



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.02

УДК 539.376+539.4

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ДО РАЗРУШЕНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

И.А. Банщикова

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 17 июня 2018 г.  
Принята: 25 сентября 2018 г.  
Опубликована: 28 декабря 2018 г.

#### Ключевые слова:

вращающийся, растягиваемый диск, гиперболическая форма, неустановившаяся ползучесть, параметр поврежденности, длительная прочность, фронт разрушения

### АННОТАЦИЯ

Для вращающегося диска с гиперболической формой поверхности выполнен расчет напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения в условиях ползучести с учетом двухстадийности. Первая стадия это накопление повреждений и начало разрушения в некоторой области тела, где накопленные повреждения достигают критического значения. Вторая стадия это распространение фронта разрушения и полное разрушение тела. Предполагается, что фронт разрушения распространяется осесимметрично, разрушение имеет хрупкий характер. Метод расчета состоит в том, что решение задачи неустановившейся ползучести сводится к решению аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести материала. Чтобы получить истинное решение, необходимо известное решение установившейся ползучести умножить на некоторые функции координат и времени. Для нахождения этих функций получена соответствующая система уравнений. Исследована продолжительность стадий в зависимости от выбора варианта кинетической теории ползучести в формулировках Ю.Н. Работнова и Л.М. Качанова. Расчеты показали, что в зависимости от приложенной нагрузки, формы поверхности и размера внутреннего отверстия диска отношение длительности второй стадии к длительности первой стадии может составлять от десятых процента до нескольких десятков процентов. При уменьшении размера радиуса внутреннего отверстия диска продолжительность второй стадии может быть сопоставима с продолжительностью первой стадии. Во всех рассмотренных случаях получено: продолжительность первой стадии по модели Ю.Н. Работнова больше, чем по модели Л.М. Качанова; отношение длительности второй стадии к длительности первой стадии по модели Ю.Н. Работнова меньше, чем по модели Л.М. Качанова. Анализ движения фронта разрушения показал, что основное время второй стадии (порядка 75–85% по модели Л.М. Качанова и 85–90% по модели Ю.Н. Работнова) приходится на 20% рабочей части радиуса диска.

© ПНИПУ

© Банщикова Инна Анатольевна – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: [binna@ngs.ru](mailto:binna@ngs.ru), [iD 0000-0002-4045-7975](https://orcid.org/0000-0002-4045-7975)

Inna A. Banshchikova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: [binna@ngs.ru](mailto:binna@ngs.ru), [iD 0000-0002-4045-7975](https://orcid.org/0000-0002-4045-7975)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## THE STRESS-STRAIN STATE AND DURATION UNTIL FRACTURE OF ROTATING DISKS IN CREEP

I.A. Banshchikova

M.A. Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 17 June 2018  
Accepted: 25 September 2018  
Published: 28 December 2018

#### Keywords:

rotating, stretchable disk, hyperbolic shape, unsteady creep, damage parameter, long-term strength, fracture front

### ABSTRACT

The stress-strain state and duration until fracture are calculated for a two-stage behavior of a rotating disk with a hyperbolic surface shape under creep. The first stage is the damage accumulation and beginning of fracture in a certain body's area where the accumulated damage reaches a critical value. The second stage is the fracture front spreading and a complete destruction of the body. It is assumed that the fracture front propagates axisymmetrically, the fracture is brittle. The calculation method consists in the fact that the unsteady creep problem is reduced to a similar problem within the assumption of a steady material creep. In order to obtain a valid solution, it is necessary to multiply the known solution of the steady creep by some functions of the coordinates and time. To find these functions, we obtain the corresponding system of equations. We investigate the duration of stages depending on the creep kinetic theory version in the statement of Yu.N. Rabotnov and L.M. Kachanov. According to the calculations, the dependence of the second stage duration to the first stage duration can be from tenth to several tens of percent depending on the applied load, the surface shape and the size of the inner hole of the disc. With a decrease in the radius of the disc's inner hole, the second stage duration can be comparable with the first one. In all the studied cases the first stage duration in the Rabotnov's model is higher than on the Kachanov's one; the dependence of the second and the first stage duration in the Rabotnov's model is smaller than in the first stage of the Kachanov's model. The analysis of the fracture front movement showed that the main time of the second stage (about 75-85 % according to the Kachanov's model and 85-90 % according to the Rabotnov's model) is 20 % of the working part of the disk radius.

© PNRPU

### Введение

Оценка срока эксплуатационного ресурса элементов конструкций остается актуальной проблемой в энергетике. Одним из механизмов разрушения является ползучесть. По механизму ползучести могут разрушаться детали турбин, котлов, паропроводов, ректификационных колонн в условиях агрессивной среды. При диагностике степени разрушения необходимо проводить исследования таких физических макро- и микропараметров, как остаточная деформация, изменение плотности материала, изменение скорости ультразвуковых волн, появление микропористости, изменение дислокационной структуры. Применяемые в настоящее время неразрушающие методы дефектоскопии позволяют обнаруживать только макродефекты. При этом промежуток времени, в течение которого происходит развитие дефектов от зарождения трещин до разрушения, может быть значительно меньше планового межремонтного периода. Обычно нормативный срок эксплуатации элементов конструкций отождествляют с временем начала их разрушения. Очевидно, что это время не определяет долговечность. Конструкция от начала до полного разрушения может работать достаточно продолжительный период [1–5]. Определение дополнительного срока эксплуатации представляет собой важную задачу.

В [5] для выбора периодичности проведения контроля поврежденности рекомендуется использовать теоретические оценки с учетом распространения фронта разрушения на основе решений Качанова–Работнова [6]. При таком подходе временем начала разрушения считается момент, когда в некоторой области конструкции накопленные повреждения достигают критического значения – первая стадия скрытого разрушения. Вторая стадия это распространение фронта разрушения и полное разрушение тела. В [7, 8] обосновывается применимость такого подхода к расчету напряженно-деформированного состояния катализаторных трубок реформера, при этом распространение фронта разрушения связывается с развитием плотной сети параллельных трещин аналогичного размера, направленных вдоль радиуса и развивающихся от внутреннего к внешнему радиусу поперечного сечения трубок. В [9] рассматривается расчет гнутых труб под действием внутреннего давления с применением метода конечных элементов. Время разрушения в этом случае определяется достижением параметром поврежденности в большинстве точек Гаусса конечных элементов поперечного сечения значения, равного 0,99. Методы расчета движения линии фронта разрушения в зависимости от времени в рамках модели Ю.Н. Работнова обсуждаются также в [10]. В [11] представлен подробный обзор по анализу деформирования и разрушения при ползуче-

сти труб, с использованием различных моделей, в том числе модели Качанова–Работнова. Аналогичные подходы для расчета стержней и оболочек в условиях агрессивной среды рассмотрены Локощенко [12, 13]. Плоские вращающиеся диски и растягиваемые пластины исследуются в работах Хейхерста [14, 15], при этом для моделирования фронта разрушения используется подход, при котором параметр поврежденности ограничивается значением порядка 0,7. Применение метода конечных элементов для расчета плоского вращающегося диска до начала разрушения рассмотрено в [16]. В [17] моделируется разрушение плоского вращающегося диска с учетом двухстадийности в условиях ортотропного накопления повреждений. Отметим также, что исследование вращающихся дисков вплоть до начала разрушения в геометрически нелинейной постановке с использованием моделей Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова методами численной аппроксимации можно найти в работах [18–21]. Развитие методов нейросетевого моделирования для определения установившегося напряженного состояния в сплошном вращающемся диске рассмотрено в [22].

В настоящей работе с учетом двухстадийности проведено исследование напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения вращающегося диска с гиперболической формой поверхности в зависимости от выбора варианта кинетической теории ползучести. Сравниваются два подхода в формулировке Ю.Н. Работнова и Л.М. Качанова. Предполагается, что разрушение имеет хрупкий характер. Такой вид разрушения наблюдается для большей части деталей энергооборудования, работающих в условиях ползучести [1, 5]. В этом случае для расчета можно использовать приближенный численный метод [23], при котором упругие деформации не учитываются и решение задачи неустановившейся ползучести сводится к решению аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести материала. Чтобы получить истинное решение, необходимо известное решение установившейся ползучести умножить на некоторые функции координат и времени, для которых выписана система уравнений. Метод ранее был развит для кольцевых осесимметрично нагруженных пластин в условиях изгиба [24–26] и толстостенных сосудов (труб), нагруженных внутренним давлением [27, 28]. Для диска исследуется продолжительность стадий в зависимости от приложенных нагрузок, формы диска, а также от размера внутреннего отверстия.

