DOI: 10.15593/2499-9873/2018.4.03
УДК 517.929

В.В. Малыгина

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

ПРИЗНАКИ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Задача асимптотической устойчивости для автономных функционально-дифференциальных уравнений изучается на основе исследования корней характеристической функции. Для получения точных границ областей устойчивости используется метод *D*-разбиений. Для двух семейств линейных автономных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием и степенными ядрами получены необходимые и достаточные признаки асимптотической устойчивости, сформулированные в терминах параметров исходной задачи. На основе этих критериев для каждого семейства найдены признаки абсолютной устойчивости.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, распределенное запаздывание, асимптотическая устойчивость, абсолютная устойчивость, *D*-разбиение.

V.V. Malygina

Perm National Research Polytechnic University,
Perm, Russian Federation

ABSOLUTE STABILITY CONDITIONS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISTRIBUTED DELAY

The problem of asymptotic stability for autonomous functional differential equations is studied on the basis of the investigation of the roots of the characteristic function. We apply *D*-decomposition method for obtaining the sharp boundaries of stability domains. We obtain necessary and sufficient conditions of asymptotic stability for two families of linear autonomous differential equations with distributed delay and power kernels. These criteria of stability are formulated in terms of the parameters of the original problem. Based on the criteria, we find absolute stability conditions for each of the families.

Keywords: differential equations, distributed delay, asymptotic stability, absolute stability, D-decomposition.

Введение

Автономные функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) с ограниченным последействием традиционно [1–4] принято записывать в виде

$$\dot{x}(t)+\int_0^h x(t-s)\,dr(s)=0,\ t\ge 0. \qquad (1)$$

Интеграл понимается в смысле интеграла Римана – Стилтьеса, функция r является функцией ограниченной вариации, $r(0)=0$. При отрицательных значениях аргумента решение считается доопределенным заданной начальной функцией.

Задача устойчивости, как одна из наиболее важных задач асимптотического поведения решения, ставилась и решалась для различных классов уравнений вида (1). Наиболее хорошо изучены уравнения с сосредоточенным запаздыванием, для которых функция r представляет собой функцию, имеющую на отрезке $[0,h]$ конечное число скачков заданной величины в фиксированных точках [5]. Если же функция r содержит абсолютно непрерывную (или, тем более, сингулярную) составляющую, то исследование уравнения (1) существенно усложняется: замена в уравнении (1) $dr(s)$ на $r'(s)ds$ оставляет класс функций r очень широким. Получать области устойчивости удается лишь для уравнений, где указан конкретный вид функции r. В работах [6–9] проведено подробное исследование асимптотических свойств уравнения (1) при $r(s)=ks$. В данной статье исследуются два семейства уравнений с распределенным запаздыванием и дается описание их областей устойчивости.

1. Интегралы Френеля и их обобщения

Приведем в этом разделе некоторые сведения об интегралах типа Френеля, которые будут использоваться в дальнейшем.

Обобщенными интегралами Френеля называются интегралы вида

$$C_\varepsilon(t)=\int_0^t \frac{\cos s}{s^\varepsilon}ds \ \text{ и } \ S_\varepsilon(t)=\int_0^t \frac{\sin s}{s^\varepsilon}ds, \qquad (2)$$

где $0<\varepsilon<1$.

Оба интеграла имеют особенность при $s=0$, но сходятся абсолютно при любом $t>0$. При $t\to+\infty$ обе функции, C_ε и S_ε, имеют конечные положительные пределы:

$$\lim_{t\to\infty} C_\varepsilon(t) = \int_0^\infty \frac{\cos s}{s^\varepsilon} ds = \frac{\pi\varepsilon}{2\Gamma(\varepsilon+1)\cos(\frac{\pi\varepsilon}{2})},$$

$$\lim_{t\to\infty} S_\varepsilon(t) = \int_0^\infty \frac{\sin s}{s^\varepsilon} ds = \frac{\pi\varepsilon}{2\Gamma(\varepsilon+1)\sin(\frac{\pi\varepsilon}{2})},$$

где Γ – гамма-функция Эйлера.

При $\varepsilon = 1/2$ получаем классические формулы Френеля [10, с. 723]:

$$\int_0^\infty \frac{\cos s}{\sqrt{s}} ds = \frac{\pi}{4\Gamma(\frac{3}{2})\cos(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin s}{\sqrt{s}} ds = \frac{\pi}{4\Gamma(\frac{3}{2})\sin(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Очевидно, что $C_\varepsilon(0) = S_\varepsilon(0) = 0$. Как известно, $C_{1/2}(t) > 0$, $S_{1/2}(t) > 0$ для всех $t > 0$. Функции S_ε сохраняют это свойство (см. графики функций S_ε на рис. 1). Однако функции C_ε положительны уже не для любого $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \le \varepsilon_0 \approx 0,308$ функции C_ε имеют конечное множество нулей, не являясь, естественно, осциллирующими (так как имеют положительные пределы при $t \to \infty$). Графики функций C_ε приведены на рис. 2.

