

**Н.А. Труфанов, Е.В. Куимова, А.В. Путилова**

Пермский государственный технический университет

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КВАЗИКОНСТАНТНЫХ  
ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТИЧНЫМИ АППРОКСИМАЦИЯМИ  
ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ  
ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ОРГАНОПЛАСТИКА**

Рассматривается проблема решения многооператорной задачи линейной теории вязкоупругости применительно к проблеме прогнозирования эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного композиционного материала с вязкоупругими компонентами. Применяется приближенный метод квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями. Использование частичных аппроксимаций в методе квазиконстантных операторов позволяет уменьшить погрешность метода, вносимую оператором с большим показателем квазиконстантности. По результатам расчетов показано, что однонаправленный органопластик проявляет терморологически простое поведение в отношении каждой отдельной компоненты тензора эффективных характеристик, при этом функция температурно-временной редукции для обобщенной функции продольной релаксации органопластика практически совпадает с функцией для органических волокон, а функции температурно-временной редукции для остальных обобщенных характеристик практически совпадают с функцией связующего.

**Ключевые слова:** термовязкоупругость, эффективные свойства, однонаправленный композиционный материал, обобщенные кривые релаксации, функции температурно-временного сдвига.

### **Введение**

Органопластики находят широкое применение в авто-, судо-, машиностроении, авиа- и космической технике, радиоэлектронике, химическом машиностроении, производстве спортивного инвентаря и других отраслях. Основу органопластиков составляют армирующие органические волокна, объединенные полимерной матрицей. Одной из основных задач механики композиционных материалов является определение механических характеристик композита по свойствам его компонентов. В основе методов расчета и проектирования композитов, армированных органическими волокнами, лежат механические характеристики однонаправленно армированного слоя, которые требуется определить экспериментально или расчетным путем. Механическое

поведение органопластиков значительно зависит от времени, что обусловлено ярко выраженными вязкоупругими свойствами полимерных связующих и волокон.

Проблеме прогнозирования вязкоупругих характеристик однонаправленных волокнистых ПКМ по известным вязкоупругим свойствам волокон и связующего уделено значительное число работ [1–5]. В общем случае из независимых экспериментов должны быть известны все вязкоупругие характеристики волокон и связующего. Из наиболее распространенных волокон существенные деформации ползучести проявляют органические волокна. Органическое волокно обладает трансверсальной изотропией вязкоупругих свойств, и для него требуется определение пяти независимых функций ползучести. Однако на практике удается найти только характеристику продольной ползучести [3, 6], а определение трансверсальных характеристик встречает, в силу особенностей строения волокна, значительные трудности и производится в ряде работ косвенным способом [7] по найденным из эксперимента свойствам однонаправленного композита и известным свойствам связующего, или данные характеристики считаются упругими [2].

С математической точки зрения решение задачи прогнозирования вязкоупругих свойств однонаправленного композита осложнено наличием в постановке задачи вязкоупругости нескольких независимых вязкоупругих операторов, характеризующих свойства волокна и связующего, что делает неприменимыми традиционные методы решения краевых задач вязкоупругости, ориентированные на наличие одного оператора [5, 9, 10]. В случае если в качестве наполнителя используются органические волокна, задача осложняется присутствием вязкоупругих операторов, определяющих свойства волокна. Для решения этой задачи в работе предложен вариант метода квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями [9, 13]. Известно, что свойства полимерных композитов существенно зависят от температуры [3, 4, 11, 14, 15]. Экспериментальные исследования свойств компонентов композита в широком температурном диапазоне приведены в работах [3, 8, 11, 16]. Во многих работах показано соблюдение принципа температурно-временной аналогии для композита и его компонентов [3, 11, 16, 17, 18], однако при решении задачи термовязкоупругости для органопластика возникает ситуация, когда функции температурно-временной редукции компонент композита значительно

различаются [12, 18]. В связи с этим возникает проблема проверки гипотезы о термореологически простом поведении композита в целом и определения функции температурно-временной редукции композита. В работе приведены результаты прогнозирования термовязкоупругих свойств органопластика в широком температурном диапазоне, в том числе и функции температурно-временного сдвига, построенные на основе известных функций температурно-временного сдвига компонентов.

## 1. Общая постановка задачи термовязкоупругости

Рассматриваются однонаправленно армированные композиционные материалы, волокна которых являются вязкоупругими моноотропными (органическое волокно) материалами, а связующее является изотропным материалом, обладающим вязкоупругими свойствами (например, эпоксидное связующее ЭДТ-10).