## 1. Определяющие и разрешающие соотношения

Для описания физических свойств материала используется кинетическая теория Ю.Н. Работнова в виде

$$\eta_{ij} = \frac{W}{\sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{ij}}, \quad W = \frac{B_1 \sigma_e^{n+1}}{\varphi_1(\mu)}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (1)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{B_2 \sigma_{*e}^{g+1}}{\varphi(\mu)}, \quad \mu(x_k, 0) = 1, \quad \mu(x_k^*, t_*) = 0. \quad (2)$$

Здесь через  $B_1$ ,  $n$ ,  $B_2$ ,  $g$  обозначены константы ползучести и длительной прочности материала;  $\eta_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензоров скоростей деформаций ползучести и напряжений;  $W$  – удельная мощность рассеяния энергии,  $W = \sigma_{ij} \eta_{ij}$ ;  $\sigma_e$ ,  $\sigma_{*e}$  – эквивалентные напряжения, являющиеся однородными относительно напряжений функциями первой степени;  $\varphi$  и  $\varphi_1$  – функции, зависящие от параметра поврежденности  $\mu$ , вид которых будет конкретизирован ниже. В качестве эквивалентного напряжения  $\sigma_e$  могут быть интенсивность напряжений  $\sigma_i$  (критерий Мизеса), максимальное касательное напряжение (критерий Треска) и другие функции. В качестве эквивалентного напряжения  $\sigma_{*e}$  могут быть  $\sigma_i$  (критерий длительной прочности Каца), максимальное нормальное напряжение (критерий длительной прочности Джонсона) и другие критерии. Детальный обзор, посвященный критериям длительной прочности, можно найти в [29]. Среди последних можно отметить работы [30–32], в которых обсуждаются вопросы выбора критерия разрушения при ползучести в условиях многоосного напряженного состояния, в том числе при прогнозировании длительности до разрушения валов с выточками при растяжении. Выбор критерия разрушения в условиях сдвига при кручении сплошных валов и трубчатых образцов рассмотрен в [33, 34]. Параметр  $\mu$  в (1), (2) описывает с феноменологических позиций накопление повреждений в процессе ползучести материала. Время начала разрушения тела  $t_*$  (продолжительность первой стадии) вычисляется из условия достижения параметром в какой-то точке с координатами  $x_k^*$ ,  $k = 1, 2, 3$  своего критического значения, равного нулю. Отметим, что уравнения (1), (2) получены путем преобразования уравнений теории Ю.Н. Работнова, используемых в привычном виде путем замены  $w = 1 - \mu$ , аналогично тому, как это сделано в [26, 27] с целью упрощения вида математических выражений.

В зависимости от выбора функций и констант материала система (1), (2) может представлять различные варианты теории ползучести. Если  $\varphi_1(\mu) = \varphi(\mu)$ , то мы имеем вариант кинетической теории, из которой вытекают частные случаи: теория кратковременной ползучести [35]; энергетический вариант ползучести и длительной прочности [21, 36, 37]; теория упрочнения с различными ее модификациями [26, 38, 39]. Если  $\varphi_1(\mu) = 1$ , то получаем вариант кинетической теории ползучести в формулировке Л.М. Качанова [6]. Для сравнительного анализа подходов Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова в дальнейшем принимается, что  $\varphi_1(\mu) = \mu^{m_1}$ ,  $\varphi(\mu) = \mu^m$ ,  $0 \leq m_1 \leq m$ , где  $m, m_1$  – константы ползучести.

1.1. Разрешающие уравнения и время начала разрушения осесимметрично нагруженного вращающегося диска

Рассматривается равномерно нагретый тонкий диск, внутренний, наружный и текущий радиусы которого  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $r$ ,  $a_0 \leq r \leq b_0$ , толщина диска  $h = h(r)$ , причем  $h = h_0 \cdot r^{-k}$ ,  $k \geq 0$ ,  $h_0$  – константа (рис. 1). Ось  $z$  направлена перпендикулярно плоскости диска, а оси  $r$ ,  $\varphi$  как обычно [6].

Касательными напряжениями и напряжениями в направлении оси  $z$  пренебрегаем, т.е. предполагаем, что в диске реализуется плоское напряженное состояние ( $\sigma_z = \sigma_{rz} = 0$ ). Материал считаем несжимаемым  $\eta_\varphi + \eta_r + \eta_z = 0$  и из уравнений Коши имеем  $\eta_r = dv/dr$ ;  $\eta_\varphi = v/r$ . Здесь  $v(r, t)$  – радиальная скорость перемещения произвольной точки диска,  $\eta_\varphi, \eta_r, \eta_z$  – окружная, радиальная и осевая компоненты тензора скоростей деформаций ползучести.

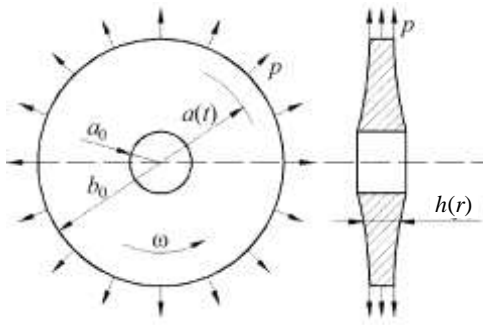


Рис. 1. Схема диска  
Fig. 1. Schematic image of the disk

Уравнение равновесия в любой момент времени при  $0 \leq t \leq t_*$

$$d(hr\sigma_r)/dr - h\sigma_\varphi + h\Omega^2 r^2 = 0. \quad (3)$$

Граничные условия на внутреннем и наружном радиусах диска:  $\sigma_r(a_0) = 0$ ,  $\sigma_r(b_0) = p$ , где  $p$  – равномерное растягивающее усилие у внешнего обода диска;  $\Omega^2 = \gamma\omega^2$ ,  $\gamma$  – плотность материала диска,  $\omega$  – его угловая скорость. Интегрируя уравнение (3) с учетом зависимости толщины диска от радиуса и граничных условий, получаем

$$\sigma_r(r, t) = \left( \frac{\Omega^2}{3-k} a_0^{3-k} + \int_{a_0}^r \sigma_\varphi r^{-k} dr \right) r^{k-1} - \frac{\Omega^2}{3-k} r^2, \quad (4)$$

$$\int_{a_0}^{b_0} \sigma_\varphi r^{-k} dr = P, \quad P = pb_0^{1-k} + \frac{\Omega^2}{3-k} (b_0^{3-k} - a_0^{3-k}). \quad (5)$$

Выберем в (1), (2) в качестве  $\sigma_e$  и  $\sigma_{*e}$  максимальное касательное напряжение и ограничимся случаем,

когда в каждой точке диска в любой момент времени вплоть до разрушения  $\sigma_\varphi > \sigma_r > \sigma_z = 0$ . Тогда  $\sigma_e = \sigma_{*e} = \sigma_\varphi / 2$  и система (1), (2) принимает вид

$$\eta_\varphi = \bar{B}_1 \sigma_\varphi^n / \mu^{m_1}, \quad \eta_r = 0, \quad (6)$$

$$\eta_z = -\bar{B}_1 \sigma_\varphi^n / \mu^{m_1}, \quad \bar{B}_1 = B_1 / 2^{n+1},$$

$$\mu^m d\mu = -\bar{B}_2 \sigma_\varphi^{g+1}, \quad \mu(r, 0) = 1, \quad (7)$$

$$\mu(r^*, t_*) = 0, \quad \bar{B}_2 = B_2 / 2^{g+1}.$$

Так как  $\eta_r = 0$ , то  $dv/dr = 0$ , и отсюда следует, что  $v(r, t)$  является функцией только времени, т.е.  $v = C(t)$ . Тогда

$$\eta_\varphi = C(t)/r, \quad \eta_r = 0, \quad \eta_z = -C(t)/r. \quad (8)$$

Учитывая (5), (6) и (8),

$$\sigma_\varphi(r, t) = \frac{P}{J_1} \frac{[\mu(r, t)]^{m_1/n}}{X(t)} r^{-1/n}, \quad (9)$$

где

$$J_1 = \int_{a_0}^{b_0} r^{-(k+1/n)} dr, \quad \left[ \frac{C(t)}{\bar{B}_1} \right]^{1/n} = \frac{P}{J_1} [X(t)]^{-1}. \quad (10)$$

Подставляя (9) в уравнение для параметра поврежденности (7) и в (5), получаем

$$\int_1^\mu [\mu(r, t)]^{(mm_1 - m_1(g+1))/n} d\mu =$$

$$= -[(m+1)t^0(r)]^{-1} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)/n} d\tau, \quad (11)$$

$$\int_{a_0}^{b_0} [\mu(r, t)]^{m_1/n} r^{-(k+1/n)} dr = J_1 X(t), \quad (12)$$

$$t^0(r) = \left[ (m+1)\bar{B}_2 (P/J_1)^{g+1} r^{-(g+1)/n} \right]^{-1}. \quad (13)$$

Таким образом, задача о расчете напряженно-деформируемого состояния диска и времени начала его разрушения свелась к решению системы уравнений (11), (12).