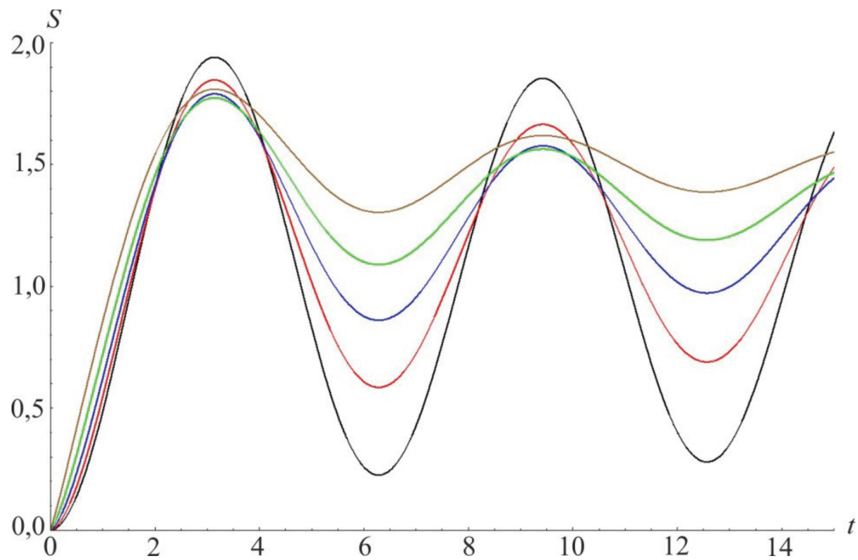

Рис. 1. Графики функций S_ε при $\varepsilon = 0,1;\ 0,3;\ 0,5;\ 0,7;\ 0,9$

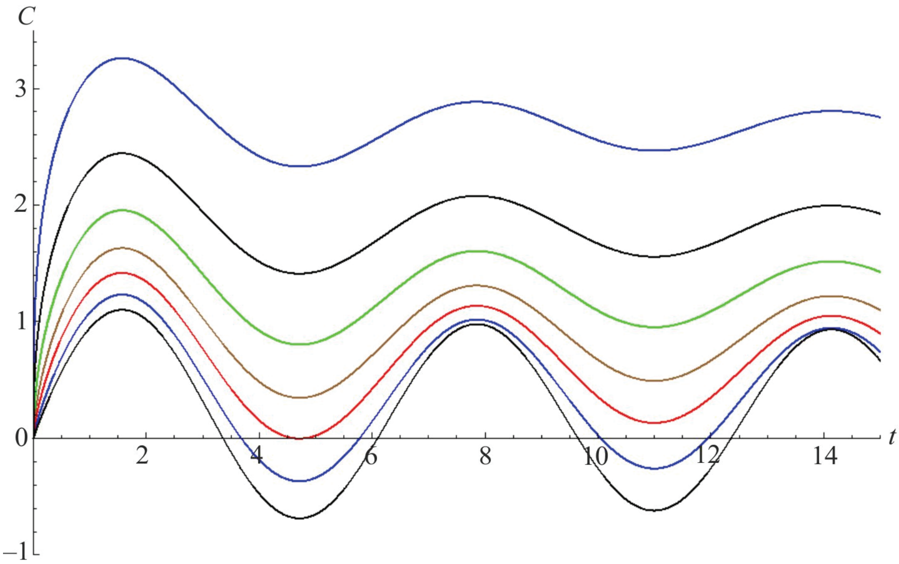

Рис. 2. Графики функций C_ε при $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}308;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7$

При $\varepsilon = 0$ интегралы (2) легко находятся: $C_0(t) = \sin t$, $S_0(t) = 1 - \cos t$; очевидно, что C_0 и S_0 имеют бесконечное множество нулей.

Рассмотрим аналоги интегралов (2) при положительных степенях s:

$$C_{-\varepsilon}(t) = \int_0^t s^\varepsilon \cos s\, ds \ \text{ и } \ S_{-\varepsilon}(t) = \int_0^t s^\varepsilon \sin s\, ds, \qquad (3)$$

где $\varepsilon > 0$.

Легко видеть, что $C_{-\varepsilon}(\frac{\pi}{2}) > 0$, $C_{-\varepsilon}(\pi) < 0$, следовательно, функция $C_{-\varepsilon}$ имеет нули, причем первый нуль лежит на интервале $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Для функции $S_{-\varepsilon}$ аналогично имеем $S_{-\varepsilon}(\pi) > 0$, $S_{-\varepsilon}(2\pi) < 0$, т.е. $S_{-\varepsilon}$ имеет нули, причем первый нуль лежит на интервале $(\pi, 2\pi)$. При $t \to \infty$ функции (3) пределов не имеют.