Общая постановка краевой задачи теории термовязкоупругости для тела, занимающего область  $V \equiv V^B \cup V^C$  с границей  $S$ , где  $V^B$  – область, принадлежащая волокну,  $V^C$  – область принадлежащая связующему, включает в себя для  $t > 0$ :

уравнения равновесия

$$\operatorname{div} \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (1.1)$$

геометрические соотношения теории малых деформаций

$$2\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (1.2)$$

граничные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad (1.3)$$

$$\hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma. \quad (1.4)$$

Для замыкания системы уравнений (1.1)–(1.4) необходимо записать определяющие соотношения. Для описания поведения изотропного связующего воспользуемся линейной теорией термовязкоупругости с учетом объемной релаксации и гипотезой о термореологически простом поведении:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}, t) &= R_B^{c*} \left( \theta(\mathbf{x}, t) - 3\alpha^c (T(\mathbf{x}, t) - T_H^c) \right) = \\ &= \int_0^t R_B^c (t_1' - \tau_1') d \left( \theta(\mathbf{x}, \tau) - 3\alpha^c (T(\mathbf{x}, \tau) - T_H^c) \right), \quad \mathbf{x} \in V^c, \end{aligned}$$

$$\hat{s}(\mathbf{x}, t) = R_G^{c*} \hat{e}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t R_G^c(t_2 - \tau_2) d\hat{e}(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x} \in V^c, \quad (1.5)$$

$$t'_1 = \int_0^t \frac{d\xi}{a_T^G(T(\mathbf{x}, \xi))}; \quad t'_2 = \int_0^t \frac{d\xi}{a_T^V(T(\mathbf{x}, \xi))}.$$

Физические соотношения для трансверсально изотропного волокна в рамках линейной теории вязкоупругости при условии термореологически простого поведения имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) &= {}^4\hat{R}^{B*} \cdot (\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) - \hat{\alpha}^B(T(\mathbf{x}, t) - T_H^B)) = \\ &= \int_0^t {}^4\hat{R}^B(t'_3 - \tau'_3) \cdot d(\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau) - \hat{\alpha}^B(T(\mathbf{x}, \tau) - T_H^B)), \quad \mathbf{x} \in V^B, \quad (1.6) \\ t'_3 &= \int_0^t \frac{d\xi}{a_T^B(T(\mathbf{x}, \xi))}. \end{aligned}$$

В соотношениях (2.1)–(2.6):  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\varepsilon}$  – тензоры напряжений и деформаций с компонентами  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  соответственно;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{n}$  – векторы перемещений и внешней единичной нормали к поверхности  $S$ , с компонентами  $u_i, n_i$ ;  $\mathbf{X}$  – радиус-вектор произвольной точки тела, имеющих компоненты  $x_i$ ;  $\mathbf{U}$  – заданный на части  $S_u$  границы  $S$  вектор перемещений с компонентами  $U_i$ ;  $S_u \cup S_\sigma \equiv S$ ;  $i, j=1, 2, 3$ ;  $t, t'_1, t'_2, t'_3$  – время и модифицированные времена связующего и волокна соответственно;  $R_B^c(t), R_G^c(t)$  – функции объемной и сдвиговой релаксации связующего,  $a_T^V, a_T^G$  – соответствующие функции температурно-временного сдвига связующего;  ${}^4\hat{R}^B(t)$  – тензор функций релаксации волокна;  $a_T^B$  – функция температурно-временного сдвига волокна;  $T_H$  – начальная температура;  $T_0$  – температура приведения; индекс с характеризует параметры связующего, индекс в – параметры волокна.

Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы ее ось  $OZ$  была направлена вдоль направления укладки волокон.

Тензор функций релаксации  ${}^4\hat{R}^b(t)$  трансверсально изотропного волокна содержит пять независимых функций релаксации и, соответственно, должно быть пять разных модифицированных времен волокна. Однако в литературе удается найти экспериментальные данные только для продольной релаксации волокон, поэтому остальные параметры волокна будем считать упругими, а модифицированное время  $t'_3$  в соотношениях (2.6) имеет отношение только к функции продольной релаксации вдоль оси  $OZ$ .

Упругие константы, определяющие поведение матматериала, приведены в табл. 1.1.

При рассмотрении материала композита в некотором малом объеме можно считать его неоднородным. Но в этом случае задача описания его свойств становится очень сложной. Для преодоления этой трудности вводится гипотеза континуума [16]. Эта гипотеза включает процедуру осреднения, посредством которой структура и состояние материала идеализируются таким образом, что материал считается однородным, для которого присущие однородной среде характерные свойства одинаковы во всех точках. Основная задача состоит в использовании процедуры осреднения для предсказания эффективных свойств идеализированной однородной среды через свойства фаз и геометрические характеристики.

Таблица 1.1

Упругие характеристики компонентов композита [12]

	$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$ , ГПа
ЭДТ-10	3,1	-	0,42	-	-
Органическое волокно	121	3,35	0,27	0,17	2,6

Рассматриваем однонаправленно армированный слой как неограниченную непрерывно-армированную среду со структурой, образованной выпрямленными и одинаково ориентированными цилиндрическими волокнами с равными круговыми поперечными сечениями. Пространство между волокнами заполнено связующей средой – матрицей, характеристики которой отличны от характеристик волокон.

Выделим из данной среды элемент симметрии (будем рассматривать гексагональную укладку волокон) – ячейку периодичности

(рис. 1.1). Предполагаем, что в границах данного объема градиент внешнего поля воздействий изменяется незначительно.

