frac{(3\lambda+4\mu)\pi}{8(\lambda+2\mu)\sqrt{\eta}},$$

$$S_{1212}^{(1,0)} = \frac{\pi(3\lambda+7\mu)}{16(\lambda+2\mu)\sqrt{\eta}},$$

$$S_{1111}^{(1,1)} = S_{2222}^{(1,1)} = -\frac{\mu(\lambda+3\mu)(9\lambda+13\mu)\alpha + (\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)(3\lambda+7\mu)\beta}{64\mu(\lambda+2\mu)^2\sqrt{\eta}}\pi,$$

$$S_{1122}^{(1,1)} = S_{2211}^{(1,1)} = \frac{\mu(5\lambda^2+16\lambda\mu+19\mu^2)\alpha - (\lambda+\mu)(11\lambda^2+32\lambda\mu+13\mu^2)\beta}{64\mu(\lambda+2\mu)^2\sqrt{\eta}}\pi,$$

$$S_{1133}^{(1,1)} = S_{2233}^{(1,1)} = \frac{-\mu(3\lambda+5\mu)\alpha + (\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)\beta}{16(\lambda+2\mu)^2}\pi\sqrt{\eta},$$

$$S_{3311}^{(1,1)} = S_{3322}^{(1,1)} = \frac{\mu(\lambda^2+4\lambda\mu+15\mu^2)\alpha + (\lambda+\mu)(5\lambda^2-4\lambda\mu-17\mu^2)\beta}{16\mu(\lambda+2\mu)^2\eta^{3/2}}\pi,$$

$$S_{3333}^{(1,1)} = \frac{-\mu(3\lambda + 5\mu)\alpha + (\lambda + \mu)(\lambda + 3\mu)\beta}{8(\lambda + 2\mu)^2 \sqrt{\eta}} \pi,$$

$$S_{2323}^{(1,1)} = S_{1313}^{(1,1)} = \frac{\mu(2\lambda^2 + 10\lambda\mu + 11\mu^2)\alpha + (\lambda + \mu)(\lambda^2 + 2\lambda\mu - \mu^2)\beta}{16(\lambda + 2\mu)^2 \sqrt{\eta}} \pi,$$

$$S_{1212}^{(1,1)} = \frac{-\mu(7\lambda^2 + 28\lambda\mu + 29\mu^2)\alpha + (\lambda + \mu)^2(\lambda + 3\mu)\beta}{64\mu(\lambda + 2\mu)^2 \sqrt{\eta}} \pi.$$

Полученные асимптотические зависимости (для $\lambda = \mu$, $\alpha = \beta = 1$) и результаты численных расчетов ($\rho = 0,01$) представлены на рис. 4.

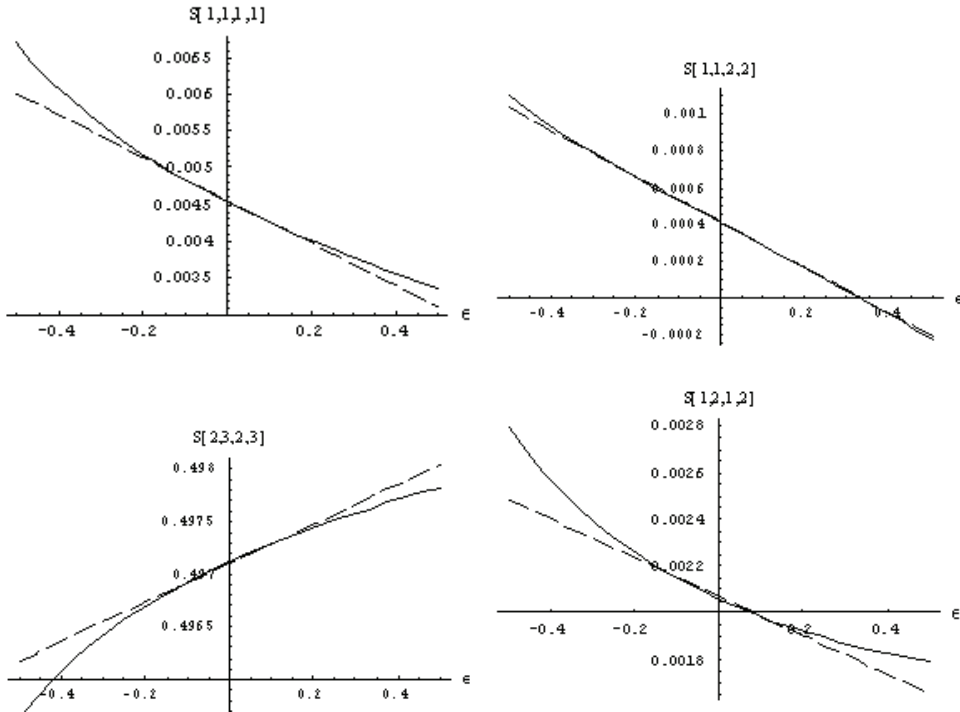


Рис. 4. Расчет компонент тензора Эшелби для дискообразного включения в гексагональном кристалле