Аналогичные системы уравнений для кольцевых пластин, нагруженных осесимметричным моментом, и труб, находящихся под внутренним давлением, получены и исследуются в [25–28]. После интегрирования (11) имеем

$$\mu^{m_1/n} = \left[ 1 - \frac{\nu}{t^0(r)} \int_0^t X^{-(g+1)} d\tau \right]^\beta, \quad (14)$$

$$\text{где } \beta = \frac{m_1}{n + mn - m_1(g+1)}, \quad \nu = \frac{n + mn - m_1(g+1)}{n(m+1)}.$$

После подстановки (14) в (12) для определения  $X(t)$  получаем уравнение

$$\int_{a_0}^{b_0} \left[ 1 - \frac{\nu}{t^0(r)} \int_0^t X^{-(g+1)} d\tau \right]^\beta r^{-(k+1/n)} dr = J_1 X(t). \quad (15)$$

Начальные условия  $X(0) = 1$ .

В случае когда  $\beta = 1$ , решение системы (14), (15) можно получить в аналитическом виде

$$X(t) = (1 - t/\bar{t}^0)^{1/(g+2)}, \quad \bar{t}^0 = J_1 \int_{a_0}^{b_0} (r^{-(k+1/n)} / t^0(r)) dr,$$

$$[\mu(r, t)]^{m_1/n} = \left\{ 1 - (\bar{t}^0/t^0) \left[ 1 - (1 - t/\bar{t}^0)^{1/(g+2)} \right] \right\}, \quad (16)$$

$$t_* = \bar{t}^0 [1 - (1 - t_*^0/\bar{t}^0)^{g+2}].$$

Здесь  $t_*^0 = t^0(r^*)$  – время начала разрушения, определенное согласно (13). Если  $\beta \neq 1$ , то решение уравнения (15) можно получить численно.

После замены  $Y(t) = \int_0^t X^{-(g+1)} d\tau$  уравнение (15) перепишется в виде

$$\int_{a_0}^{b_0} \left[ 1 - \frac{\nu}{t^0(r)} Y(t) \right]^\beta r^{-(k+1/n)} dr = J_1 \left( \frac{dY(t)}{dt} \right)^{-1/(g+1)}. \quad (17)$$

Для решения последнего уравнения с начальными условиями  $Y(0) = 0$  можно применить любой из известных методов, предназначенных для решения дифференциальных уравнений, например Рунге–Кутты–Мерсона.

Решив (17), найдем  $Y(t)$  и соответственно  $X(t)$ , а затем из (14) –  $\mu(r, t)$ . Зная эти функции, вычисляем из (9)  $\sigma_\phi$ , из (4) –  $\sigma_r$ , а из (8), (10) находим  $\eta_\phi$  и  $\eta_r$ . Учитывая предположение  $\sigma_\phi > \sigma_r$ , напряжение  $\sigma_\phi(r, 0) = P \cdot r^{-1/n} / J_1$ , соответствующее решению в предположении установившейся ползучести материала, достигает максимального значения на внутренней стороне диска. Время начала разрушения диска определяем из условия  $\mu(r^*, t_*) = 0$ . Из (13), (14) следует, что разрушение начинается при  $r^* = a_0$ . В [28] рассмотрены условия, наложенные на константы материала, для того чтобы интеграл, стоящий в левой части равенства (11), имел смысл в случае  $\mu = 0$ .

Пусть  $m_1 = 0$ . Тогда согласно (14)  $\beta = 0$ ,  $\nu = 1$ , а система (1), (2) есть вариант кинетической теории ползучести в формулировке Л.М. Качанова [6]. Из (15) получаем, что  $X(t) = 1$ , а из (4), (8)–(10) следует, что напряженно-деформированное состояние является стационарным. Из (14) находим

$$\mu(r, t) = \left[ 1 - (t/t_*^0) (a_0/r)^{(g+1)/n} \right]^{1/(m+1)}, \quad (18)$$

$$t_*^0 = \left[ (m+1) \bar{B}_2 (P/J_1)^{g+1} a_0^{-(g+1)/n} \right]^{-1}.$$

Согласно (13)  $t_*^0 = t^0(a_0)$  представляет собой время начала разрушения диска и  $r^* = a_0$ .

## 1.2. Продолжительность движения фронта разрушения

Вычисление продолжительности движения фронта разрушения является одной из актуальных для практики задач. В зависимости от типа решаемой задачи (например, при учете температурного поля) и используемого уравнения накопления повреждений разрушение может начинаться на внешней поверхности конструкции или даже в некоторой внутренней точке. Применительно к рассматриваемой задаче имеем, что в момент времени  $t = t_*$  разрушается внутренняя поверхность диска. В дальнейшем фронт разрушения, граница которого представляет собой окружность радиусом  $r = a(t)$ , перемещается в сторону наружной поверхности диска  $r = b_0$  (см. рис. 1). Для  $a(t)$  выполняется условие  $a_0 < a(t) < b_0$ , причем  $a(t_*) = a_0$ ,  $a(t_{*f}) = b_0$ ,  $t_{*f}$  – время разрушения диска. Здесь и ниже индексом «f» будут помечаться соответствующие параметры и функции, относящиеся к фронту разрушения. В любой момент времени  $\tau > t_*$  величины  $J_1(\tau) = J_{1f}$  и  $P(\tau) = P_f$  вычисляются согласно (5), (10), (13) с заменой  $a_0$  на  $a(\tau)$ . Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\phi$  по-прежнему вычисляются по формулам (4) и (9). Выполняя те же преобразования, что и раньше, на момент времени  $t$  вместо (11), (12) получаем

$$\int_1^{\mu(r,t)} [\mu(r, \tau)]^{(mm-m_1(g+1))/n} d\mu =$$

$$= - \int_0^t [(m+1)t^0(r, \tau)]^{-1} [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau, \quad (19)$$

$$\int_{a(t)}^{b_0} [\mu(r, t)]^{m_1/n} r^{-(k+1/n)} dr = J_{1f}(t) X(t). \quad (20)$$

Интегрируя (19), будем иметь вместо (14)

$$\mu(r, t)^{m_1/n} = \left[ 1 - \nu \int_0^t [t^0(r, \tau)]^{-1} X^{-(g+1)} d\tau \right]^\beta.$$

На линии фронта  $r = a(t)$  имеем  $\mu(a(t), t) = 0$ , т.е. с учетом (13)

$$1 - \nu \int_0^t \left[ (m+1) \bar{B}_2 \left[ P_f(\tau) / J_{1f}(\tau) \right]^{g+1} a^{-(g+1)/n} \right] \times$$

$$\times [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau = 0. \quad (21)$$

Используя (21), для функции повреждения получаем

$$\mu(r, t)^{m_1/n} = \left[ 1 - (r/a(t))^{-(g+1)/n} \right]^\beta, \quad \text{если } a(t) < r < b_0, \quad (22)$$

и (20) приводится к виду

$$\int_{a(t)}^{b_0} \left[ 1 - (r/a(t))^{-(g+1)/n} \right]^\beta r^{-(k+1/n)} dr = J_{1f}(t) X(t). \quad (23)$$

Для получения уравнения движения фронта разрушения продифференцируем выражение (21) по  $t$ , применяя правило дифференцирования интеграла по параметру. В данном случае в роли параметра здесь выступает  $t$ . После ряда операций получаем

$$a^{-1+(g+1)/n} da/dt = \frac{nv(m+1)\bar{B}_2}{g+1} \left( \frac{P_f(t)}{J_{1f}(t)X(t)} \right)^{g+1}. \quad (24)$$

Дифференциальное уравнение (24), учитывая (23), можно привести к виду

$$\begin{aligned} & a^{-1+(g+1)/n} [P_f(a)]^{-(g+1)} \times \\ & \times \left( \int_{a(t)}^{b_0} \left[ 1 - (r/a(t))^{-(g+1)/n} \right]^\beta r^{-(k+1/n)} dr \right)^{g+1} da = \\ & = \left( \frac{nv(m+1)\bar{B}_2}{g+1} \right) dt, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $P_f(a) = pb_0^{1-k} + \frac{\Omega^2}{3-k} (b_0^{3-k} - a^{3-k})$ . Проинтегрировав (25), получаем уравнение для определения  $a(t)$  и продолжительность распространения фронта разрушения  $\Delta t_* = t_{*f} - t_*$ :

$$\begin{aligned} & \int_{a_0}^{a(t)} a^{-1+(g+1)/n} [P_f(a)]^{-(g+1)} \times \\ & \times \left( \int_{a(t)}^{b_0} \left[ 1 - (r/a(t))^{-(g+1)/n} \right]^\beta r^{-(k+1/n)} dr \right)^{g+1} da = \\ & = \left( \frac{nv(m+1)\bar{B}_2}{g+1} \right) t, \\ & \Delta t_* = \frac{g+1}{nv\bar{B}_2(m+1)} \int_{a_0}^{b_0} a^{-1+(g+1)/n} [P_f(a)]^{-(g+1)} \times \\ & \times \left( \int_{a(t)}^{b_0} \left[ 1 - (r/a(t))^{-(g+1)/n} \right]^\beta r^{-(k+1/n)} dr \right)^{g+1} da. \end{aligned}$$

При  $m_1 = 0$  для функции повреждения и продолжительности распространения фронта разрушения получаем

$$\mu(r, t) = \left[ 1 - (r/a(t))^{-(g+1)/n} \right]^{1/(1+m)}, \text{ если } a(t) < r < b_0,$$

$$\begin{aligned} \Delta t_* &= \frac{g+1}{nv\bar{B}_2(m+1)} \int_{a_0}^{b_0} a^{-1+(g+1)/n} [P_f(a)]^{-(g+1)} \times \\ & \times \left( n \frac{b_0^{1-k-1/n} - a^{1-k-1/n}}{n-nk-1} \right)^{g+1} da. \end{aligned}$$

## 2. Результаты и обсуждение

Исследуем влияние выбора варианта кинетической теории ползучести и геометрических размеров диска на продолжительность первой и второй стадий. Для вычислений используются следующие константы материала:  $B_1 = 3,5172 \cdot 10^{-15}$  МПа<sup>-n</sup>/ч,  $n = 6$ ,  $m = 14$ ,  $g = 4,75$ ,  $B_2 = 2,7563 \cdot 10^{-15}$  МПа<sup>-g</sup>/ч [26, 27].