Относительное объемное содержание волокна в композите через параметры ячейки периодичности можно выразить соотношением:

$$\mu = \frac{2V^B}{V^c + 2V^B} = \frac{\pi R^2}{2ab}. \text{ Для гексагональной упаковки } a = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Исходя из структуры однонаправленного композита с гексагональной укладкой волокон и согласно гипотезе континуума материал можно считать однородной средой, которая имеет ось упругой симметрии, совпадающую с направлением волокон, т.е. является transversально-изотропным материалом. Таким образом, композит характеризуется пятью операторами: операторными модулями упругости  $E_1^*$  и  $E_2^*$ , соответствующими направлениям вдоль и поперек волокон, операторными коэффициентами Пуассона  $\nu_{12}^*$  и  $\nu_{23}^*$  и операторным модулем сдвига  $G_{12}^*$ ,

$$E_1^* \varphi(t) = \int_{-\infty}^t E_1(\tau) \varphi'(t-\tau) d\tau, \quad E_2^* \varphi(t) = \int_{-\infty}^t E_2(\tau) \varphi'(t-\tau) d\tau,$$

$$\nu_{12}^* \varphi(t) = \int_{-\infty}^t \nu_{12}(\tau) \varphi'(t-\tau) d\tau, \quad \nu_{23}^* \varphi(t) = \int_{-\infty}^t \nu_{23}(\tau) \varphi'(t-\tau) d\tau, \quad (1.7)$$

$$G_{12}^* \varphi(t) = \int_{-\infty}^t G_{12}(\tau) \varphi'(t-\tau) d\tau,$$

ядра которых требуется определить из решения задачи (1.1)–(1.6).

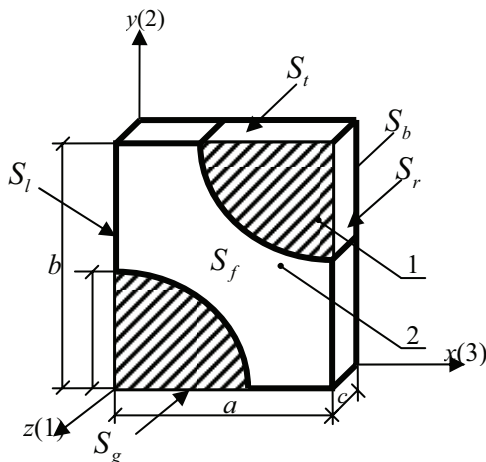


Рис. 1.1. Ячейка периодичности и принятая система координат: 1 – матрица материала; 2 – наполнитель (волокно);  $a, b, c$  – ширина, высота и глубина ячейки;  $R$  – радиус волокна;  $S_f, S_b, S_l, S_r, S_g$ ;  $S_l$  – передняя, задняя, левая, правая, нижняя и верхняя грани ячейки периодичности соответственно

Вычислительные эксперименты, которые необходимо поставить на трехмерной ячейке периодичности, для нахождения вязкоупругих характеристик композита: продольная релаксация вдоль направления волокон, поперечная релаксация в плоскости, перпендикулярной направлению волокон, и сдвиговая релаксация вдоль направления волокон.

## 2. Метод квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями

Рассмотрим решение краевой задачи вязкоупругости применительно к ячейке периодичности органопластика, считая волокно вязкоупругим моноотропным при растяжении в продольном направлении, принимая остальные характеристики волокна упругими. Связующее (эпоксидная смола ЭДТ-10) примем вязкоупругим изотропным материалом, при этом будем использовать гипотезу об отсутствии объемной релаксации.

В поставленной задаче имеется два различных вязкоупругих оператора. Для решения воспользуемся приближенным методом квазиконстантных операторов [18], погрешность которого мала, если для ядер вязкоупругих операторов, входящих в решение, выполняются условия квазиконстантности. Для ядра  $E_1^b(t)$  оператора продольной релаксации  $E_1^{b*}$  органоволокна показатель квазиконстантности  $\beta_b = 0,13$ , а для ядра  $E^c(t)$  оператора продольной релаксации  $E^{c*}$  связующего ЭДТ-10 показатель квазиконстантности  $\beta_c = 0,324$  [18]. Существующие теоретические оценки [18] позволяют утверждать, что относительная погрешность решения по методу квазиконстантных операторов в этом случае гарантированно не превысит 10 % (величина порядка квадрата максимального по величине показателя квазиконстантности). При реализации описанных краевых задач на ячейке периодичности внешние воздействия представляют собой мгновенно приложенные в начальный момент времени и не изменяющиеся далее величины. В этом случае решение по методу квазиконстантных операторов по форме соответствует так называемому методу переменных параметров упругости и, например, для компонент тензора напряжений имеет вид [18]

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}^{(e)} \left[ \mathbf{x}, E_1^B(t), E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, E^c(t), B^c \right] + \quad (2.1)$$

$$+ O(\beta_B^2) + O(\beta_B \beta_c) + O(\beta_c^2),$$

где под  $\sigma_{ij}^{(e)}$  понимается решение соответствующей упругой задачи.

Рассмотрим также применение метода квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями [10], который позволяет увеличить точность при наличии в решении оператора с относительно большим показателем квазиконстантности (в данном случае показатель квазиконстантности связующего).

Решение упругой задачи на ячейке периодичности имеет вид

$$\sigma_{ij}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \bar{\sigma}_{ij}^{(e)}(\mathbf{x}, E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, B^c, \omega^c) h(t), \quad (2.2)$$

где для удобства введена упругая константа  $\omega^c = \frac{2G^c}{3B^c} = \left( \frac{9B^c}{2E^c} - \frac{1}{2} \right)^{-1}$ .

