DOI: 10.15593/2499-9873/2018.3.03
УДК 517.977

А.Я. Джаббарова[2], К.Б. Мансимов[1, 2]

[1]Бакинский государственный университет,
Баку, Азербайджанская Республика
[2]Институт систем управления НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджанская Республика

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ ТИПА РОССЕРА

Изучается одна задача оптимального управления гибридными системами типа Россера. Установлен аналог принципа максимума Понтрягина. Рассмотрен случай вырождения (особый случай) аналога условия максимума Понтрягина.

Ключевые слова: система типа Россера, гибридная система, принцип максимума Понтрягина, особые управления.

A.Y. Jabbarova[1], K.B. Mansimov[1, 2]

[1]Baku State University, Baku, Azerbaijan Republic
[2]Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan, Baku, Azerbaijan Republic

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS OF SINGULAR CONTROL IN A ROSSER TYPE HYBRID SYSTEMS CONTROL PROBLEM

We study one hybrid systems optimal control problem the Rosser type. An analog of the Pontryagins maximum principle is established. The case of degeneracy (a singular case) of the analog Pontryagins maximum condition is considered.

Keywords: Rosser type system, hybrid system, Pontryagins maximum principle, singular controls.

Введение

Как отмечено в [1–3] и др., многие процессы описываются совокупностью систем разностных и дифференциальных уравнений типа Россера [4, 5]. Такие системы уравнений называются гибридными системами типа Россера [1–7].

Настоящая статья посвящена постановке и исследованию одной задачи оптимального управления, описываемой гибридной системой типа Россера в предположении, что управляющая функция входит в граничное условие. При этом граничная функция определяется как решения нелинейного разностного уравнения. Сначала с использованием модификации метода приращений (см., например, [8–14]) доказано необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [14, 15]. Далее при помощи схемы, являющейся обобщением методики из [10, 11, 13], для рассматриваемой задачи изучен случай вырождения условия максимума Понтрягина. Установлены необходимые условия оптимальности особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u)=\varphi_1\left(a(x_1)\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}G\left(x,z(t_1,x)\right)+\int_{t_0}^{t_1}Q\left(t,y(t,x_1)\right)dt, \qquad (1)$$

при ограничениях

$$u(x)\in U\subset R^r,\ \ x\in X=\left\{x_0,x_0+1,\dots x_1-1\right\}, \qquad (2)$$

$$z_t(t,x)=f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right),\ \ t\in T=[t_0,t_1],\ \ x\in X\cup x_1, \qquad (3)$$

$$y(t,x+1)=g\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right),\ \ t\in T,\ \ x\in X,$$

$$\begin{gathered} z(t_0,x)=a(x),\quad x\in X\cup x_1,\\ y(t,x_0)=b(t),\ \ t\in T. \end{gathered} \qquad (4)$$

Здесь $f(t,x,z,y)$ и $g(t,x,z,y)$ – заданные n- и m-мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по z,y до второго порядка включительно, $b(t)$ – заданная m-мерная непрерывная вектор-функция, $a(x)$ – n-мерная дискретная вектор-функция, являющаяся решением разностного уравнения

$$a(x+1)=F\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right),\quad x\in X, \qquad (5)$$

с начальными условиями

$$a(x_0 - N) = a_{x_0 - N}, \ldots, a(x_0) = a_{x_0}, \tag{6}$$

где $F(x,a,c,u)$ – заданная *n*-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по a,c до второго порядка включительно, $a_{x_0-N},\ldots,a_{x_0}$ – заданные постоянные векторы, N – заданное натуральное число, разность $x_1 - x_0$ – натуральное число, $G(x,z)$ и $Q(t,y)$ – заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по второму аргументу до второго порядка включительно, $\varphi(a)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, U – заданное непустое, ограниченное множество, $u(x)$ – *r*-мерный дискретный вектор управляющих воздействий (допустимое управление).

Допустимое управление $u(x)$, доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(x),a(x),z(t,x),y(t,x))$ – оптимальным процессом.

2. Специальное приращение второго порядка критерия качества

Будем предполагать, что для любого фиксированного допустимого процесса $(u(x),a(x),z(t,x),y(t,x))$ множество

$$\begin{gathered} F(x,a(x),a(x-N),U) = \\ = \left\{\alpha \in R^n : \alpha = F(x,a(x),a(x-N),v),\ v \in U\right\} \end{gathered} \tag{7}$$

является выпуклым при всех $x \in X$.

