УДК 681.53

**Т.С. Леготкина, Д.А. Шестаков**

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

*Рассмотрен метод идентификации систем автоматического управления статистическим методом. Произведено исследование на множестве различных систем автоматического управления и определены наилучшие условия для идентификации данным методом.*

В связи с растущими потребностями в автоматизации производственных процессов в самых разных областях остро встаёт проблема идентификации систем автоматического управления, так как для качественного управления системой необходимо иметь её точную математическую модель.

Далее будет рассмотрен статистический метод идентификации систем управления и проанализированы результаты проведенных исследований, а также будут сделаны выводы о качестве идентификации данным методом разного рода систем при использовании нескольких математических моделей различных порядков и при различных входных сигналах.

**Статистический метод идентификации.** Статистический метод идентификации позволяет определить импульсную-переходную характеристику системы, с помощью которой для любого входного сигнала можно определить и выходной сигнал.

Пусть на вход системы поступают полезный сигнал $u(t)$ и помеха $n(t)$, не коррелированная с полезным сигналом. Выходной сигнал системы $x(t)$ можно описать интегралом свертки:

$$x(t) = \int_0^\infty K_u(\tau)u(t-\tau)d\tau + \int_0^\infty K_n(\tau)n(t-\tau)d\tau,$$

где $K_u(\tau)$, $K_n(\tau)$ – импульсные переходные характеристики по полезному сигналу и сигналу помехи.

Умножив левую и правую части уравнения на $u(\tau)$, проинтегрируем их в указанном интервале. Отсюда следует, что, взаимная корреляционная функция полезной составляющей входного и выходного сигналов при условии $R_{nu}(\tau) = 0$ определяется как

$$R_{ux}(\tau) = \int_0^\infty R_u(t-\tau) K_u(t) dt .$$

Таким образом, для определения импульсной-переходной характеристики объекта требуется решить интегральное уравнение относительно $K_u(t)$.

Один из способов решения состоит в замене интеграла суммой и записи системы алгебраических уравнений:

$$R_{ux}(\tau) = \sum_0^n K_u(iT) R_u(\tau - iT) T,$$

где $R_u(\tau)$ и $R_{ux}(\tau)$ могут быть определены:

$$R_{ux}(k) = \frac{1}{M-k} \sum_{i=1}^{M-k} u_i x_{i+k} ,$$

$$R_u(k) = \frac{1}{M-k} \sum_{i=1}^{M-k} u_i u_{i+k}$$

при $k = 0, 1, \ldots, (M-1)$, если имеются достаточно длинные реализации $u(t)$ и $x(t)$.

Обозначим:

$$K_u(iT) = K_i; \quad \tau = T, 2T, \ldots, nT,$$

$$\frac{R_{ux}(\tau)}{T} = \sum_0^n K_i R_u(\tau - iT) .$$

Составим систему уравнений для $\tau = T, 2T, \ldots, nT$.

$$\begin{cases} \tau = T, & \dfrac{R_{ux}(T)}{T} = K_0 R_u(T) + K_0 R_u(0) + \ldots + K_n R_u\big((1-n)T\big), \\ \tau = 2T, & \dfrac{R_{ux}(2T)}{T} = K_0 R_u(2T) + K_0 R_u(T) + \ldots + K_n R_u\big((2-n)T\big), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau = nT, & \dfrac{R_{ux}(nT)}{T} = K_0 R_u(nT) + K_0 R_u\big((n-1)T\big) + \ldots + K_n R_u(0). \end{cases}$$

Эта система уравнений в матричной форме при условии $K_0 = 0$, имеет вид

$$AK = Q,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(-T) & \cdots & R_u((1-n)T) \\ R_u(T) & R_u(0) & \cdots & R_u((2-n)T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u((n-1)T) & R_u((n-2)T) & \cdots & R_u(0) \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}, \qquad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \qquad q_i = \frac{R_{ux}(iT)}{T}.$$

Таким образом, задача определения импульсной переходной характеристики сведена к решению симметричной СЛАУ [2].

Результатом решения СЛАУ является массив значений импульсной-переходной характеристики в дискретные моменты времени. Чтобы найти решение в виде функции, зависящей от времени, необходимо задаться математической моделью и определить её коэффициенты. В данном исследовании были использованы две модели. Это модели описаны уравнением второго и третьего порядка.