На рис. 2 при  $m_1 = 10$  и на рис. 3 при  $m_1 = 0$  приведены результаты расчета по формулам (4), (9), (14) и (22) функции повреждения  $\mu$  и напряжений  $\sigma_\phi, \sigma_r$  в сечении  $a_0 \leq r \leq b_0$  на некоторые моменты времени. Размеры диска:  $a_0 = 0,025$  м,  $b_0 = 0,1$  м,  $k = 0,5$  ( $h(a_0)/h(b_0) = 2$ ). На наружном контуре диск нагружен растягивающим усилием  $p = 20$  МПа, для вращения принято  $\Omega = 70$  МПа<sup>1/2</sup>/м.

На рис. 2 линии 1–4 соответствуют стадии скрытого разрушения при  $t = 0; 0,5t_*; 0,85t_*; t_*$ , где  $t_* = 3,095 \cdot 10^4$  ч. Линии 5–7 на рис. 2 – достижение линией фронта на стадии его распространения значений  $a(t) = 0,04; 0,06; 0,08$  м, что соответствует моментам времени  $t = t_* + 0,907\Delta t_*; t_* + 0,997\Delta t_*; t_* + 0,9999\Delta t_*$ , где  $\Delta t_* = 2,814 \cdot 10^3$  ч.

Аналогично на рис. 3 (вариант теории ползучести в формулировке Л.М. Качанова  $m_1 = 0$ ) линии 1–4 (для напряжений совпадают) соответствуют  $t = 0; 0,5t_*; 0,85t_*; t_*$ , где  $t_* = 1,901 \cdot 10^4$  ч. Линии 5–7 на рис. 3 – достижение линией фронта значений  $a(t) = 0,04; 0,06; 0,08$  м, при  $t = t_* + 0,833\Delta t_*; t_* + 0,989\Delta t_*; t_* + 0,9998\Delta t_*$  соответственно,  $\Delta t_* = 6,09 \cdot 10^3$  ч. В этом случае перераспределение напряжений  $\sigma_\phi, \sigma_r$  вплоть до начала разрушения отсутствует, т.е. состояние стационарно, что согласуется с выводами, сделанными в [6, с. 170], при этом функция  $\mu(r, t)$  имеет вид подобный, изображенному на рис. 2, а.

В табл. 1–4 представлены результаты расчетов продолжительности первой стадии  $t_*^i$ , общее время двух стадий  $t_{*f}^i = t_*^i + \Delta t_*^i$ , а также отношение  $\Delta t_*^i / t_*^i$  в зависимости от  $a_0, k, \Omega$  и  $p$  ( $b_0 = 0,1$  м). Символ «i», равный 1, означает, что величины относятся к расчету в предположении кинетической теории Ю.Н. Работнова ( $m_1 = 10$ );  $i = 2$  – расчет с использованием теории Л.М. Качанова ( $m_1 = 0$ ).

Анализируя приведенные в табл. 1 результаты расчетов, полученные для двух дисков с плоской ( $b_0/a_0 = 4, k = 0$ ) и гиперболической формой поверхности ( $b_0/a_0 = 2, k = 0,5$ ), видим, что с увеличением

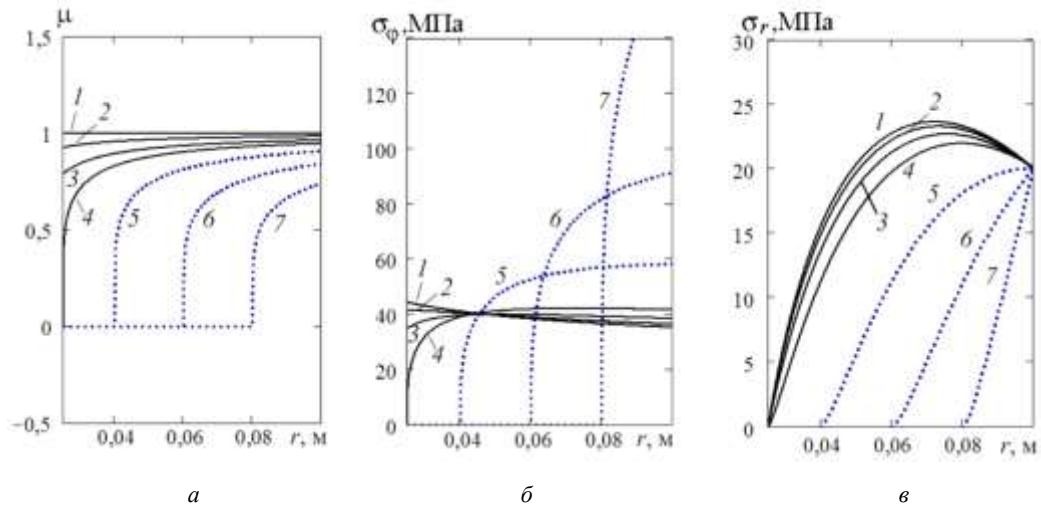


Рис. 2. Зависимости  $\mu$  (а);  $\sigma_\varphi$  (б) и  $\sigma_r$  (в) при  $m_1 = 10$ . Линии 1–4 соответствуют моментам времени  $t = 0; 0,5t_*; 0,85t_*; t_*$ . Линии 5–7 –  $t = t_* + 0,907\Delta t_*; t_* + 0,997\Delta t_*; t_* + 0,9999\Delta t_*$

Fig. 2. Dependences  $\mu$  (a),  $\sigma_\varphi$  (b) and  $\sigma_r$  (c) at  $m_1 = 10$ . Lines 1–4 correspond to the moments of time  $t = 0; 0,5t_*; 0,85t_*; t_*$ . Lines 5–7 –  $t = t_* + 0,907\Delta t_*; t_* + 0,997\Delta t_*; t_* + 0,9999\Delta t_*$

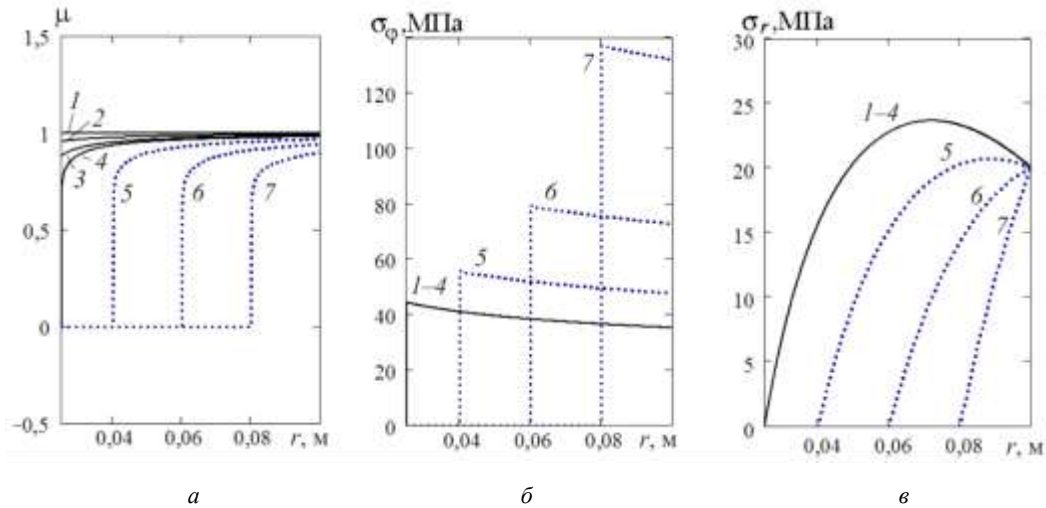


Рис. 3. Зависимости  $\mu$  (а);  $\sigma_\varphi$  (б) и  $\sigma_r$  (в) при  $m_1 = 0$ . Линии 1–4 совпадают для напряжений и соответствуют моментам времени  $t = 0; 0,5t_*; 0,85t_*; t_*$ . Линии 5–7 –  $t = t_* + 0,833\Delta t_*; t_* + 0,989\Delta t_*; t_* + 0,9998\Delta t_*$

Fig. 3. Dependences  $\mu$  (a),  $\sigma_\varphi$  (b) and  $\sigma_r$  (c) at  $m_1 = 0$ . Lines 1–4 coincide for stresses and correspond to instants of time  $t = 0; 0,5t_*; 0,85t_*; t_*$ . For lines 5–7 it is  $t = t_* + 0,833\Delta t_*; t_* + 0,989\Delta t_*; t_* + 0,9998\Delta t_*$

скорости вращения продолжительность стадий меняется на порядок, при этом  $\Delta t_*^i / t_*^i$  почти не изменяется. Для диска с гиперболической формой поверхности ( $b_0/a_0 = 2, k = 0,5$ ) расчет с использованием теории Ю.Н. Работнова показал, что вторая стадия составляет всего порядка 2 % продолжительности первой стадии, т.е. фактически отсутствует.