Наряду с интегралами Френеля (2) нам понадобятся *интегралы Френеля типа свертки*:

$$\int_0^t \frac{\cos(t-s)}{s^{\varepsilon}}ds = \cos t \cdot C_{\varepsilon}(t) + \sin t \cdot S_{\varepsilon}(t) \text{ и}$$

$$\int_0^t \frac{\sin(t-s)}{s^{\varepsilon}}ds = \sin t \cdot C_{\varepsilon}(t) - \cos t \cdot S_{\varepsilon}(t).$$

Если $0<\varepsilon<1$, то при $t \to +\infty$ оба интеграла сближаются с периодическими функциями $\frac{\pi\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)} \cdot \frac{\sin(t+\pi\varepsilon/2)}{\sin(\pi\varepsilon)}$ и $-\frac{\pi\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)} \cdot \frac{\cos(t+\pi\varepsilon/2)}{\sin(\pi\varepsilon)}$ соответственно и, следовательно, имеют бесконечное множество положительных нулей.

При $\varepsilon=0$ интегралы Френеля типа свертки совпадают с C_0 и S_0.

Рассмотрим аналоги интегралов (3) при положительных степенях s. Заметим, что

$$\int_0^t s^{\varepsilon}\sin(t-s)\,ds = t^{\varepsilon} - \varepsilon\int_0^t \frac{\cos(t-s)}{s^{1-\varepsilon}}\,ds = \varepsilon\int_0^t \frac{1-\cos(t-s)}{s^{1-\varepsilon}}\,ds > 0,$$

т.е. этот интеграл не имеет положительных нулей при любом $\varepsilon>0$. Далее,

$$\int_0^t s^{\varepsilon}\cos(t-s)\,ds = -s^{\varepsilon}\sin(t-s)\Big|_0^t + \varepsilon\int_0^t \frac{\sin(t-s)}{s^{1-\varepsilon}}\,ds = \varepsilon\int_0^t \frac{\sin(t-s)}{s^{1-\varepsilon}}\,ds,$$

следовательно, при $0<\varepsilon\le 1$ интеграл имеет положительные нули, а при $\varepsilon>1$ – нет.

2. Устойчивость семейств ФДУ с распределенным запаздыванием

Асимптотические свойства решений уравнения (1), как известно, определяются свойствами корней характеристической функции

$$g(z) = z + \int_0^h e^{-zs}dr(s), \quad z \in \mathbb{C},$$

а их исследование основывается на следующем факте.

Утверждение 1 [1, 2, 5]. *Уравнение* (1) *асимптотически (экспоненциально) устойчиво тогда и только тогда, когда все корни функции* g *лежат слева от мнимой оси.*

Семейство I. Пусть в уравнении (1) $r(s)=ks^{\alpha+1}$, где $\alpha>-1$. Не нарушая общности, можно считать, что $h=1$. Таким образом, рассматриваемое уравнение имеет вид

$$\dot{x}(t)+k(\alpha+1)\int_0^1 s^{\alpha}x(t-s)ds=0,\ \ t\ge 0, \tag{4}$$

а его характеристическая функция $g\left(z\right)=z+k(\alpha+1)\int_0^1 s^{\alpha}e^{-zs}ds$.

Применим к исследованию устойчивости уравнения (4) метод D-разбиений [11]. Для этого установим, при каких значениях параметров k и α корни характеристической функции лежат на мнимой оси, т.е. исследуем разрешимость уравнения $g(i\varphi)=0$, где $\varphi\in\mathbb{R}$. Разделяя вещественную и мнимую части, получаем систему:

$$\begin{cases}\varphi=k(\alpha+1)\int_0^1 s^{\alpha}\sin(\varphi s)ds,\\ k(\alpha+1)\int_0^1 s^{\alpha}\cos(\varphi s)ds=0.\end{cases}$$

Поскольку $\alpha>-1$, то корню $\varphi_0=0$ соответствует только $k_0=0$. Переменная $\varphi\ne 0$ входит в оба уравнения системы симметрично, поэтому во всех рассуждениях достаточно рассматривать случай $\varphi>0$. При $k\ne 0$ система имеет решения, если

$$\int_0^1 s^{\alpha}\cos(\varphi s)\,ds=\varphi^{-1-\alpha}\int_0^{\varphi} s^{\alpha}\cos s\,ds=0.$$

Как показано в п. 1, последнее уравнение не имеет решений, если $\alpha<-\varepsilon_0\approx -0{,}308$, следовательно, в этих условиях функция g не имеет нулей на мнимой оси. При $k\le 0$ уравнение (4), очевидно, неустойчиво; если же $k>0$, то легко убедиться, что при достаточно больших R функция g не обращается в нуль на границе полукруга $z=Re^{i\gamma}$, $-\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{\pi}{2}$. В работе [12] показано, что при $0<k\le 1/e$ фундаментальное решение уравнения (4) положительно, следовательно, уравнение

(4) устойчиво. В силу теоремы о логарифмическом вычете [13] получаем, что уравнение (4) устойчиво при $k > 0$.