Введем в рассмотрение систему дробно-рациональных функций аргумента  $\omega^c$ :

$$\varphi_1 = (\omega^c)^{-1}, \quad \varphi_2 = 1, \quad \varphi_3 = \omega^c, \quad \varphi_n = \frac{1}{1 + \beta_n \omega^c}, \quad n = \overline{4, N}, \quad (2.3)$$

где  $\beta_n$  – набор положительных чисел. Выбор системы базисных функций в виде (2.3) соответствует методу аппроксимаций [10], [11]. Аппроксимируем каждую компоненту тензорной функции  $\bar{\sigma}_{ij}^{(e)}(\mathbf{x}, E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, E^c, \omega^c)$  конечным рядом по системе функций (2.3), тогда

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(e)}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=1}^N F_n^{ij}(\mathbf{x}, E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, B^c) \varphi_n(\omega^c), \quad (2.4)$$

где для каждой фиксированной точки  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \in V$   $F_n^{ij}$  – подлежащие определению коэффициенты аппроксимации.

Используя представление аналитической функции  $F_n^{ij}$  в виде интеграла Коши по аргументу  $E_1^B$  и применяя принцип Вольтерры к соотношениям (4.4) с учетом (4.2), запишем вязкоупругое решение в форме



$$\sigma_{jk}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{(2\pi i)} \oint_{\gamma} \frac{F_n^{jk}(\mathbf{x}, z, E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, B^c) dz}{(z - E_1^{B*})} \right] \varphi_n(\omega^c) h(t), \quad (2.5)$$

где  $i$  – мнимая единица;  $\gamma$  – замкнутый контур в комплексной плоскости, представляющий собой, например, окружность радиуса  $r$  с центром  $E_1^B$ . Контур  $\gamma$  выбирается таким образом, чтобы он располагался в области аналитичности функций  $F_n^{jk}$  по соответствующему переменной  $E_1^B$  и охватывал точку  $z = E_1^B$ . Функции параметра  $z$  в (2.5) являются аналитическими продолжениями по  $z$  упругих решений (2.4).

После проведения операций с квазиконстантным оператором  $(z - E_1^{B*})^{-1}$  [9] получим

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}(\mathbf{x}, t) = & \sum_{n=1}^N \int_0^t F_n^{jk}[\mathbf{x}, E_1^B(\tau), E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, B^c] \frac{\partial}{\partial t} [\varphi_n(\omega^{c*}) h(t)] d\tau + \\ & + O(\beta_B^2) + O(\beta_B \beta_C) + O(\beta_C^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для реализации описанного метода в форме (2.4) необходимо решить два вопроса. Во-первых, требуется определить коэффициенты разложения  $F_n^{jk}$ . Точное представление упругого решения в форме (2.4) возможно лишь для узкого круга простейших задач. В остальных случаях приходится прибегать к методу численной реализации упругого решения [10], который в данном случае позволяет для некоторого фиксированного  $\tau = \tau_m$  отыскать коэффициенты  $F_{nm}^{jk}$  из системы алгебраических уравнений

$$\sigma_{jk}^{(l)}[\mathbf{x}, E_1^B(\tau_m), E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, B^c, \omega_l^c] = \sum_{n=1}^N F_{nm}^{jk} \varphi_n(\omega_l^c), \quad l = \overline{1, L}, \quad (2.7)$$

где  $\omega_1^c, \omega_2^c, \dots, \omega_L^c$  – набор чисел.

Вычисление интеграла в (2.6) удобно вести численно с использованием квадратурных формул Гаусса, в которых  $\tau_m$  – узлы интегрирования, тогда система (2.5) должна быть решена столько раз, сколько узлов содержит квадратурная формула.

Во-вторых, для реализации (2.6) необходимо расшифровать выражения  $\varphi_1(\omega^{c*}) h(t)$  и  $\varphi_n(\omega^{c*}) h(t)$ .

При

$$\omega^{c*} \varphi(t) = \int_0^t \omega^c(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

где  $\omega^c(t) = \omega^c \left( 1 - \int_0^t \Gamma_G^c(\tau) d\tau \right)$ ,

выражение (2.6) приобретает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = & \frac{F_1^{ij}(\mathbf{x}, t)}{\omega^c} + F_2^{ij}(\mathbf{x}, t) + F_3^{ij}(\mathbf{x}, t) \omega^c + \sum_{n=4}^N \frac{F_n^{ij}(\mathbf{x}, t)}{1 + \beta_n \omega^c} + \\ & + \int_0^t \left[ \frac{F_1^{ij}(\mathbf{x}, \tau)}{\omega^c} K_G^c(t-\tau) - F_3^{ij}(\mathbf{x}, \tau) \omega^c \Gamma_G^c(t-\tau) + \sum_{n=4}^N \frac{F_n^{ij}(\mathbf{x}, \tau)}{1 + \beta_n \omega^c} K_c'(t-\tau) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $K_G^c(t)$  – ядро сдвиговой ползучести материала связующего;  $\Gamma_G^c(t)$  – ядро сдвиговой релаксации материала связующего;  $K_c'(t)$  – резольвента ядра

$$\frac{\Gamma_G^c(t) \beta_n \omega}{\beta_n + \omega}.$$

Приведем результаты расчетов методом квазиконстантных операторов и методом квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями (рассматриваются моменты времени 1250, 2500, 5000, 10000 и 20000 ч) в сравнении с данными эксперимента [2].