В табл. 2 приведены результаты расчета в зависимости от формы поверхности диска, т.е. в зависимости от константы  $k$ , когда  $b_0/a_0 = 2$  и 4. При  $b_0/a_0 = 4$  и  $k = 0; 0,5; 1; 1,5$  имеем отношение  $h(a_0)/h(b_0) = 1; 2; 4; 8$  соответственно, аналогично при  $b_0/a_0 = 2, k = 0; 0,5; 1,5$

отношение  $h(a_0)/h(b_0) = 1; 1,42; 2,83$ . В обоих случаях можно сделать вывод, что с увеличением  $k$  время  $t_*^i$  увеличивается на порядок, при этом  $\Delta t_*^i / t_*^i$  уменьшается. Следует отметить, что для диска  $b_0/a_0 = 4$  из табл. 2 при  $k \approx 1,5$  и более начинает нарушаться условие  $\sigma_\varphi > \sigma_r$  ( $a_0 < r < b_0$ ) при  $t = 0$ , т.е. в предположении установившейся ползучести материала окружное напряжение  $\sigma_r$  вблизи внешнего обода диска начинает превосходить тангенциальное  $\sigma_\varphi$ . С увеличением  $p$  и уменьшением  $\Omega$  эта разница растет. В этом случае более интенсивный процесс накопления повреждений и соответственно разрушения

может начаться с внешней стороны диска, и потребуется анализ с учетом иного характера напряженно-деформированного состояния. Необходимое условие выполнения неравенства  $\sigma_\phi > \sigma_r$  для плоского растягиваемого диска ( $\Omega = 0, k = 0$ ) приведено в [6, с. 170]:  $b_0 / a_0 < n^{n/(n-1)}$ . В нашем случае  $n = 6$  и при  $\Omega = 0, k = 0$  должно выполняться  $b_0 / a_0 < 8,58$ . При  $\Omega \neq 0, k \neq 0$  условие для констант, при которых  $\sigma_\phi > \sigma_r$ , можно получить исходя из (4), (9):

$$\frac{n}{n-nk-1} \left( 1 - \left( \frac{a_0}{r} \right)^{1-k-1/n} \right) + \frac{J_1}{P} \frac{\Omega^2}{3-k} (a_0^{3-k} r^{k-1} - r^2) r^{1/n} < 1$$

при  $a_0 \leq r \leq b_0$ .

Если  $\Omega = 0, k \neq 0$ , то должно выполняться

$$b_0 / a_0 < \left( \frac{n}{nk+1} \right)^{n/(n-nk-1)}$$

Таблица 1

Продолжительность стадий в зависимости от угловой скорости вращения,  $p = 20$  МПа

Table 1

The stages duration depending on the angular velocity of rotation,  $p = 20$  MPa

№	$b_0/a_0$	$k$	$\Omega$ , МПа <sup>1/2</sup> /М	$t_*^1$ , 10 <sup>3</sup> ч	$t_{*f}^1$ , 10 <sup>3</sup> ч	$\Delta t_*^1 / t_*^1$ , %	$t_*^2$ , 10 <sup>3</sup> ч	$t_{*f}^2$ , 10 <sup>3</sup> ч	$\Delta t_*^2 / t_*^2$ , %	$t_{*f}^2 / t_{*f}^1$ , %
1	4	0	0	266,60	298,45	11,9	156,85	217,03	38,4	73
2	4	0	30	120,77	135,42	12,1	71,05	98,97	39,3	73
3	4	0	70	8,97	10,10	12,7	5,28	7,49	42,0	74
4	2	0,5	0	79,32	80,57	1,57	59,59	66,61	11,8	83
5	2	0,5	30	35,84	36,43	1,64	26,92	30,27	12,4	83
6	2	0,5	70	2,64	2,69	1,84	1,99	2,27	14,5	84

Таблица 2

Продолжительность стадий в зависимости от формы поверхности диска,  $p = 20$  МПа

Table 2

Duration of the stages depending on the shape of the disk surface,  $p = 20$  MPa

№	$b_0/a_0$	$k$	$\Omega$ , МПа <sup>1/2</sup> /М	$t_*^1$ , 10 <sup>3</sup> ч	$t_{*f}^1$ , 10 <sup>3</sup> ч	$\Delta t_*^1 / t_*^1$ , %	$t_*^2$ , 10 <sup>3</sup> ч	$t_{*f}^2$ , 10 <sup>3</sup> ч	$\Delta t_*^2 / t_*^2$ , %	$t_{*f}^2 / t_{*f}^1$ , %
1	4	1,5	70	499,82	507,64	1,6	336,02	399,45	18,9	79
2	4	1	70	119,40	126,96	6,3	76,72	95,44	24,4	75
3	4	0,5	70	30,95	33,76	9,1	19,01	25,1	32,1	74
4	4	0	70	8,97	10,10	12,7	5,28	7,49	42,0	74
5	2	1,5	0	586,39	592,48	1,04	454,23	494,92	9,0	84
6	2	0,5	0	79,32	80,57	1,57	59,59	66,61	11,8	83
7	2	0	0	31,80	32,40	1,9	23,52	26,70	13,5	82

Таблица 3

Продолжительность стадий в зависимости от радиуса внутреннего отверстия,  $p = 20$  МПа

Table 3

Stages duration depending on the inner hole radius,  $p = 20$  MPa

№	$b_0/a_0$	$k$	$\Omega$ , МПа <sup>1/2</sup> /М	$t_*^1$ , 10 <sup>3</sup> ч	$t_{*f}^1$ , 10 <sup>3</sup> ч	$\Delta t_*^1 / t_*^1$ , %	$t_*^2$ , 10 <sup>3</sup> ч	$t_{*f}^2$ , 10 <sup>3</sup> ч	$\Delta t_*^2 / t_*^2$ , %	$t_{*f}^2 / t_{*f}^1$ , %
Плоский растягиваемый диск										
1	8,55	0	0	472,39	660,47	39,8	232,80	444,15	90,8	67
2	5	0	0	351,86	414,69	17,9	195,08	293,10	50,2	71
3	4	0	0	266,60	298,45	11,9	156,85	217,03	38,4	73
4	2	0	0	31,80	32,40	1,9	23,52	26,70	13,5	82
5	1,67	0	0	9,09	9,17	0,85	7,23	7,89	9,1	86
Вращающийся диск										
6	5	0,5	70	49,05	55,31	12,8	28,63	39,79	39,0	72
7	4	0,5	70	30,95	33,76	9,1	19,01	25,10	32,1	74
8	2	0,5	70	2,64	2,69	1,84	1,99	2,27	14,5	84



Продолжительность стадий в зависимости от растягивающего усилия  $p, \Omega = 0$

Table 4

Duration of stages depending on the tensile pressure  $p, \Omega = 0$

№	$b_0/a_0$	$k$	$p, \text{МПа}$	$t_*^1, 10^3 \text{ ч}$	$t_{*f}^1, 10^3 \text{ ч}$	$\Delta t_*^1 / t_*^1, \%$	$t_*^2, 10^3 \text{ ч}$	$t_{*f}^2, 10^3 \text{ ч}$	$\Delta t_*^2 / t_*^2, \%$	$t_{*f}^2 / t_{*f}^1, \%$
1	4	0	20	266,60	298,45	11,9	156,85	217,03	38,4	73
2	4	0	30	25,90	28,99	11,9	15,24	21,09	38,4	73
3	4	0	40	4,95	5,55	11,9	2,91	4,03	38,4	73

Из сравнения результатов расчета, приведенных в табл. 3 для плоского растягиваемого диска ( $b_0/a_0 = 4, k = 0$ ) и вращающегося диска с гиперболической формой поверхности ( $b_0/a_0 = 2, k = 0,5$ ), следует, что варьирование внутреннего радиуса существенно влияет на время начала разрушения  $t_*^i$  и на отношение  $\Delta t_*^i / t_*^i$ . Расчет по модели Л.М. Качанова показывает, что продолжительность второй стадии для плоского растягиваемого диска может быть сопоставима с продолжительностью первой скрытой стадии разрушения.