Таким образом, установлен:

Признак 1. *Пусть* $-1 < \alpha < \varepsilon_0$. *Уравнение* (4) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $k > 0$.

Пусть теперь $\alpha \geq -\varepsilon_0$. В п. 1 показано, что в этом случае уравнение $\int\limits_0^1 s^\alpha \cos\varphi s\, ds = 0$ имеет корни. Обозначим его первый положительный корень через φ_α и положим $k_\alpha = \dfrac{\varphi_\alpha}{\alpha+1}\left(\int\limits_0^1 s^\alpha \sin(\varphi_\alpha s)\, ds\right)^{-1}$.

Признак 2. *Пусть* $\alpha > -\varepsilon_0$. *Уравнение* (4) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $0 < k < k_\alpha$.

Доказательство. Устойчивость уравнения (4) при выполнении условий признака 2 очевидна. Докажем, что при $k \geq k_\alpha$ уравнение (4) неустойчиво. Рассмотрим семейство функций $\{g_k(z)\}_{k>0} = g(k,z)$. Корни $z(k)$ характеристической функции являются непрерывно дифференцируемыми функциями коэффициента k, поэтому $g(k, z(k)) = 0$, а значит, $\dfrac{d}{dk} g(k, z(k)) = 0$. По формуле дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial z}{\partial k} = \frac{z^2}{k(2+\alpha+k(\alpha+1)e^{-z})},$$

$$\left.\frac{\partial(\operatorname{Re} z)}{\partial k}\right|_{z=i\varphi} = -\frac{\varphi^2(\alpha+1)\cos\varphi}{k^2(\alpha+1)^2\cos^2\varphi + ((2+\alpha)\varphi - k(\alpha+1)\sin\varphi)^2}. \tag{5}$$

Анализ последней формулы показывает, что при $\alpha \geq 0$ всегда $\cos\varphi < 0$, следовательно, переход через значение k, при котором характеристическая функция имеет нуль на мнимой оси, приводит к увеличению вещественной части корня, т.е. корень переходит в правую полуплоскость. В силу утверждения 1 это означает неустойчивость уравнения (4). При $\alpha < 0$ возможна ситуация, когда $\cos\varphi > 0$, т.е. часть корней может вернуться в левую полуплоскость, но по крайней мере два корня всегда будут оставаться в правой полуплоскости. В силу утверждения 1 и в этом случае уравнение неустойчиво.

Отметим известный частный случай признака 2.

Следствие 1 [6, 7, 8]. *Пусть* $\alpha = 0$. *Уравнение* (4) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $0 < k < \pi^2/2$.

Осталось рассмотреть пограничный случай $\alpha = -\varepsilon_0$. Здесь уравнение $\int\limits_0^1 s^{-\varepsilon_0} \cos\varphi s\, ds = 0$ имеет единственный корень $\varphi = 3\pi/2$, который является кратным (см. график, выделенный красным цветом на рис. 2). Соответствующее значение коэффициента обозначим $k_* = \dfrac{3\pi}{2(\varepsilon_0 - 1)} \times$ $\times \left(\int\limits_0^1 s^{\alpha} \sin(\frac{3\pi s}{2}) ds \right)^{-1}$ (приближенное значение $k_* \approx 16{,}624$).

Признак 3. *Пусть* $\alpha = -\varepsilon_0$. *Уравнение* (4) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $k > 0$ *и* $k \neq k_*$.

Доказательство. При $0 < k < k_*$ уравнение (4) экспоненциально устойчиво, при $k = k_*$ характеристическая функция имеет два корня на мнимой оси $z = \pm 3\pi i/2$, следовательно, уравнение (4) неустойчиво. Из формулы (5) следует, что $\left.\dfrac{\partial(\operatorname{Re} z)}{\partial k}\right|_{z=\pm 3\pi i/2} = 0$, следовательно, способом, который был использован при доказательстве признака 2, невозможно установить, что происходит с вещественной частью корней характеристической функции при переходе коэффициента k через значение k_*. Выбирая на интервале (k_*, ∞) произвольную точку, несложно провести прямую оценку вещественной части корней характеристической функции и убедиться, что если $k > k_*$, то вещественные части всех корней отрицательны.