### 3. Обобщенные эффективные вязкоупругие характеристики органопластика

Рассматривается однонаправленный органопластик с объемным содержанием волокон 50 % и гексагональной укладкой волокон. Для описания вязкоупругих свойств органических волокон использовались результаты работы [11], в которой приведены данные по испытаниям на изотермическую ползучесть при продольном растяжении в температурном диапазоне 20–150 °С.

По результатам этих испытаний, с использованием гипотезы температурно-временной аналогии в работе [11] были получены обобщенные кривые ползучести, которые были аппроксимированы выражением

$$\Pi(t) = \frac{1}{E} \left[ 1 + \sum_{k=1}^K b_k \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}} \right) \right], \quad (3.1)$$

где  $E$  – модуль упругости. Коэффициенты  $\tau_k$  выбирались в виде геометрической прогрессии

$$\tau_k = \tau_1 e^{2(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (3.2)$$

Функции температурно-временной редукции были описаны уравнением Вильямса–Ланделла–Ферри (ВЛФ)

$$\ln a_T = \frac{c_1(T - T_0)}{1 + c_2(T - T_0)}, \quad (3.3)$$

где  $T_0 = 20^\circ \text{C}$ ,  $\tau_1 = 6,06 \cdot 10^{-2} \text{ч}$ ,  $c_1 = 0,121 \text{K}^{-1}$ ,  $c_2 = 0,172 \cdot 10^{-2} \text{K}^{-1}$ .

Параметры аппроксимации обобщенной функции ползучести для органических волокон СВМ приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Параметры функций ползучести органических волокон СВМ [12]

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b_k$	0,0343	0,0664	0,125	0,171	0,171	0,169	0,167	0,126	0,118

Для ЭДТ-10 были использованы данные по кратковременной ползучести [3].

Обобщенная кривая ползучести аппроксимировалась выражением

$$\Pi(t) = a + \frac{1}{3} b \left( \sum_{k=1}^3 \left( 1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau_k}\right)} \right) \right), \quad (3.4)$$

где  $a = 0,3225806452 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{Па}}$ ,  $b = 0,151886 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{Па}}$ ,  $\tau_1 = 4,5 \cdot 10^3 \text{с}$ ,

$\tau_2 = 5 \cdot 10^4 \text{с}$ ,  $\tau_3 = 5 \cdot 10^4 \text{с}$ .

Для решения задачи необходимо получить зависимости  $E(t)$  и  $\nu(t)$ .  $E(t)$  – функция релаксации материала. По известной функции ползучести  $\Pi(t)$  определим ядро ползучести  $K(t)$ . Так как

$$\Pi(t) = \frac{1}{E} \left( 1 + \int_0^t K_\mu(\tau) d\tau \right), \quad (3.5)$$

то

$$K(t) = E \frac{d\Pi(t)}{dt} = \frac{Eb}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{e^{\left(-\frac{t}{\tau_k}\right)}}{\tau_k}. \quad (3.6)$$

Определим ядро релаксации  $T(t)$ , которое связано с ядром ползучести  $K(t)$  через интегральное уравнение

$$K(t) - T(t) = \int_0^t K(t-\tau)T(\tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Так как ядро  $K(t)$  представлено в виде суммы экспонент, то  $T(t)$  также будем искать в виде суммы экспонент:

$$T(t) = \sum_{n=1}^2 B_n e^{-\gamma_n t}. \quad (3.8)$$

Перепишем (3.6) в виде

$$K(t) = \sum_{n=1}^2 A_n e^{-\theta_n t}, \quad (3.9)$$

где  $A_1 = \frac{Eb}{3\tau_1}$ ,  $A_2 = \frac{2Eb}{3\tau_2}$ ,  $\theta_1 = \frac{1}{\tau_1}$ ,  $\theta_2 = \frac{1}{\tau_2}$ .

Из (3.7) получаем следующие соотношения между параметрами в (3.8) и (3.9):

$$1 + \sum_{n=1}^2 \frac{A_n}{\theta_n - \gamma} = 0, \quad (3.10)$$

$$\sum_{m=1}^2 \frac{B_m}{\theta_n - \gamma_m} = -1, \quad n = 1, 2. \quad (3.11)$$

Корни нелинейного алгебраического уравнения (3.10)  $\gamma_1 = 0,6123445363 \cdot 10^{-3}$  и  $\gamma_2 = 0,4143249183 \cdot 10^{-4}$ . Подставляя их в систему линейных алгебраических уравнений (3.11), определим неизвестные параметры  $B_m$ :  $B_1 = 0,4047678158 \cdot 10^{-3}$ ,  $B_2 = 0,6786990141 \cdot 10^{-5}$ .

Теперь можно определить функцию релаксации  $E(t)$ ,

$$E(t) = E \left( 1 - \int_0^t T_{\mu}(\tau) d\tau \right) = E \left( 1 + \sum_{n=1}^2 \frac{B_n (e^{-\gamma_n t} - 1)}{\gamma_n} \right). \quad (3.12)$$

Для определения функции  $\nu(t)$  с учетом гипотезы об отсутствии объемной релаксации получим

$$\frac{E(t)}{1 - 2\nu(t)} = \frac{E}{1 - 2\nu}, \quad (3.13)$$

где  $E$  и  $\nu$  – мгновенные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона.