В табл. 4 для плоского растягиваемого диска ( $b_0/a_0 = 4, k = 0, \Omega = 0$ ) приведены результаты расчетов при варьировании растягивающего усилия  $p$ , приложенного к внешнему ободу диска. Как видно из таблицы, с увеличением  $p$  время  $t_*^i$  уменьшается на порядки, при этом отношение  $\Delta t_*^i / t_*^i$  не меняется.

Анализ данных таблиц показывает, что во всех случаях  $t_*^1 > t_*^2$ , при этом  $\Delta t_*^1 / t_*^1 < \Delta t_*^2 / t_*^2$ . Общее время продолжительности двух стадий при расчете по теории Ю.Н. Работнова больше, чем при расчете по теории Л.М. Качанова, отношение  $t_{*f}^2 / t_{*f}^1$  составляет 65–85%. Расчет по модели Качанова дает заниженную оценку времени разрушения. Эта модель не учитывает перераспределения напряжений на стадии скрытого разрушения [6]. В пользу теории, учитывающей перераспределение напряжений, свидетельствует характер распределения замеренных остаточных напряжений в охрупченном диске после эксперимента [40]. Однако величины  $\bar{t}^0, t_*^0$ , определяемые согласно (16), (18), могут быть полезны при получении оценок времени  $t_*$  снизу и сверху [41, 42], не прибегая к большому объему вычислений.

На рис. 4 для трех дисков № 1 табл. 3 (штриховые линии 1 и 2), № 7 табл. 3 (сплошные линии 3 и 4) и № 6 табл. 1 (пунктирные линии 5 и 6) изображено движение линии фронта разрушения в зависимости от времени в относительных координатах « $\tau - \delta$ », где  $\tau = t / \Delta t_*$ ,  $\delta = (a - a_0) / (b_0 - a_0)$ . Кривые 1, 3, 5, расположенные ниже, соответствуют расчету с использованием варианта теории ползучести в формулировке Л.М. Качанова. Верхние кривые 2, 4, 6 – расчет в предположении тео-

рии Ю.Н. Работнова. Основное время второй стадии порядка 75–85% по модели Л.М. Качанова и 85–90% по модели Ю.Н. Работнова приходится всего на 20% рабочей части радиуса диска ( $b_0 - a_0$ ).

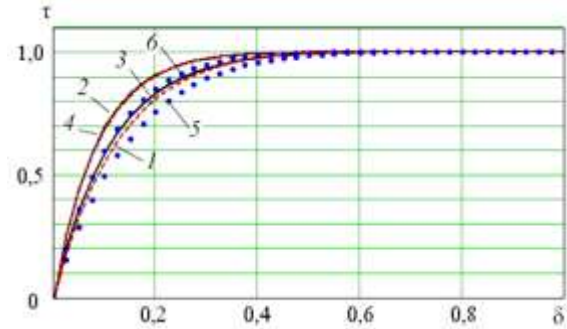


Рис. 4. Движения фронта разрушения в зависимости от времени в относительных координатах « $\tau - \delta$ »

Fig. 4. The fracture front motion depending on time in relative coordinates « $\tau - \delta$ »

### Заключение

Проведено исследование напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения в условиях ползучести тонкого вращающегося и растягиваемого диска с гиперболической формой поверхности методом, использованным ранее для расчета кольцевых пластин в условиях изгиба и труб под действием внутреннего давления. В основе уравнений, описывающих поведение материала, лежит кинетическая теория ползучести с учетом накопления повреждений. Предполагается, что на первой стадии деформирования происходит накопление повреждений и начало разрушения диска в области, где накопленные повреждения достигают критического значения. На второй стадии происходит распространение фронта разрушения и полное разрушение диска. Метод расчета состоит в том, что упругие деформации не учитываются и решение задачи неустановившейся ползучести сводится к решению аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести материала. Считается, что касательные напряжения и напряжения в направлении оси вращения диска малы, т.е. в диске приближенно реализуется плоское напряженное состояние. Чтобы получить истинное решение, необходимо известное решение установившейся ползучести умножить на некоторые функции координат и времени. Для нахождения этих функций выписана соответствующая система уравнений. Исследована про-

должительность стадий в зависимости от выбора варианта кинетической теории ползучести в формулировках Ю.Н. Работнова и Л.М. Качанова.

На основе полученных результатов сделаны выводы:

1. Отношение продолжительности второй стадии распространения фронта разрушения к продолжительности первой стадии скрытого разрушения, как и в случае труб, находящихся под действием внутреннего давления, может составлять от десятых процента до нескольких десятков процентов.

2. При уменьшении размера радиуса внутреннего отверстия диска продолжительность второй стадии может быть сопоставима с продолжительностью первой стадии, при этом общее время разрушения увеличивается на порядок.

3. Увеличение степени гиперболичности формы поверхности уменьшает отношение продолжительности второй стадии к продолжительности первой стадии.

4. Изменение нагрузки слабо влияет на отношение продолжительности второй стадии к продолжительности первой стадии, при этом сама длительность стадий может увеличиваться на порядок.

## Библиографический список

1. Резинских В.Ф. Исследование изломов: метод. рекомендации и атлас повреждений деталей проточной части турбин / В.Ф. Резинских, Э.С. Гинзбург, А.М. Клыпина, М.М. Меламед, А.В. Качанов, В.А. Харчевников / Мин-во топлива и энерг. Рос. Федерации; Всерос. теплотехн. науч.-исслед. ин-т (ВТИ). – М., 1993. – 131 с.
2. Страхов В.А. Контроль состояния металла гибов трубопроводов Ижевской ТЭЦ-2, работающих в условиях высоких температур / В.А. Страхов, В.М. Голиков, В.С. Пермикин, Л.С. Добрушкин, Т.И. Бархатова // Теплоэнергетика. – 1999. – № 8. – С. 76–78.
3. Добрушкин Л.С. Определение остаточного ресурса металла паропроводов высокого давления по результатам контроля микроповрежденности // Металл оборудования ТЭС. Проблемы и перспективы: сб. докл. конф.; ОАО «ВТИ». – М., 2006. – С. 113–115.
4. Пермикин В.С. О диагностике ползучести теплостойких сталей II. О расчете остаточного ресурса металла, эксплуатирующегося в условиях ползучести, по результатам контроля эксплуатационной микроповрежденности // Дефектоскопия. – 2011. – № 3. – С. 66–73. DOI: 10.1134/S1061830911030077
5. Гладштейн В.И. Диагностика микроповрежденности металла деталей энергооборудования, работающего в условиях ползучести: в 3 ч.; НТФ «Энергопрогресс», «Энергетик». – М., 2013.
6. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
7. Brear J.M., Williamson J. Creep damage and strain accumulation in steam-methane reformer catalyst tubes // Book of Abstracts. 14th International Conference on Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures (Creep2017), June 19–21, 2017. – Saint Petersburg, 2017. – P. 163–164.
8. Life assessment of steam reformer radiant catalyst tubes – the use of damage front propagation methods / J.M. Brear, J.M. Church, D.R. Humphrey, M.S. Zanjani // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2001. – Vol. 78. – No. 11–12. – P. 985–994. DOI:10.1016/S0308-0161(01)00113-2

5. Во всех рассмотренных случаях получено, что продолжительность первой стадии по модели Ю.Н. Работнова больше, чем по модели Л.М. Качанова, при этом отношение длительности второй стадии к длительности первой стадии по модели Ю.Н. Работнова меньше, чем по модели Л.М. Качанова.

6. Анализ движения фронта разрушения показал, что основное время второй стадии (порядка 75–85% по модели Л.М. Качанова и 85–90% по модели Ю.Н. Работнова) приходится всего на 20% рабочей части радиуса диска.

## Благодарности

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 16-08-00713-а).

## Acknowledgements

The work was partly supported by the Russian Science Foundation (Project ID 16-08-00713-a).