Исследуем вопрос об области *абсолютной устойчивости* уравнения (4), если рассматривать его *как семейство, зависящее от параметра* $\alpha > -1$. Чтобы найти область абсолютной устойчивости, необходимо изучить свойства множества $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha > -1}$.

Лемма 1. *При любом* $\alpha \geq 0$ *справедливо неравенство* $\pi/2 < \varphi_\alpha < \pi$, *а* $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \varphi_\alpha = \pi/2$.

Доказательство. Поскольку $\int\limits_0^1 s^\alpha \cos(\varphi s)ds = \varphi^{-\alpha-1}\int\limits_0^\varphi s^\alpha \cos s\, ds > 0$ при $\varphi \in (0, \pi/2]$, то первое неравенство доказано. С другой стороны,

$$\int\limits_0^1 s^\alpha \cos(\pi s)ds = \pi^{-\alpha-1}\int\limits_0^\pi s^\alpha \cos s\, ds = \pi^{-\alpha-1}\int\limits_0^{\pi/2} (s^\alpha - (\pi - s)^\alpha)\cos s\, ds < 0,$$

откуда следует второе неравенство. Далее, из определения φ_α имеем

$$0 = (\alpha+1)\int\limits_0^1 s^\alpha \cos(\varphi_\alpha s)ds = \cos\varphi_\alpha + \varphi_\alpha\int\limits_0^1 s^{\alpha+1}\sin(\varphi_\alpha s)ds.$$

Легко видеть, что $\left|\int\limits_0^1 s^{\alpha+1}\sin(\varphi_\alpha s)ds\right| \leq \dfrac{1}{\alpha+2} \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\cos\varphi_\alpha = 0$, а так как $\pi/2 < \varphi_\alpha < \pi$, то $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\varphi_\alpha = \pi/2$.

Лемма 2. *При любом* $\alpha \geq 0$ *справедливо неравенство* $k_\alpha > \pi/2$, *а* $\lim\limits_{\alpha\to\infty} k_\alpha = \pi/2$.

Доказательство. Поскольку $(\alpha+1)\left|\int\limits_0^1 s^\alpha \sin(\varphi_\alpha s)ds\right| < 1$, а в лемме 1 установлено, что $\varphi_\alpha > \pi/2$, то из определения k_α получаем искомое неравенство. Далее, с учетом леммы 1 имеем

$$(\alpha+1)\int\limits_0^1 s^\alpha \sin(\varphi_\alpha s)ds = \sin\varphi_\alpha - \varphi_\alpha\int\limits_0^1 s^{\alpha+1}\cos(\varphi_\alpha s)ds \underset{\alpha\to\infty}{\to} 1.$$

Для доказательства второго утверждения леммы 2 остается еще раз использовать определение k_α.

Теорема 1. *Семейство* (4) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $0 < k \leq \pi/2$.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $\bigcap\limits_{\alpha\geq 0}(0, k_\alpha) = (0, \pi/2]$. Для доказательства теоремы остается применить признаки 1–3 и учесть, что $k_* > \pi/2$.

Семейство II. Пусть в уравнении (1) $r(s) = -p(h-s)^{\alpha+1}$, где $\alpha > -1$. Не нарушая общности, полагаем $h = 1$, т.е. рассматриваем уравнение

$$\dot{x}(t) + p(\alpha+1)\int_0^1 (1-s)^{\alpha} x(t-s)\,ds = 0,\ \ t \geq 0. \tag{6}$$

Его характеристическая функция $g(z) = z + p(\alpha+1)\int_0^1 (1-s)^{\alpha} e^{-zs} ds$. При $p \leq 0$ уравнение (6), очевидно, неустойчиво, поэтому далее считаем, что $p > 0$. Разделяя вещественную и мнимую части уравнения $g(i\omega) = 0$, где $\omega \in \mathbb{R}$, получаем систему:

$$\begin{cases} \omega = p(\alpha+1)\int_0^1 (1-s)^{\alpha} \sin(\omega s)ds, \\ p(\alpha+1)\int_0^1 (1-s)^{\alpha} \cos(\omega s)ds = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Преобразуем интеграл из второго уравнения системы (7) и учтем результаты раздела 1. При $\alpha > 1$

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha} \cos(\omega s)ds = \omega^{-\alpha-1}\int_0^{\omega} (\omega-s)^{\alpha} \cos s\, ds > 0, \tag{8}$$

следовательно, функция g не имеет нулей на мнимой оси. Легко убедиться, что при достаточно больших R функция g не обращается в нуль на границе полукруга $z = Re^{i\gamma}$, $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$. В работе [12] показано, что при $0 < p \leq 1/e$ фундаментальное решение уравнения (6) положительно, следовательно, уравнение (6) устойчиво. В силу теоремы о логарифмическом вычете [13] получаем, что уравнение (6) устойчиво при $p > 0$.