Из (3.13) можно определить функцию  $\nu(t)$ ,

$$\nu(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E(t)(1 - 2\nu)}{E} \right). \quad (3.14)$$

Для органических волокон СВМ функцию продольной релаксации  $E_1(t)$  определяем аналогично, используя соотношения (3.5)–(3.14).

$$E_1(t) = E_1 \left( 1 + \sum_{n=1}^9 \frac{B_n (e^{-\gamma_n t} - 1)}{\gamma_n} \right). \quad (3.15)$$

Параметры функции  $E_1(t)$  приведены в табл. 3.2.

В отсутствие информации о поперечной и сдвиговой ползучести органических волокон остальные неизвестные параметры приняты постоянными:  $E_2(t) = E_2$ ,  $\nu_{12}(t) = \nu_{12}$ ,  $\nu_{23}(t) = \nu_{23}$ ,  $G_{12}(t) = G_{12}$ , где  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{23}$  и  $G_{12}$  – упругие постоянные волокна: модуль упругости, коэффициенты Пуассона модуль сдвига в плоскости вдоль направления укладки волокон (см. табл. 1.1).

Таблица 3.2

Параметры функции продольной релаксации органического волокна СВМ

$n$	$B_n$	$\gamma_n$	$n$	$B_n$	$\gamma_n$
1	3,14E-09	1,19E-07	6	0,000281	0,002825
2	2,84E-08	8,86E-07	7	0,001934	0,020424
3	3,34E-07	6,73E-06	8	0,008745	0,144207
4	3,08E-06	5,03E-05	9	0,56678	17,06805
5	2,90E-05	0,000376			

Результаты расчетов методом квазиконстантных операторов и методом квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями в сравнении с данными эксперимента приведены на рис. 3.1.

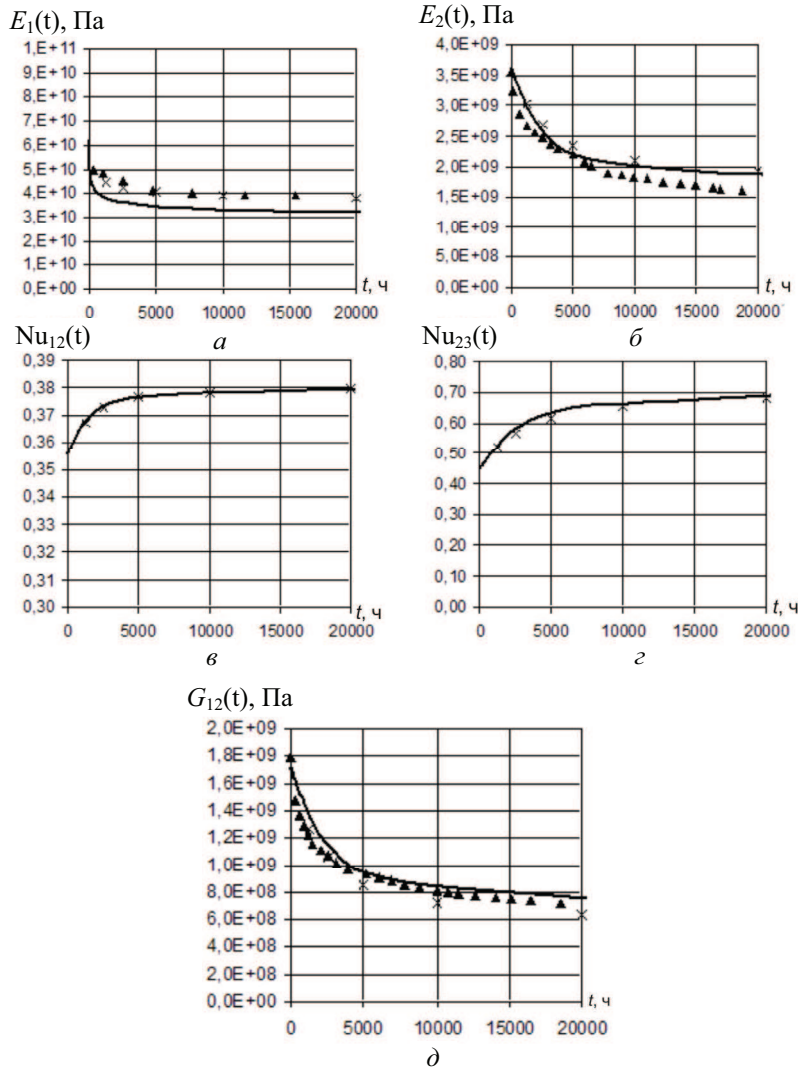


Рис 3.1. Обобщенные вязкоупругие характеристики органоупластика:  
— — метод квазиконстантных операторов; × — метод квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями; ▲ — результаты эксперимента [Макс4];  
*a* — функция продольной релаксации  $E_1(t)$ , Па; *б* — функция поперечной релаксации  $E_2(t)$ , Па; *в* — ядро операторного коэффициента Пуассона в плоскости вдоль направления волокон  $\nu_{12}(t)$ ; *г* — ядро операторного коэффициента Пуассона в плоскости, перпендикулярной направлению укладки волокон  $\nu_{23}(t)$ ;  
*д* — функция сдвиговой релаксации  $G_{12}(t)$ , Па

#### 4. Функции температурно-временной редукции для вязкоупругих характеристик органопластика

В качестве исходных данных для расчетов использовались обобщенные функции продольной релаксации волокон и связующего, функции температурно-временной редукции  $a_T$  которых различны.