3.2. Асимптотическое разложение для игольчатого включения

Аналогично предыдущим случаям компоненты тензора Эшелби могут быть представлены в виде разложения (1.8). Подстановка выра-

жения (2.3) в (1.2) с последующим переходом $r \rightarrow 0$ и интегрированием дает следующие ненулевые компоненты:

$$S_{1111}^{(0,\varepsilon)} = S_{2222}^{(0,\varepsilon)} = \frac{3}{4} - \frac{e}{4d} = \frac{3\lambda + 5\mu}{4(\lambda + 2\mu)}, \quad S_{1122}^{(0,\varepsilon)} = S_{2211}^{(0,\varepsilon)} = \frac{1}{4} - \frac{3e}{4d} = \frac{\lambda - \mu}{4(\lambda + 2\mu)},$$

$$S_{1133}^{(0,\varepsilon)} = S_{2233}^{(0,\varepsilon)} = \frac{g - f}{2d} = \frac{\lambda(1 + \beta\varepsilon) + \mu\varepsilon(\beta - \alpha)}{2(\lambda + 2\mu)}\eta,$$

$$S_{1313}^{(0,\varepsilon)} = S_{2323}^{(0,\varepsilon)} = 1/4; \quad S_{1212}^{(0,\varepsilon)} = \frac{1}{4} + \frac{e}{4d} = \frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda + 2\mu)}.$$

Искомое разложение по ρ получается интегрированием разложения по ε выражений (1.1) с последующим разложением результата по ρ . Ненулевые компоненты при этом имеют вид:

$$S_{1111}^{(2,0)}r^2 = S_{2222}^{(2,0)}r^2 = \frac{(-\lambda + \mu) + 4\mu \ln r \sqrt{\eta}/2}{8(\lambda + 2\mu)}r^2\eta,$$

$$S_{1122}^{(2,0)}r^2 = S_{2211}^{(2,0)}r^2 = -\frac{(\lambda + 5\mu) + 4\mu \ln r \sqrt{\eta}/2}{8(\lambda + 2\mu)}r^2\eta,$$

$$S_{1133}^{(2,0)}r^2 = S_{2233}^{(2,0)}r^2 = \frac{2(4\lambda + 3\mu) + 2(3\lambda + 2\mu) \ln r \sqrt{\eta}/2}{4(\lambda + 2\mu)}r^2\eta^2,$$

$$S_{3311}^{(2,0)}r^2 = S_{3322}^{(2,0)}r^2 = \frac{(\lambda + 3\mu) + 4\mu \ln r \sqrt{\eta}/2}{2(\lambda + 2\mu)}r^2,$$

$$S_{3333}^{(2,0)}r^2 = -\frac{(8\lambda - 5\mu) + (3\lambda + 4\mu) \ln r \sqrt{\eta}/2}{2(\lambda + 2\mu)}r^2\eta,$$

$$S_{1313}^{(2,0)}r^2 = S_{2323}^{(2,0)}r^2 = \frac{(5\lambda + 4\mu) + (3\lambda + 2\mu) \ln r \sqrt{\eta}/2}{4(\lambda + 2\mu)}r^2\eta,$$

$$S_{1212}^{(2,0)}r^2 = -\frac{(\lambda - 3\mu) - 4\mu \ln r \sqrt{\eta}/2}{8(\lambda + 2\mu)}r^2\eta,$$

$$S_{1111}^{(2,1)}r^2 = S_{2222}^{(2,1)}r^2 = \frac{(11\lambda + 17\mu)\mu\alpha - (\lambda + 8\mu)\lambda\beta}{8(\lambda + 2\mu)^2}r^2\eta +$$

$$+ \frac{\mu[(2\lambda + 3\mu)\alpha - (\lambda + \mu)\beta] \ln r \sqrt{\eta}/4}{2(\lambda + 2\mu)^2}r^2\eta,$$

$$S_{1122}^{(2,1)} r^2 = S_{2211}^{(2,1)} r^2 = -\frac{(40\lambda^2 + 77\lambda\mu + 55\mu^2)\mu\alpha + 6(\lambda + \mu)(4\lambda^2 - 31\lambda\mu - 17\mu^2)\beta}{24\mu(\lambda + 2\mu)^2} r^2 \eta -$$

$$-\frac{(2\lambda^2 + 4\lambda\mu + 3\mu^2)\alpha - (\lambda + \mu)(2\lambda + \mu)\beta}{4(\lambda + 2\mu)^2} r^2 \eta \ln \frac{r\sqrt{\eta}}{4},$$