Пусть $v(x) \in U,\ x \in X$ – некоторое допустимое управление.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in [0,1]$ и через $u(x;\varepsilon)$ обозначим произвольное допустимое управление такое, что соответствующее ему решение $a(x;\varepsilon)$ задачи (5)–(6) удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} a(x+1;\varepsilon) = F\left(x, a(x;\varepsilon), a(x-N;\varepsilon), u(x;\varepsilon)\right) \equiv \\ \equiv F\left(x, a(x;\varepsilon), a(x-N;\varepsilon), u(x)\right) + \\ +\varepsilon\left[F\left(x, a(x;\varepsilon), a(x-N;\varepsilon), v(x)\right) - F\left(x, a(x;\varepsilon), a(x-N;\varepsilon), u(x)\right)\right]. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу выпуклости множества (7) допустимое управление с вышеприведенными свойствами существует.

Далее через $\left(z(t,x;\varepsilon), y(t,x;\varepsilon)\right)$ обозначим решение следующей возмущенной системы уравнений:

$$\begin{aligned} z_t(t,x;\varepsilon) = f\left(t,x,z(t,x;\varepsilon), y(t,x;\varepsilon)\right), \\ y(t,x+1;\varepsilon) = g\left(t,x,z(t,x;\varepsilon), y(t,x;\varepsilon)\right), \end{aligned} \quad (9)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0,x;\varepsilon) = a(x;\varepsilon), \\ y(t,x_0;\varepsilon) = b(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Положим по определению

$$\alpha(t,x) = \left.\frac{\partial z(t,x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \quad \beta(t,x) = \left.\frac{\partial y(t,x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$\gamma(x) = \left.\frac{\partial a(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \quad Z(t,x) = \left.\frac{\partial^2 z(t,x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}, \quad (11)$$

$$Y(t,x) = \left.\frac{\partial^2 y(t,x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}, \quad A(x) = \left.\frac{\partial^2 a(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Учитывая введенные обозначения (11) и используя гладкость вектор-функций $f(t,x,z,y)$, $g(t,x,z,y)$, $F(x,a,c,u)$, можно показать, что $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$, $\gamma(x)$, $Z(t,x)$, $Y(t,x)$, $A(x)$ являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \alpha_t(t,x) = f_z\left(t,x,z(t,x), y(t,x)\right)\alpha(t,x) + \\ + f_y\left(t,x,z(t,x), y(t,x)\right)\beta(t,x), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\beta(t,x+1)=g_z(t,x,z(t,x),y(t,x))\alpha(t,x)+g_y(t,x,z(t,x),y(t,x))\beta(t,x),$$

$$\alpha(t_0,x)=\gamma(x), \tag{13}$$

$$\beta(t,x_0)=0,$$

$$\gamma(x+1)=F_a(x,a(x),a(x-N),u(x))\times$$

$$\times\gamma(x)+F_c(x,a(x),a(x-N),u(x))\gamma(x-N)+$$

$$+\Delta_{v(x)}F(x,a(x),a(x-N),u(x)), \tag{14}$$

$$\gamma(x_0-N)=0,....,\gamma(x_0)=0, \tag{15}$$

$$Z_t(t,x)=\frac{\partial f(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial z}Z(t,x)+$$

$$+\frac{\partial f(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial y}Y(t,x)+$$

$$+\alpha'(t,x)f_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x))\alpha(t,x)+$$

$$+\alpha'(t,x)f_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x))\beta(t,x)+$$

$$+\beta'(t,x)f_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x))\alpha(t,x)+$$

$$+\beta'(t,x)f_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x))\beta(t,x), \tag{16}$$

$$Z(t_0,x)=A(x), \tag{17}$$

$$Y(t,x+1)=\frac{\partial g(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial z}Z(t,x)+$$

$$+\frac{\partial g(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial y}Y(t,x)+$$

$$+\alpha'(t,x)g_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x))\alpha(t,x)+$$

$$+\alpha'(t,x)g_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x))\beta(t,x)+$$