Математическая модель второго порядка, описывающая импульсную-переходную характеристику, в общем виде выглядит следующим образом:

$$g(t) = \frac{K}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 t\sqrt{1-\xi^2}\right).$$

Коэффициенты математической модели второго порядка можно найти с помощью графической идентификации. Определяются они следующим образом:

$$\omega = \frac{2\pi}{\theta},\ \omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}, \qquad R = \frac{A+}{A-}, \qquad \xi = \frac{\ln R}{\sqrt{\pi^2 - (\ln R)^2}},$$

где $A+$ – площадь под положительным полупериодом первого периода; $A-$ – площадь под отрицательным полупериодом первого периода, $\theta$ – длительность первого периода (рис. 1).

После определения ξ и $\omega_0$ коэффициент $K$ можно найти из уравнения для конкретного значения $g(t_i)$.

Уравнение модели третьего порядка выглядит следующим образом:

$$g(t) = A \cdot e^{-T_1 t} - A \cdot e^{-T_2 t} \cos(\omega \cdot t) + B \cdot e^{-T_2 t} \sin(\omega \cdot t) .$$

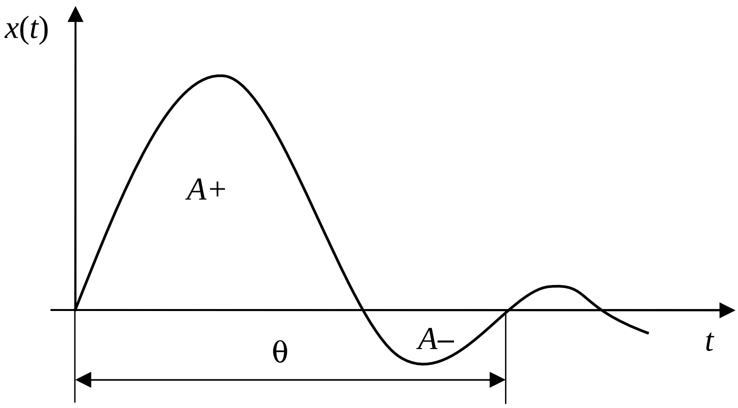


Рис. 1. Реакция системы второго порядка на импульсный сигнал

Для определения коэффициентов этого уравнения необходимо решить следующую систему:

$$\begin{cases} g_1(t_1) = Ae^{-T_1 t_1} - Ae^{-T_2 t_1} \cos \omega t_1 + Be^{-T_2 t_1} \sin \omega t_1, \\ g_2(t_2) = Ae^{-T_1 t_2} - Ae^{-T_2 t_2} \cos \omega t_2 + Be^{-T_2 t_2} \sin \omega t_2, \\ \qquad \qquad \ldots \\ g_n(t_n) = Ae^{-T_1 t_n} - Ae^{-T_2 t_n} \cos \omega t_n + Be^{-T_2 t_n} \sin \omega t_n. \end{cases}$$

Решая данную систему методом наименьших квадратов, мы получаем искомые коэффициенты. Точность решения методом наименьших квадратов зависит от начального приближения.

Точность идентификации можно оценить, сравнив выходной сигнал системы с выходным сигналом, найденным с помощью интеграла Дюамеля по импульсной-переходной характеристике [1]:

$$x(t) = \int_0^t g(t) u(t - \tau) d\tau .$$

Определив, как сильно отличаются эти два сигнала, можно сделать вывод о качестве идентификации.

В качестве примера рассмотрим применение статистического метода для идентификации системы автоматического управления, смоделированной пакетом прикладных программ *Identlab*. Пакет *Identlab* позволят сгенерировать выходной сигнал по выбранному входному воздействию для выбранного объекта. Результатом работы программы является файл, содержащий дискретные значения времени и соответствующие им значения входного и выходного сигналов.

Для проведения идентификации статистическим методом был разработан специализированный программный пакет, который по результатам моделирования пакета *Identlab* производит идентификацию указанным методом (рис. 2).