$$S_{1133}^{(2,1)} r^2 = S_{2233}^{(2,1)} r^2 = -\frac{(25\lambda^2 + 44\lambda\mu + 34\mu^2)\mu\alpha - (\lambda + \mu)(25\lambda^2 + 14\lambda\mu + 26\mu^2)\beta}{12\mu(\lambda + 2\mu)^2} r^2 \eta^2 -$$

$$-\frac{\mu(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)\alpha + (\lambda + \mu)(\lambda^2 - 2\mu^2)\beta}{4\mu(\lambda + 2\mu)^2} r^2 \eta^2 \ln \frac{r\sqrt{\eta}}{4},$$

$$S_{3311}^{(2,1)} r^2 = S_{3322}^{(2,1)} r^2 = \frac{(10\lambda^2 + 23\lambda\mu + 10\mu^2)\mu\alpha + (\lambda + \mu)(\lambda^2 - 7\lambda\mu + 14\mu^2)\beta}{6\mu(\lambda + 2\mu)^2} r^2 +$$

$$+\frac{(\lambda^2 + 3\lambda\mu + 2\mu^2)(\alpha - \beta)}{2(\lambda + 2\mu)^2} r^2 \ln \frac{r\sqrt{\eta}}{4},$$

$$S_{3333}^{(2,1)} r^2 = \frac{(25\lambda^2 + 80\lambda\mu + 64\mu^2)\mu\alpha + (\lambda + \mu)(25\lambda^2 + 62\lambda\mu + 28\mu^2)\beta}{6\mu(\lambda + 2\mu)^2} r^2 +$$

$$+\frac{\mu(2\lambda + 3\mu)\alpha + (2\lambda^2 + 3\lambda\mu + \mu^2)\beta}{2\mu(\lambda + 2\mu)} r^2 \ln \frac{r\sqrt{\eta}}{4},$$

$$S_{1313}^{(2,1)} r^2 = -\frac{(35\lambda^2 + 124\lambda\mu + 116\mu^2)\mu\alpha + 2(\lambda + \mu)(13\lambda^2 + 26\lambda\mu + 4\mu^2)\beta}{24\mu(\lambda + 2\mu)^2} r^2 -$$

$$-\frac{2\mu(\lambda + 2\mu)\alpha + 2\lambda(\lambda + \mu)\beta}{2\mu(\lambda + 2\mu)} r^2 \ln \frac{r\sqrt{\eta}}{4},$$

$$S_{1212}^{(2,1)} = (S_{1111}^{(2,1)} - S_{1122}^{(2,1)})/2.$$

4. Обсуждение результатов

Асимптотические разложения независимых компонент тензора Эшелби по малому параметру проводились вблизи нулевого значения (что соответствует приближению изотропного тела для кубических и трансверсально-изотропному телу специального вида для гексагональных кристаллов), тогда как результаты вполне удовлетворительны и в интервале вплоть до параметра малости, равного единице (для ку-

бических кристаллов), и до 0,5 (в случае гексагональных кристаллов). Хотя для гексагонального кристалла (трансверсально-изотропного тела) выражения для компонент тензора Эшелби получены в замкнутом виде [3], они несколько громоздки. Кроме того, они не очень удобны для использования именно вблизи рассмотренного разложения. В этой связи может быть полезно полученное в работе представление.

На основании произведенных расчетов можно сделать вывод, что данный способ позволяет с высокой точностью и в достаточно широком диапазоне получить численные оценки искомым независимых компонент; при этом нет необходимости вычислять поверхностные либо повторные интегралы, как при традиционном подходе. На примере эллипсоидальных включений в форме сферы, диска и иголки показана эффективность рассмотренного метода.

Полученные результаты иллюстрируют возможность получения аналитических решений для задач теории упругости для некоторых частных подклассов анизотропных тел на базе решений аналогичных задач для изотропных тел, а также возможность решения тех же задач для анизотропных тел общего вида путем разложения решения по малому параметру, в качестве которого выступает относительное отклонение значений упругих модулей от упругих модулей, соответствующих выделенным подклассам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 22 и № 21, Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 08-02-01080-а).

Библиографический список

1. Eshelby J.D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems // Proc. R. Soc. London. – 1957. – A241. – P. 376–396.
2. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. – Martinus Nijhoff Publishers, 1987. – 588 p.
3. Withers P.J. The Deformation of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion in Transversely Isotropic Medium, and Its Relevance to Composite Materials // Philosophical Magazine. – 1989. – A59. – P. 759–781.

4. De Saint-Venant B., Mémoire sur la Distribution d'Elasticités // J. de Math., Pures et Appl. (Liouville). Ser. 2. – 1863. – Vol. 8. – P. 257–295, 353–430.

5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – Л.; М.: Физматгиз, 1950. – 300 с.

Получено 20.11.2010