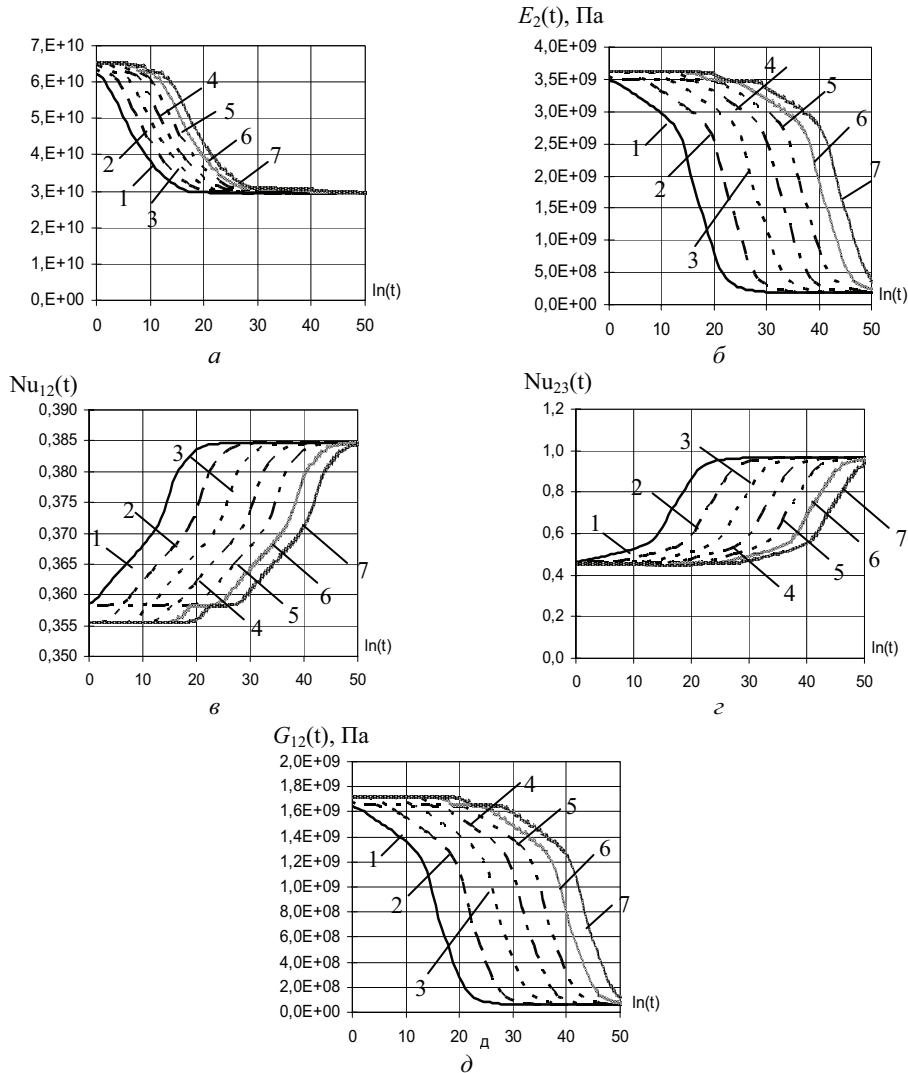


Рис 4.1. Обобщенные вязкоупругие характеристики органопластика: 1 –  $T=20^\circ\text{C}$ ; 2 –  $T=40^\circ\text{C}$ ; 3 –  $T=60^\circ\text{C}$ ; 4 –  $T=80^\circ\text{C}$ ; 5 –  $T=100^\circ\text{C}$ ; 6 –  $T=120^\circ\text{C}$ ; 7 –  $T=140^\circ\text{C}$ ; а – функция продольной релаксации  $E_1(t)$ , Па; б – функция поперечной релаксации  $E_2(t)$ , Па; в – ядро операторного коэффициента Пуассона в плоскости вдоль направления волокон  $\nu_{12}(t)$ ; г – ядро операторного коэффициента Пуассона в плоскости, перпендикулярной направлению укладки волокон  $\nu_{23}(t)$ ; д – функция сдвиговой релаксации  $G_{12}(t)$ , Па

В результате получены пять обобщенных функций для которых значения  $a_T$  неизвестны. Для определения этих функций проведена серия расчетов для различных значений температуры (20, 40, 60, 80, 100, 120 и 140 °С) и построены зависимости свойств композита в полулогарифмической системе координат (рис. 4.1); затем путем горизонтальных сдвигов определены значения  $\ln a_T$  для каждой вязкоупругой характеристики композита.

Полученные данные приведены на графике вместе с функциями температурно-временной редукции связующего и волокон (рис. 4.2).