9. Finite element creep continuum damage mechanics analysis of pressurized pipe bends with ovality / T.H. Hyde, A. Yaghi, A.A. Becker, P.G. Earl // JSME International Journal. Ser. A. – 2002. – Vol. 45. – No.1. – P. 84–89. DOI:10.1299/jsmea.45.84
10. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести: пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 360 с.
11. Qinghua Meng, Zhenqing Wang. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review // Engineering Fracture Mechanics. Available online 20 August 2016. DOI:10.1016/j.engfracmech.2015.09.055
12. Локощенко А.М., Соколов А.В. Ползучесть и длительное разрушение цилиндрической оболочки под внешним давлением в присутствии агрессивной среды // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. – 2014. – № 1. – С. 65–76. DOI:10.3103/S0025654414010063
13. Локощенко А.М., Фомин Л.В. Влияние формы поперечного сечения растягиваемых стержней на длительную прочность при наличии агрессивной окружающей среды // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57, № 5. – С. 35–44. DOI:10.1134/S0021894416050059
14. Хейхерст Д.Р. Определение времени до разрушения для вращающихся дисков в условиях ползучести с использованием уравнений повреждаемости при двухосном напряженном состоянии // Тр. ASME. Сер. E. Прикладная механика. – 1973. – № 4. – С. 88–95. DOI:10.1115/1.3423187
15. Хейхерст Д.Р. Перераспределение напряжений и разрушение при ползучести равномерно растягиваемых тонких пластин с круглым отверстием // Тр. ASME. Сер. E. Прикладная механика. – 1973. – № 1. – С. 253–260. DOI:10.1115/1.3422934
16. Walczak J., Sieniawski J., Bathe K.J. On the analysis of creep stability and rupture // Computers & Structures. – 1983. – Vol. 17. – No. 5–6. – P. 783–792. DOI: 10.1016/0045-7949(83)90093-7

17. Skrzypek J.J., Ganczarski A. Modeling of material damage and failure of structures. Theory and applications. – Berlin et al.: Springer, 1999. – 326 p.
18. Соснин О.В., Горев В.В. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщ. 3. Ползучесть и длительная прочность вращающихся дисков // Проблемы прочности. – 1974. – № 3. – С. 3–6. DOI:10.1007/BF01527851
19. Szuwalski K., Ustrzycka A. Mathematical and numerical modelling of large creep deformations for annular rotating disks // Applied Mathematics and Mechanics. – 2015. – Vol. 36. – No. 11. – P. 1441–1448. DOI:10.1007/s10483-015-1994-7
20. Ustrzycka A., Szuwalski K. Annular rotating disks optimal with respect to mixed creep rupture // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – Warsaw, 2018. – Vol. 56. – No. 1. – P. 57–69. DOI:10.15632/jtam-pl.56.1.57
21. Соснин О.В., Горев В.В., Никитенко А.Ф. Энергетический вариант теории ползучести / Ин-т гидродинамики им. М.А. Лаврентьева. – Новосибирск, 1986. – 96 с.
22. Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Ползучесть и длительная прочность вращающихся дисков // Материалы XIX Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС 2015). – Алушта, 24–31 мая 2015 г. – М: Изд-во МАИ. – С. 292–294.
23. Banshchikova I.A., Lyubashevskaya I.V. The time of creep fracture of the axisymmetrically loaded structures // J. of Physics: Conf. Series. – 2017. – 894. – 012007. DOI:10.1088/1742-6596/894/1/012007
24. Заев В.А., Никитенко А.Ф. Расчет напряженно-деформированного состояния изгибаемых кольцевых пластин с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести // Прикладная механика и техническая физика. – 1993. – Т. 34, № 3. – С. 142–146. DOI:10.1007/BF00864797
25. Банщикова И.А., Никитенко А.Ф. Ползучесть осесимметрично нагруженных пластин с учетом накопления повреждений в их материале // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 5. – С. 156–168. DOI:10.1007/s10808-006-0111-3
26. Банщикова И.А. Напряженно-деформированное состояние и длительность до разрушения кольцевых пластин в условиях ползучести // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 359–368. DOI:10.7242/1999-6691/2015.8.4.30
27. Никитенко А.Ф., Любашевская И.В. Долговечность сосудов высокого давления // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 173–182. DOI:10.1007/s10808-007-0099-3
28. Никитенко А.Ф., Любашевская И.В. Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщ. 1. Напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретых толстостенных труб // Проблемы прочности. – 2005. – № 5. – С. 30–44. DOI:10.1007/s11223-005-0056-4
29. Локощенко А.М. Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. – 2012. – № 3. – С. 116–136. DOI:10.3103/S0025654412030090
30. Sunil Goyal K. Laha Creep life prediction of 9Cr–1Mo steel under multiaxial state of stress // Materials Science and Engineering: A. – 2014. – Vol. 615. – P. 348–360. DOI:10.1016/j.msea.2014.07.096
31. Effect of Multiaxiality on the Creep Rupture Properties of 316L(N) SS / S.R. Charde, M.L. Prasad, A.R. Ballal, D.R. Peshwe, M.D. Mathew, R.K. Paretkar // Procedia Engineering. – 2013. – Vol. 55. – P. 474–480. DOI:10.1016/j.proeng.2013.03.283
32. Multiaxial creep damage and lifetime evaluation under biaxial and triaxial stresses for type 304 stainless steel / Hiroki Kobayashi, Ryohei Ohki, Takamoto Itoh, Masao Sakane // Engineering Fracture Mechanics. – 2017. – Vol. 174. – P. 30–43. DOI:10.1016/j.engfracmech.2017.01.001
33. Hayhurst D.R., Leckie F. A. The effect of creep constitutive and damage relationships upon the rupture time of a solid circular torsion bar // J. Mech. Phys. Solids. – 1973. – Vol. 21. – P. 431–446. DOI:10.1016/0022-5096(73)90011-2
34. Локощенко А.М. Моделирование длительной прочности металлов при нестационарном сложном напряженном состоянии // Прикладная математика и механика. – 2018. – Т. 82, № 1. – С. 84–97.
35. Работнов Ю.Н., Милейко С.Т. Кратковременная ползучесть. – М.: Наука, 1970. – 222 с.
36. Описание процесса ползучести и разрушения современных конструкционных материалов с использованием кинетических уравнений в энергетической форме / Б.В. Горев, И.В. Любашевская, В.А. Панамарев, С.В. Иявойнен // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 132–144. DOI:10.1134/S0021894414060145
37. Горев Б.В., Банщикова И.А. К описанию ниспадающего участка кривой деформирования «напряжение-деформация» по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2008. – № 2 (17). – С. 110–117. DOI:10.14498/vsgtu621
38. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 1997. – 278 с.
39. Горев Б.В., Банщикова И.А. К описанию процесса ползучести и разрушения упрочняющихся материалов по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – № 2 (19). – С. 90–98. DOI:10.14498/vsgtu732
40. Работнов Ю.Н., Рабинович В.П. О прочности дисков в условиях ползучести // Изв. Акад. наук СССР. Отделение технических наук, Механика и машиностроение. – 1959. – № 4. – С. 93–100.
41. Никитенко А.Ф., Любашевская И.В. Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщ. 3. Верхняя и нижняя оценки времени начала разрушения неравномерно нагретых элементов конструкций // Проблемы прочности. – 2006. – № 1. – С. 32–40. DOI:10.1007/s11223-006-0014-9
42. Никитенко А.Ф. Нижняя и верхняя оценка времени начала разрушения элементов конструкций // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42, № 1. – С. 164–169. DOI:10.1023/A:1018881216849

## References

1. Rezinskih V.F., Ginzburg E.S., Klypina A.M., Melamed M.M., Kachanov A.V., Harchevnikov V.A. Issledovanie izlomov. Metodicheskie rekomendacii i atlas povrezhdenij detalej

prochnoj chasti turbin [The study of fractures. Guidelines and Atlas of damages of details of a flowing part of turbines]. Moscow,

Vserossiisk. teplotekhnich. nauch.-issled. in-t (VTI) – All-Russia thermal engineering institute, 1993, 131 p.

2. Strahov V.A., Golikov V.M., Permikin V.S., Dobrushkin L.S., Barhatova T.I. Kontrol' sostoyaniya metalla gibov truboprovodov Izhevskoj TEC-2, rabotayushchih v usloviyah vysokih temperatur [Control of a metal condition of bends of pipelines of the Izhevsk Thermal Electric Center – 2 working in high temperatures]. *Teploenergetika – Thermal Engineering*, 1999, no.8, pp. 76-78.

3. Dobrushkin L.S. Opredelenie ostatochnogo resursa metalla paroprovodov vysokogo davleniya po rezul'tatam kontrolya mikropovrezhdenosti [Determination of residual resource of metal of high-pressure steam pipeline according to the results of monitoring of micro-damages]. *Sbornik dokladov konferencii «Metall oborudovaniya TES. Problemy i perspektivy» Moscow, Proc. of conf. «Metal equipment of Thermal Power Station. Problems and prospects»*. All-Russia Thermal Engineering Institute, 2006, pp. 113-115.

4. Permikin V.S. Diagnostics of creep in heat-resistant steels II. Calculation of residual life of metal that functions under creep conditions based on the results of testing for operational micro-damage. *Russian Journal of nondestructive Testing*. 2011. vol. 47, no. 3, pp. 202-208. DOI: 10.1134/S1061830911030077

5. Gladshitejn V.I. Diagnostika mikropovrezhdenosti metalla detalej energooborudovaniya, rabotayushchego v usloviyah polzuchesti [Diagnostics of micro-damage of metal parts of power equipment operating under creep conditions *In 3 parts.*]. *Moscow, Scientific and Technical Firm «Energoprogress», «Energetik», 2013.*

6. Kachanov L.M. Osnovy mekhaniki razrusheniya [Fundamentals of fracture mechanics]. *Moscow, Nauka*, 1974, 312 p.

7. Brear J. M., Williamson J. Creep damage and strain accumulation in steam-methane reformer catalyst tubes. *Saint Petersburg, Book of Abstracts. 14th International Conference on Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures (Creep 2017)*, June 19-21, 2017; pp. 163-164.