Таким образом, установлен:

Признак 4. *Пусть* $\alpha > 1$. *Уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $p > 0$.

Пусть теперь $-1 < \alpha < 1$. В силу (8) и результатов п. 1 заключаем, что второе уравнение системы (7) имеет корни. Обозначим его первый

положительный корень ω_α и положим $p_\alpha = \dfrac{\omega_\alpha}{\alpha+1} \times$
$\times \left(\int\limits_0^1 (1-s)^\alpha \sin(\omega_\alpha s)\, ds \right)^{-1}$.

Применяя метод D-разбиений [11], получаем для уравнения (6) аналог признака 2.

Признак 5. *Пусть* $-1 < \alpha < 1$. *Уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $0 < p < p_\alpha$.

Доказательство. Устойчивость уравнения (6) при выполнении условий признака 5 очевидна. Докажем, что при $p \geq p_\alpha$ уравнение (6) неустойчиво. Рассмотрим семейство функций $\left\{g_p(z)\right\}_{p>0} = g(p,z)$. Корни $z(p)$ характеристической функции являются непрерывно дифференцируемыми функциями коэффициента k, поэтому $g(p, z(p)) = 0$, а значит, $\dfrac{d}{dp} g(p, z(p)) = 0$. По формуле дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial z}{\partial p} = \frac{z^2}{p(z^2 + z(\alpha+2) + p(\alpha+1))},$$

$$\left.\frac{\partial(\operatorname{Re} z)}{\partial p}\right|_{z=i\omega} = \frac{\omega^2}{p} \cdot \frac{\omega^2 - p(\alpha+1)}{(p(\alpha+1) - \omega^2)^2 + (\alpha+2)^2 \omega^2}. \qquad (9)$$

Используя результаты п. 1, получаем, что $\omega^2 > p(\alpha+1)$, следовательно, переход через значение p, при котором характеристическая функция имеет нуль на мнимой оси, приводит к увеличению вещественной части корня, т.е. корень переходит в правую полуплоскость. В силу утверждения 1 это означает неустойчивость уравнения (6).

Заметим, что при $\alpha = 0$ уравнения (4) и (6) совпадают, значит, в силу следствия 1 *уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $0 < p < \pi^2/2$.

Осталось рассмотреть пограничный случай $\alpha = 1$. Из второго уравнения системы (7) с учетом $p > 0$ получаем $\omega = \omega_n = 2\pi n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Тогда из первого уравнения той же системы находим $p_n = 2\pi^2 n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ – счетное множество значений коэффициента p, при которых характеристическая функция имеет на мнимой оси пару сопряженных корней $z_n = \pm 2\pi n i$ $(n \in \mathbb{N})$. Следовательно, при $p = p_n$ уравнение (6) неустойчиво.

Последовательность точек 0, $2\pi^2$, $8\pi^2$, …, $2\pi^2 n^2$, … разбивает полуось $p \geq 0$ на счетное множество непересекающихся интервалов. Из формулы (9) следует, что $\left.\dfrac{\partial(\operatorname{Re} z)}{\partial p}\right|_{z=\pm 2\pi n i} = 0$, следовательно, способом, который был использован при доказательстве признака 5, невозможно установить, что происходит с вещественной частью корней характеристической функции при переходе коэффициента p через значение p_n. Выбирая в каждом интервале произвольную точку (например, середину интервала), несложно провести прямую оценку вещественной части корней характеристической функции и убедиться, что если $p \in \left(2\pi^2 n^2, 2\pi^2 (n+1)^2\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$, то вещественные части всех корней отрицательны.

Таким образом, установлен

Признак 6. *Пусть* $\alpha = 1$. *Уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $p > 0$ и $p \neq 2\pi^2 n^2$ $(n \in \mathbb{N})$.

Для уравнения (6) также интересен вопрос об области *абсолютной устойчивости*, если рассматривать (6) как семейство, зависящее от параметра $\alpha > -1$. Изучим свойства множества $\{\omega_\alpha\}_{\alpha > -1}$.

Лемма 3. *При любом* $-1 < \alpha \leq 0$ *справедливо неравенство* $\pi/2 < \omega_\alpha < \pi$, *а* $\lim\limits_{\alpha \to -1} \omega_\alpha = \pi/2$.