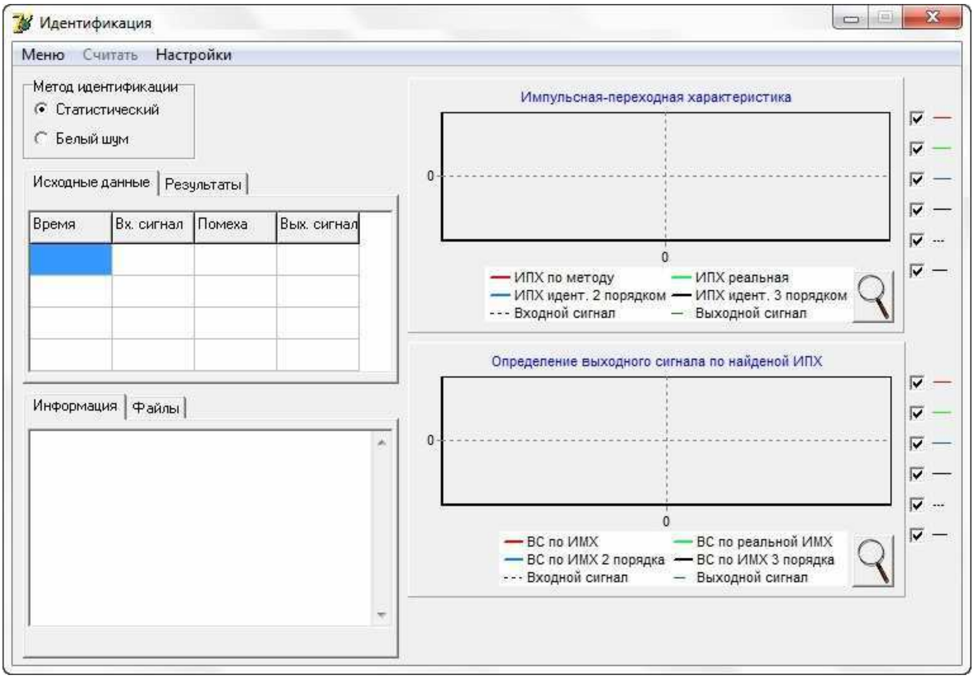


Рис. 2. Интерфейс разработанного программного пакета

Программный пакет позволяет производить идентификацию вторым и третьим порядком уравнений по заданному входному и выходному сигналу, а также для заданного входного воздействия определить выходной сигнал по найденной импульсной-переходной характеристике. Поиск коэффициентов уравнения третьего осуществляется методом наименьших квадратов в программном пакета *Mathcad 11*, подключаемом на время поиска коэффициентов.

По данным, сформированным программным пакетом *Identlab* (рис. 3), при помощи разработанного программного пакета были получены следующие результаты:

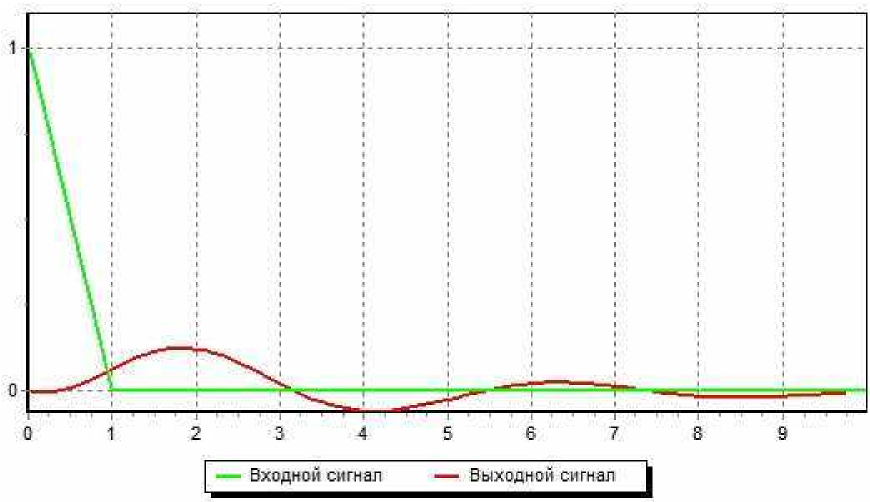


Рис. 3. Графики, построенные по данным, сгенерированным пакетом *Identlab*

1. Уравнение второго порядка:

$$g(t) = 0{,}43e^{-0{,}38t}\sin 1{,}24t\ .$$

2. Уравнение третьего порядка:

$$g(t) = 0{,}826e^{-1{,}701t} - 0{,}826e^{-0{,}619t}\cos(1{,}495t) + 0{,}074e^{-0{,}619t}\sin(1{,}495t).$$

Графики импульсных переходных характеристик, построенных по значениям, найденным статистическим методом, и определенных по полиномам второго и третьего порядка, представлены на рис. 4.