$$+\beta'(t,x)g_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x))\alpha(t,x)+$$

$$+\beta'(t,x)g_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x))\beta(t,x), \tag{18}$$

$$Y(t,x_0)=0, \tag{19}$$

$$A(x+1)=F_a(x,a(x),a(x-N),u(x))A(x)+$$

$$+F_c(x,a(x),a(x-N),u(x))A(x-N)+$$

$$+\ 2\Delta_{v(x)}F_a\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right)\gamma(x)+$$
$$+\ 2\Delta_{v(x)}F_c\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right)\gamma(x-N)+$$
$$+\gamma'(x)F_{aa}\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right)\gamma(x)+$$
$$+\gamma'(x)F_{ac}\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right)\gamma(x-N)+$$
$$+\gamma'(x-N)F_{ca}\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right)\gamma(x)+$$
$$+\gamma'(x-N)F_{cc}\left(x,a(x),a(x-N),u(x)\right)\gamma(x-N), \tag{20}$$
$$A(x_0-N)=\ldots=A(x_0)=0. \tag{21}$$

Здесь и в дальнейшем по определению полагаем

$$\Delta_{v(x)}g\left(x,a(x),u(x)\right)\equiv g\left(x,a(x),v(x)\right)-g\left(x,a(x),u(x)\right),$$

а символом (') будем обозначать операцию транспонирования матриц (для векторов эта операция соответствует замене вектор-строки на вектор-столбец).

Учитывая (13)–(21), запишем специальное приращение критерия качества (1), соответствующее допустимым управлениям $u(x;\varepsilon)$ и $u(t,x)$, при помощи формулы Тейлора:

$$\Delta S_\varepsilon(u)=S\left(u(x;\varepsilon)\right)-S\left(u(x)\right)=\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial G'\left(x,z(t_1,x)\right)}{\partial z}\alpha(t_1,x)+$$
$$+\ \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial Q'\left(t,y(t,x_1)\right)}{\partial y}\beta(t,x_1)\,dt+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\alpha'(t_1,x)\frac{\partial^2 G'\left(x,z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\alpha(t_1,x)+$$
$$+\ \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial G'\left(x,z(t_1,x)\right)}{\partial z}Z(t_1,x)+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\beta'(t,x_1)\frac{\partial^2 Q'\left(t,y(t,x_1)\right)}{\partial y^2}\beta(t,x_1)\,dt+$$
$$+\ \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial Q'\left(t,y(t,x_1)\right)}{\partial y}Y(t,x_1)\,dt+o(\varepsilon^2)+\varepsilon\frac{\partial\varphi\left(a(x_1)\right)}{\partial a}\gamma(x_1)+$$
$$+\ \frac{\varepsilon^2}{2}\gamma'(x_1)\frac{\partial^2\varphi\left(a(x_1)\right)}{\partial a^2}\gamma(x_1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial\varphi\left(a(x_1)\right)}{\partial a}A(x_1)+o(\varepsilon^2). \tag{22}$$

Введем аналоги функции Гамильтона – Понтрягина в виде

$$H(t,x,z,y,p,q)=p'f(t,x,z,y)+q'g(t,x,z,y),$$

$$M(x,a,c,u,\psi) = \psi' F(x,a,c,u).$$

Здесь (ψ, p, q) – вектор-функция сопряженных переменных, являющаяся решением системы уравнений:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial z}, \tag{23}$$

$$q(t,x-1) = \frac{\partial H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial y},$$

$$p(t_1,x) = -\frac{\partial \varphi_2(x,z(t_1,x))}{\partial z}, \tag{24}$$

$$q(t,x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_3(x,y(t,x_1))}{\partial y}, \tag{25}$$

$$\psi(x-1) = \frac{\partial M(x,a(x),a(x-N),u(x))}{\partial a} +$$
$$+\frac{\partial M(x+N,a(x+N),a(x),u(x+N))}{\partial c} + p(t_0,x),$$

$$\psi(x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_1(a(x_1))}{\partial a}, \ \ \psi(x) = 0, \quad x > x_1 - 1. \tag{26}$$

По схеме, аналогичной приведенной в работах [10, 11, 13], с учетом (22) доказывается:

Теорема 1. Специальное приращение критерия качества (1) допускает представление в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u) = -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M(x,a(x),u(x),\psi(x)) +$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\Big\{\gamma'(x_1)\frac{\partial^2\varphi(a(x_1))}{\partial a^2}\gamma(x_1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\gamma'(x)M_{aa}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\gamma(x) +$$
$$+\gamma'(x)M_{ac}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\gamma(x-N) +$$
$$+\gamma'(x-N)M_{ca}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\gamma(x) +$$
$$+\gamma'(x-N)M_{cc}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\gamma(x-N)\Big] -$$

$$-2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\Delta_{v(x)}M_a\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\gamma(x)+$$

$$+\ \Delta_{v(x)}M_c\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\gamma(x-N)\Big]+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\alpha'(t_1,x)\frac{\partial^2 G'\left(x,z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\alpha(t_1,x)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\alpha'(t,x)\frac{\partial^2 H\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)}{\partial z^2}\alpha(t,x)+$$

$$+\ \beta'(t,x)\frac{\partial^2 H\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)}{\partial y\,\partial z}\alpha(t,x)+$$

$$+\ \alpha'(t,x)\frac{\partial^2 H\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)}{\partial z\,\partial y}\beta(t,x)+$$

$$+\ \beta'(t,x)\frac{\partial^2 H\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)}{\partial y^2}\beta(t,x)\Bigg]dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\beta'(t,x_1)\frac{\partial^2 Q\left(t,y(t,x_1)\right)}{\partial y^2}\beta(t,x_1)\,dt\Bigg\}+o\left(\varepsilon^2\right). \qquad (27)$$

Из разложения (27) в силу произвольности ε следует:

Теорема 2. Если множество (7) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}M\left(x,a(x),u(x),\psi(x)\right)\le 0 \qquad (28)$$

выполнялось для всех $v(x)\in U,\ \ x\in X$.

Неравенство (28) является необходимым условием оптимальности первого порядка в форме дискретного условия максимума [8–15]. Но нередки случаи вырождения условия максимума Понтрягина [9–13].

Определение 1. Допустимое управление $u(x)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлением, если для всех $v(x)\in U,\ \ x\in X$,

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}M\left(x,a(x),u(x),\psi(x)\right)=0. \qquad (29)$$

Из определения 1 ясно, что для особых управлений условие максимума Понтрягина (28) теряет свое содержательное значение.

Поэтому надо иметь новые необходимые условия оптимальности для особых управлений.

Предположим, что $u(x)$ особое, в смысле принципа максимума Понтрягина, оптимальное управление. Тогда из разложения (27) следует, что для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \alpha'(t_1,x)\frac{\partial^2 G(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\alpha(t_1,x)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\beta'(t,x_1)\frac{\partial^2 Q(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\beta(t,x_1)dt+\gamma'(x_1)\frac{\partial^2\varphi(a(x_1))}{\partial a^2}\gamma(x_1)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\alpha'(t,x)H_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\alpha(t,x)+$$
$$+\alpha'(t,x)H_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\beta(t,x)+$$
$$+\beta'(t,x)H_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\alpha(t,x)+$$
$$+\beta'(t,x)H_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\beta(t,x)\Big]dt-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\gamma'(x)M_{aa}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\gamma(x)+$$
$$+\gamma'(x)M_{ac}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\gamma(x-N)+$$
$$+\gamma'(x-N)M_{ca}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\gamma(x)+$$
$$+\gamma'(x-N)M_{cc}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\gamma(x-N)+$$
$$+2\Delta_{v(x)}M_a(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\gamma(x)+$$
$$+\Delta_{v(x)}M_c(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\gamma(x-N)\Big]\le 0 \qquad (30)$$

выполнялось для всех $v(x)\in U,\ x\in X$.

Неравенство (30) является неявным необходимым условием оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений. Опираясь на него, получим необходимое условие оптимальности, непосредственно выраженное через параметры задачи (1)–(5).