Доказательство. Поскольку $\int\limits_0^1 (1-s)^\alpha \cos(\omega s)\,ds =$ $= \omega^{-\alpha-1} \int\limits_0^\omega (\omega - s)^\alpha \cos s\, ds > 0$ при $\omega \in (0, \pi/2]$, то первое неравенство доказано. С другой стороны, $\int\limits_0^1 (1-s)^\alpha \cos(\pi s)\,ds = \pi^{-\alpha-1} \int\limits_0^\pi (\pi - s)^\alpha \cos s\, ds =$

$= \pi^{-\alpha-1} \int\limits_0^{\pi/2} ((\pi - s)^\alpha - s^\alpha) \cos s \, ds < 0,$ откуда следует второе неравенство.

Далее, из определения ω_α имеем

$$0 = (\alpha+1)\int\limits_0^1 (1-s)^\alpha \cos(\omega_\alpha s) ds = 1 - \omega_\alpha \int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha+1} \sin(\omega_\alpha s) ds =$$

$$= \cos \omega_\alpha + \omega_\alpha \int\limits_0^1 \left(1 - (1-s)^{\alpha+1}\right) \sin(\omega_\alpha s) ds.$$

Легко видеть, что $\left| \int\limits_0^1 \left(1 - (1-s)^{\alpha+1}\right) \sin(\omega_\alpha s) ds \right| \le \dfrac{\alpha+1}{\alpha+2} \to 0$ при $\alpha \to -1$. С учетом леммы 3 отсюда следует, что $\lim\limits_{\alpha \to -1} \cos \omega_\alpha = 0$, а поскольку $\pi/2 < \omega_\alpha < \pi$, то $\lim\limits_{\alpha \to -1} \omega_\alpha = \pi/2$.

Лемма 4. *При любом* $-1 < \alpha \le 0$ *справедливо неравенство* $p_\alpha > \pi/2$, *а* $\lim\limits_{\alpha \to -1} p_\alpha = \pi/2$.

Доказательство. Поскольку $(\alpha+1)\left| \int\limits_0^1 (1-s)^\alpha \sin(\omega s) ds \right| < 1$, а в лемме 3 установлено, что $\omega_\alpha > \pi/2$, то из определения p_α получаем искомое неравенство. Далее, с учетом леммы 3 имеем

$$(\alpha+1)\int\limits_0^1 s^\alpha \sin(\varphi_\alpha s) ds = \sin \varphi_\alpha - \varphi_\alpha \int\limits_0^1 s^{\alpha+1} \cos(\varphi_\alpha s) ds \underset{\alpha \to \infty}{\to} 1.$$

Для доказательства второго утверждения леммы 4 остается еще раз использовать определение p_α.

Теорема 2. *Семейство* (6) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $0 < p \le \pi/2$.

Доказательство. Из леммы 4 следует, что $\bigcap\limits_{\alpha \in (-1,0]} (0, p_\alpha) = (0, \pi/2]$. Для доказательства теоремы остается применить признаки 4–6.

Замечания и комментарии

Первые попытки исследовать устойчивость уравнения (4) были предприняты в работе [14], где для $\alpha \in \mathbb{N}_0$ найден вид линий *D*-разбиения, а для случая $\alpha = 0$ получен достаточный признак асимптотической устойчивости. Критерий экспоненциальной устойчивости для уравнения (4) при $\alpha \in \mathbb{N}_0$ установлен в работе [15]; для указанных значений α критерий совпадает с признаком 2.

Признаки устойчивости для уравнения (6) являются новыми.

Интересно отметить, что, несмотря на различие уравнений (4) и (6), их области абсолютной устойчивости совпадают. Этот факт хорошо согласуется с результатами работ [16] и [17], где получены точные достаточные признаки устойчивости уравнений вида (1).

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.5336.2017/8.9) при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00928).

Список литературы

1. Мышкис А.Д. Линейные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 351 с.

2. Зубов В.И. К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 86–95.

3. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 484 с.

4. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 180 с.

5. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1963. – 548 с.

6. Funacubo M., Hara T., Sakata S. On the uniform asymptotic stability for a linear integro-differential equation of Volterra type // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – № 324. – P. 1036–1049.

7. J.C.F. de Oliveira, L.A.V. Carvalho. A Lapunov functional for a retarded differential equations // SIAM J. Math. Anal. – 1985. – № 16. – P. 1295–1305.

8. Вагина М.Ю. Логистическая модель с запаздывающим усреднением // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 4. – С. 167–173.

9. Малыгина В.В., Сабатулина Т.Л. Некоторые признаки устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 6. – С. 55–63.

10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Ч. 2. – М.: Наука, 1969. – 800 с.

11. Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем. – Л.: ЛКВВИА, 1949. – 140 с.

12. Малыгина В.В. Критерий осцилляции автономных уравнений с распределенным запаздыванием // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения: материалы конф., посвящ. 95-летию со дня рождения проф. Н.В. Азбелева (Пермь, 17–19 мая 2017 г.) / М-во образования и науки Рос. Федерации, Перм. нац. исслед. политехн. ун-т. – Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2018. – С. 142–151.

13. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. – М.: Высшая школа, 1988. – 167 с.

14. Кабине К. Применение метода *D*-разбиения к одному уравнению с распределенным запаздыванием // Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклонением аргумента. – М.: УДН, 1967. – Т. 5. – С. 110–115.

15. Сабатулина Т.Л. О точности границ области устойчивости дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием. // Вестник Тамбовск. ун-та. Серия: Естественные науки. – 2015. – Т. 20, вып. 5. – С. 1410–1418.

16. Krisztin T. On stability properties for one-dimensional functional differential equations // Funkcial. Ekvac. – 1991. – Vol. 34. – P. 241-256.

17. Вагина М.Ю., Кипнис М.М. Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // Математические заметки. – 2003. – Т. 74, № 5. – С. 786–789.

References

1. Myshkis A.D. Lineynye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentum [Linear equations with retarded argument]. M.: Nauka, 1972. 351 p.

2. Zubov V.I. K teorii lineynykh statsionarnykh sistem s zapazdyvayushchim argumentom [To the theory of linear stationary systems with retarded argument] // Izv. vuzov. Matem. 1958. No. 6. P. 86-95.

3. Kolmanovskiy V.B., Nosov V.R. Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemykh sistem s posledeystviem [Stability and Periodic Modes of Adjustable Systems with Aftereffect]. M.: Nauka, 1981. 484 p.

4. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [Introduction to the Theory of Functional Differential Equations]. M.: Nauka, 1991. 180 p.

5. Bellman R., Kuk K. Differentsial'no-raznostnye uravneniya [Differential-Difference Equations]. M.: Mir, 1963. 548 p.

6. Funacubo M., Hara T., Sakata S. On the uniform asymptotic stability for a linear integro-differential equation of Volterra type // J. Math. Anal. Appl. 2006. No. 324. P. 1036–1049.

7. J.C.F. de Oliveira, L.A.V. Carvalho. A Lapunov functional for a retarded differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1985. No. 16. P. 1295–1305.

8. Vagina M.Yu. Logisticheskaya model' s zapazdyvayushchim usredneniem [Logistic model with delayed averaging] // Avto-matika i telemekhanika. 2003. No. 4. P. 167–173.

9. Malygina V.V., Sabatulina T.L. Nekotorye priznaki ustoychivosti lineynykh avtonomnykh differentsial'nykh uravneniy s raspredelennym zapazdyvaniem [Some stability conditions for linear autonomous differential equations with distributed delay] // Izv. vuzov. Matem. 2007. No. 6. P. 55-63.

10. Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya, ch. 2. [A Course of Differential and Integral Calculus, Part 2]. M.: Nauka, 1969. 800 p.

11. Neymark Yu.I. Ustoychivost' linearizovannykh system [Stability of Linearized Systems]. L.: LKVVIA, 1949. 140 p.

12. Malygina V.V. Kriteriy ostsillyatsii avtonomnykh uravneniy s raspredelennym zapazdyvaniem [Oscillation criteria for autonomous equations with distributed delay] // Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya: teoriya i prilozheniya. Perm', PNIPU, 2018. P. 142–151.

13. Solomentsev E.D. Funktsii kompleksnogo peremennogo i ikh primeneniya [Complex Variable Functions with Applications]. M.: Vysshaya shkola, 1988. 167 p.

14. Kabine K. Primenenie metoda D-razbieniya k odnomu uravneniyu s raspre-delennym zapazdyvaniem [Application of D-decomposition method for an equation with distributed delay] // Tr. seminara po teorii diff. uravn. s otkl. arg. M.: UDN, 1967. Vol. 5. – P. 110–115.

15. Sabatulina T.L. O tochnosti granits oblasti ustoychivosti differentsial'nykh uravneniy s raspredelennym zapazdyvaniem [On the sharpness of the bounds of stability domain for differential equations with distributed delay] // Vestnik Tambovsk. un-ta. Ser.: Estestvennye nauki. 2015. Vol. 20, No. 5. P. 1410–1418.

16. Krisztin T. On stability properties for one-dimensional functional differential equations // Funkcial. Ekvac. 1991. Vol. 34. P. 241-256.

17. Vagina M.Yu., Kipnis M.M. Ustoychivost' nulevogo resheniya differrentsial'nogo uravneniya s zapazdyvaniyami [The stability of zero solution to a differential equation with delays] // Matem. zametki. 2003. Vol. 74, No. 5. P. 786–789.

Получено 07.06.2018

Об авторе

Малыгина Вера Владимировна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и механика», ведущий научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: mavera@list.ru).

About the author

Vera V. Malygina (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Leader Researcher at the Functional Differential Equations Research Center, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: mavera@list.ru).