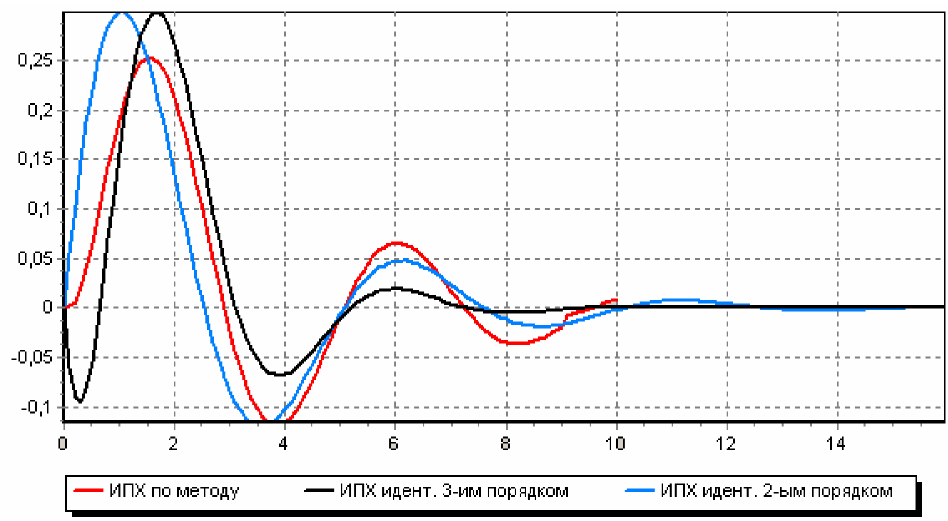


Рис. 4. Графики импульсных переходных характеристик

Из графика (см. рис. 4) видно, что характеристики, построенные по полиномам второго и третьего порядка, достаточно хорошо повторяют характеристику, полученную с помощью статистического метода. При подаче на вход системы ступенчатого сигнала на выходе получим следующую диаграмму (рис. 5).

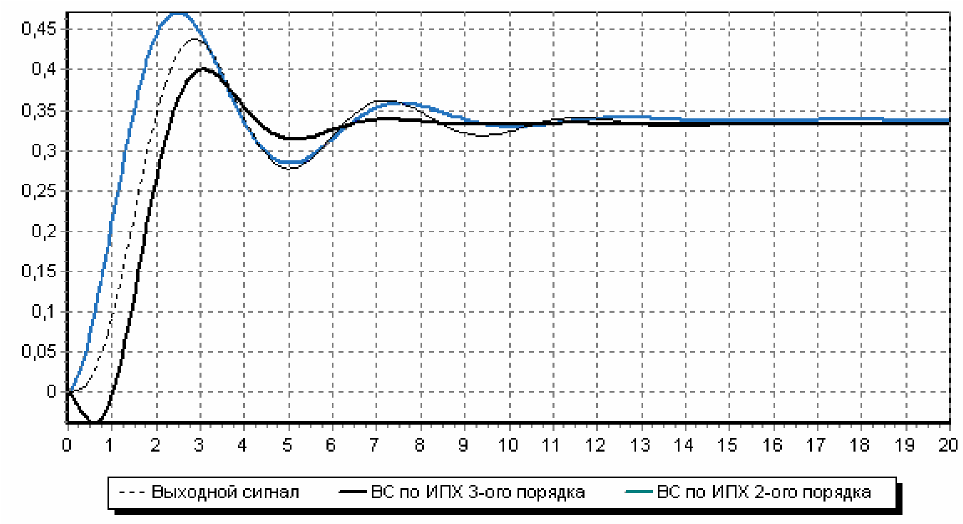


Рис. 5. Графики выходных сигналов

Из графика (см. рис. 5) видно, что выходные сигналы, восстановленные по полиномам второго и третьего порядков, близки с реальным выходным сигналом.

После проведения аналогичных исследований на других системах, смоделированных в пакете *Identlab*, были сделаны следующие выводы:

1. Статистический метод идентификации лучше всего идентифицирует апериодические системы и колебательные системы с умеренной колебательностью, хуже идентифицируются колебательные системы.

2. Поскольку в методе используются корреляционные функции, а их точность зависит от количества значений, используемых при их вычислении, то для повышения точности идентификации необходимо увеличивать количество входных значений. Достаточно хорошие результаты получаются при использовании 400 значений и более.

3. Значения импульсной переходной характеристики находятся из матрицы А. Для нахождения необходимого для идентификации числа значений достаточно взять только часть матрицы. Например,

для колебательных систем достаточно определить $m$ значений, описывающих первый период колебания, следовательно, можно взять только часть матрицы размерностью $m \times m$.

4. Было установлено, что наилучшие результаты работы статистического метода получаются при действующих на систему входных сигналах, имеющих вид прямой и экспоненты. При подаче на вход системы сигнала, имеющего вид синуса или косинуса, идентификация получается недостаточно точной.

5. Также было установлено, что идентификация статистическим методом проходит успешно при помехе до 3–5 %.

## Библиографический список

1. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1976. – С. 5–9.

2. Леготкина Т.С., Данилова С.А. Методы идентификации систем. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – С. 48–50.

Получено 19.09.2011