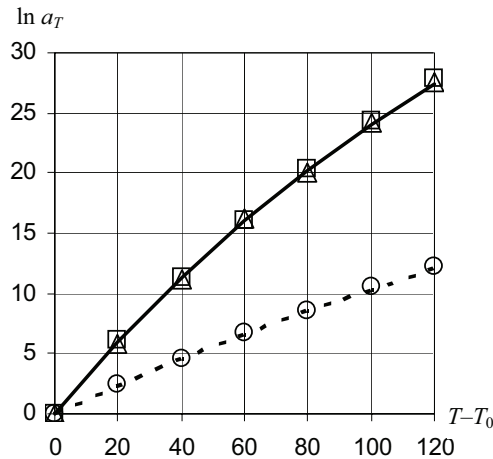


Рис. 4.2. Функции температурно-временной редукции для вязкоупругих характеристик органопластика  $\ln a_T$ :  
 ○ – для  $E_1(t)$  композита; □ – для  $E_2(t)$  и  $G_{12}(t)$  композита;  
 Δ – для  $\nu_{12}(t)$  и  $\nu_{23}(t)$  композита; — — — — для  $E(t)$  связующего;  
 - - - - - для  $E_1(t)$  волокна

### Заключение

Использование частичных аппроксимаций в методе квазиконстантных операторов позволяет уменьшить погрешность метода, вносимую оператором с большим показателем квазиконстантности. По результатам расчетов можно сделать следующие выводы: однонаправленный органопластик проявляет терморологически простое поведение в отношении каждой отдельной компоненты тензора эффективных характеристик, при этом функция температурно-временной редукции для обобщенной функции продольной релаксации органопластика практически совпадает с функцией для органических волокон, а функции температурно-временной редукции для остальных обобщенных характеристик практически совпадают с функцией связующего.



### Библиографический список

1. Плуме Э.З. Сравнительный анализ ползучести однонаправленных композитов, армированных волокнами различного типа // Механика композитных материалов. – 1992. – № 4. – С. 557–566.
2. Максимов Р.Д., Плуме Э.З. Ползучесть однонаправленно армированных полимерных композитов // Механика композитных материалов. – 1984. – № 2. – С. 215–223.
3. Максимов Р.Д., Плуме Э.З. Прогнозирование ползучести однонаправленно армированного пластика с терморологически простыми структурными компонентами // Механика композитных материалов. – 1982. – № 6. – С. 1081–1089.
4. Кочетков В.А. Прогнозирование термического деформирования слоистых гибридных композитов с учетом термовязкоупругих свойств связующего и волокон // Механика композитных материалов. – 1993. – № 3. – С. 317–323.
5. Термомеханика вязкоупругих материалов в условиях релаксационных и фазовых переходов / Н.А. Труфанов [и др.] // Региональный конкурс РФФИ-Урал. Результаты научных исследований, полученные за 2005 г. Аннотационные отчеты; ПНЦ УрО РАН. – Екатеринбург, 2006. – С. 93–97.
6. Зелин В.И., Янсон Ю.О. Определение ядер ползучести по результатам кратковременных испытаний // Механика полимеров. – 1977. – № 6. – С. 972–975.
7. Труфанов Н.А., Сметанников О.Ю. Приближенное определение трансверсальных вязкоупругих свойств органоволокна в составе однонаправленного органоластика // Численное моделирование статического и динамического деформирования конструкций / УрО АН СССР. – Свердловск, 1990. – С. 114–118.
8. Максимов Р.Д., Плуме Э.З. Длительная ползучесть органоластика // Механика композитных материалов. – 2001. – № 4. – С. 435–450.
9. Методы прикладной вязкоупругости / А.А. Адамов [и др.]; УрО РАН. – Екатеринбург, 2003. – 411 с.
10. Победря Б.Е. Численные методы в теории ползучести и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 343 с.

11. Максимов Р.Д., Кочетков В.А. Прогнозирование термического деформирования гибридных композитов с вязкоупругими компонентами // *Механика композитных материалов*. – 1989. – № 6. – С. 969–979.
12. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
13. Труфанов Н.А. Применение частичных аппроксимаций в методе квазиконстантных операторов // *Вестник ПГТУ. Полимерные материалы*. – 1997. – № 3. – С. 86–89.
14. Ташкинов А.А., Шавшуков В.Е. Тепловое расширение однонаправленных и пространственных ортогонально армированных волокнистых композитов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2003. – № 2. – С. 133–141.
15. Федоровский Г.Д. Исследование термовязкоупругих характеристик намоточных стеклопластиков в поперечном направлении // *Механика композитных материалов*. – 1983. – № 4. – С. 713–718.
16. Киселев А.Д., Кочетков В.А. Ползучесть эпоксидного связующего при термоциклировании // *Механика композитных материалов*. – 1992. – № 4. – С. 557–566.
17. Янсон Ю.О., Дмитриенко И.П., Зелин В.И. Прогнозирование деформаций ползучести однонаправлено армированного органопластика по результатам квазистатических испытаний // *Механика композитных материалов*. – 1983. – № 4. – С. 610–613.
18. Анискевич К.К. Оценка функции температурно-временной редукции ЭДТ-10 по результатам дилатометрических испытаний // *Механика композитных материалов*. – 1989. – № 4. – С. 737–753.
19. Ванин Г.А. *Микромеханика композиционных материалов*. – Киев: Наук. думка, 1985. – 304 с.
20. Малый В.И., Труфанов Н.А. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов // *Изв. АН СССР. МТТ*. – 1987. – № 6. – С. 148–154.

Получено 10.11.2010