8. Brear J.M., Church J.M., Humphrey D.R., Zanjani M.S. Life assessment of steam reformer radiant catalyst tubes – the use of damage front propagation methods. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2001, vol. 78, no. 11-12, pp. 985-994. DOI:10.1016/S0308-0161(01)00113-2

9. Hyde T.H., Yaghi A., Becker A. A., Earl P.G. Finite element creep continuum damage mechanics analysis of pressurized pipe bends with ovality. *JSME International Journal. Ser. A.*, 2002, vol. 45, no.1, pp. 84-89. DOI:10.1299/jsmea.45.84

10. Boyle J.T., Spence J. Stress Analysis for Creep. *London, Butterworths*, 1983.

11. Qinghua Meng, Zhenqing Wang. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review. *Engineering Fracture Mechanics*. Available online 20 August 2016 DOI:10.1016/j.engfracmech.2015.09.055

12. Lokoshchenko A.M., Sokolov A.V. Creep and long-time fracture of a cylindrical shell under external pressure in the presence of an aggressive medium. *Mechanics of Solids*. 2014, vol. 49, no. 1, pp. 49-58. DOI:10.3103/S0025654414010063

13. Lokoshchenko A.M., Fomin L.V. Influence of the cross-sectional shape of tensile bars on their creep rupture strength in a corrosive medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no.5, pp. 792-800. DOI:10.1134/S0021894416050059

14. Hayhurst D.R. The prediction of creep-rupture times of rotating disks using biaxial damage relationships. *Trans. ASME*,

*Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1973, vol. 40, no. 4, pp. 915-920. DOI:10.1115/1.3423187

15. Hayhurst D.R. Stress redistribution and rupture due to creep in a uniformly stretched thin plate containing a circular hole. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1973, vol. 40, no. 1, pp. 244-250. DOI:10.1115/1.3422934

16. Walczak J., Sieniawski J., Bathe K-J. On the analysis of creep stability and rupture. *Computers & Structures*, 1983, vol. 17, no. 5-6. pp.783-792. DOI:10.1016/0045-7949(83)90093-7

17. Skrzypek J.J., Ganczarski A. Modeling of material damage and failure of structures. Theory and applications. *Berlin et al., Springer*, 1999, 326 p.

18. Sosnin O.V., Gorev B.V. Energy variant of the theory of creep and long-term strength report 3. Creep and long-term strength of rotated discs. *Strength of Materials*. 1974, vol. 6, no. 3, pp. 265-270. DOI:10.1007/BF01527851

19. Szuwalski K., Ustrzycka A. Mathematical and numerical modelling of large creep deformations for annular rotating disks. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 36, no. 11, pp. 1441-1448. DOI:10.1007/s10483-015-1994-7

20. Ustrzycka A., Szuwalski K. Annular rotating disks optimal with respect to mixed creep rupture. *Warsaw, Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, vol. 56, no. 1, pp. 57-69. DOI:10.15632/jtam-pl.56.1.57

21. Sosnin O.V., Gorev B.V., Nikitenko A.F. *Energeticheskii variant teorii polzuchesti* [Energy Variant of Creep Theory]. *Novosibirsk, Lavrent'ev Institute of Hydrodynamics*, 1986, 96 p.

22. Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Polzuchest' i dlitel'naia prochnost' vrashchayushchikhsia diskov [Creep and Long-lasting Strength of Rotating Disks]. *Materialy XIX Mezhdunarodnoi konferencii po vychislitel'noi mekhanike i sovremennym prikladnym programmnyim sistemam (VMSPPS 2015) – Proceedings of the XIX International Conference on Computational Mechanics and Contemporary Applied Program Systems*. Alushta, May 24-31, 2015, MAI, Moscow, pp. 292-294.

23. Banshchikova I.A., Lyubashevskaya I.V. The time of creep fracture of the axisymmetrically loaded structures. *J. of Physics: Conf. Series*, 2017, 894, 012007. DOI:10.1088/1742-6596/894/1/012007

24. ZaeV V.A., Nikitenko A.F. Calculation of the stress-strain state of bent annular plates taking account of material damage during creep. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1993, vol. 34, no. 3, pp. 423-426. DOI:10.1007/BF00864797

25. Banshchikova I.A., Nikitenko A.F. Creep of axisymmetrically loaded plates with allowance for damage accumulation in their material. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2006, vol. 47, iss. 5, pp. 747-756. DOI:10.1007/s10808-006-0111-3

26. Banshchikova I. A. The stress-strain state and duration to fracture of ring plates under creep conditions *Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 359-368. DOI:10.7242/1999-6691/2015.8.4.30

27. Nikitenko A.F., Lyubashevskaya I.V. Service live of pressurized vessels. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 766-773. DOI:10.1007/s10808-007-0099-3

28. Nikitenko A.F., Lyubashevskaya I.V. Kinetic theory of creep and creep-rupture strength analysis of structural components. Part 1. Stress-strain state in nonuniformly heated thick-walled pipes. *Strength of materials*, 2005, vol. 37, Iss. 5, pp. 460-470. DOI:10.1007/s11223-005-0056-4

29. Lokoshchenko A.M. Long-term strength of metals in complex stress state (a survey). *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 357-372. DOI:10.3103/S0025654412030090
30. Sunil Goyal K. Laha Creep life prediction of 9Cr-1Mo steel under multiaxial state of stress. *Materials Science and Engineering: A*, 2014, vol. 615, pp. 348-360. DOI:10.1016/j.msea.2014.07.096
31. S.R. Charde, M.L. Prasad, A.R. Ballal, D.R. Peshwe M.D. Mathew, R.K. Paretkar Effect of Multiaxiality on the Creep Rupture Properties of 316L(N) SS. *Procedia Engineering*, 2013, vol. 55, pp. 474-480. DOI:10.1016/j.proeng.2013.03.283
32. Hiroki Kobayashi, Ryohei Ohki, Takamoto Itoh, Masao Sakane Multiaxial creep damage and lifetime evaluation under biaxial and triaxial stresses for type 304 stainless steel. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, vol. 174, pp. 30-43. DOI:10.1016/j.engfracmech.2017.01.001
33. Hayhurst D.R., Leckie F.A. The effect of creep constitutive and damage relationships upon the rupture time of a solid circular torsion bar. *J. Mech. Phys. Solids.*, 1973. vol. 21, p. 431-446. DOI:10.1016/0022-5096(73)90011-2
34. Lokoshchenko A.M. Modelirovanie dlitel'noi prochnosti metallov pri nestatsionarnom slozhnom napriazhenom sostoianii [Simulation of the long-term strength of metals under a non-stationary complex stress state]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 2018, vol.82, no. 1, pp. 84-97.
35. Rabotnov Yu.N., Milejko S.T. Kratkovremennaya polzuchest [Short-term creep]. *Moscow, Nauka*, 1970, 222 p.
36. Gorev B.V., Lyubashevskaya I.V., Panamarev V.A., Iyavoyne S. V. Description of creep and fracture of modern construction materials using kinetic equations in energy form. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014, vol.55, no. 6, pp. 1020-1030. DOI:10.1134/S0021894414060145
37. Gorev B.V., Banshchikova I.A. To the Description of Softening Stage of Stress-Strain Diagram with Scalar Damage Parameter Kinetic Equations, *Vestnik Sam GTU. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008, no. 2(17), pp. 110-117. DOI:10.14498/vsgtu621
38. Nikitenko A.F. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallicheskih materialov* [Creep and long-term strength of metal materials]. *Novosibirsk, NGASU Publ.*, 1997, 278 p.
39. Gorev B.V., Banshchikova I.A. To Description of Creep Process and Fracture of Hardening Materials According to Kinetic Equations with Scalar Damage Parameter, *Vestnik SamGTU. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009, no. 2(19), pp. 90-98. DOI:10.14498/vsgtu732
40. Rabotnov Iu.N., Rabinovich V.P. O prochnosti diskov v usloviakh polzuchesti [The strength of disks in creep conditions ] *Izvestia Akademii nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskikh nauk, Mekhanika i mashinostroenie – proceedings of the USSR Academy of Sciences, Department of technical Sciences, Mechanics and mechanical engineering*, 1959, no. 4, pp. 93-100.
41. Nikitenko A.F., Lyubashevskaya I.V. Kinetic theory of creep and creep-rupture strength analysis of structural components. Part 3. Upper and lower bounds for rupture onset time for non-uniformly heated structural components. *Strength of Materials*, 2006, vol. 38, no. 1, pp. 20-26. DOI:10.1007/s11223-006-0014-9
42. Nikitenko A.F. Lower and upper estimates of the rupture time for structural elements. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2001, vol. 42, no. 1, pp. 146-151. DOI:10.1023/A:1018881216849