Пусть $V_{ij}(t,x;\ \tau,s)$, $i,j=1,2$ – матричные функции соответствующих размерностей, являющихся решениями задачи [16]:

$$\frac{\partial V_{11}(t,x;\ \tau,s)}{\partial \tau}=-V_{11}(t,x;\ \tau,s)\,f_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))-$$
$$-\,V_{12}(t,x;\ \tau,s)\,g_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),$$
$$V_{12}(t,x;\ \tau,s-1)=V_{11}(t,x;\ \tau,s)\,f_y(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))+$$
$$+\,V_{12}(t,x;\ \tau,s)\,g_y(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),$$
$$\frac{\partial V_{21}(t,x;\ \tau,s)}{\partial s}=-V_{21}(t,x;\ \tau,s)\,f_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))-$$
$$-\,V_{22}(t,x;\ \tau,s)\,g_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),$$
$$V_{22}(t,x;\ \tau,s-1)=V_{21}(t,x;\ \tau,s)\,f_y(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))+$$
$$+\,V_{22}(t,x;\ \tau,s)\,g_y(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),$$
$$V_{11}(t,x;\ t,s)=0,\qquad x_0\le s\le x-2,$$
$$V_{11}(t,x;\ t,x-1)=E_1,$$
$$V_{12}(t,x;\ \tau,x-1)=0,\qquad \tau\in[t_0,t],$$
$$V_{21}(t,x;\ t,s)=0,\qquad x_0\le s\le x-1,$$
$$V_{22}(t,x;\ \tau,x-1)=E_2$$

(E_1, E_2 – единичные матрицы соответствующих размерностей).

Тогда, как показано в [16], решение задачи (13)–(14) может быть представлено в виде

$$\alpha(t,x)=V_{11}(t,x+1;\ t_0,x)\gamma(x)+\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\ t_0,s)\gamma(s), \tag{31}$$

$$\beta(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\frac{\partial V_{11}(t,x+1;\ t_0,s)}{\partial t}\gamma(s).$$

Через $\Phi(x,s)$ обозначим решение задачи

$$\Phi(x,s-1)=\Phi(x,s)F_a(s,a(s),a(s-N),u(s))+$$
$$+\,\Phi(x,s+N)F_c(s+N,a(s+N),a(s),u(s+N)), \tag{32}$$
$$\Phi(x,x-1)=E,\quad \Phi(x,s)=0,\ \ s>x-1.$$

На основе формулы о представлении решений линейных неоднородных разностных уравнений (см., например, [10, 17]) решение задачи (15)–(16) может быть представлено в виде

$$\gamma(x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)\Delta_{v(s)}F\big(s,a(s),u(s)\big). \tag{33}$$

Используя (33), преобразуем представление (31). Имеем:

$$\begin{aligned}\alpha(t,x)&=\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,x)\Phi(x,s)\Delta_{v(s)}F\big(s,a(s),u(s)\big)+\\&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,s)\Phi(s,\tau)\Delta_{v(\tau)}F\big(\tau,a(\tau),u(\tau)\big)\right]=\\&=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[V_{11}(t,x+1;\,t_0,x)\Phi(x,s)+\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,\tau)\right]\times\\&\times\Delta_{v(s)}F\big(s,a(s),u(s)\big).\end{aligned} \tag{34}$$

Далее

$$\begin{aligned}\beta(t,x)&=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=x_0}^{x-1}\frac{\partial V_{21}(t,x;\,t_0,s)}{\partial t}\Phi(s,\tau)\Delta_{v(\tau)}F\big(\tau,a(\tau),u(\tau)\big)\right]=\\&=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=s+1}^{x-1}\frac{\partial V_{21}(t,x;\,t_0,\tau)}{\partial t}\Phi(\tau,s)\right]\Delta_{v(s)}F\big(s,a(s),u(s)\big).\end{aligned} \tag{35}$$

С помощью обозначений

$$L_1(t,x,s)=V_{11}(t,x+1;\,t_0,x)\Phi(x,s)+\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,\tau)\Phi(\tau,s),$$

$$L_2(t,x,s)=\sum_{\tau=s+1}^{x-1}\frac{\partial V_{21}(t,x;\,t_0,\tau)}{\partial t}\Phi(\tau,s)$$

формулы (34), (35) записываются в виде:

$$\alpha(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}L_1(t,x,s)\Delta_{v(s)}F\big(s,a(s),u(s)\big), \tag{36}$$

$$\beta(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}L_2(t,x,s)\Delta_{v(s)}F\big(s,a(s),u(s)\big). \tag{37}$$

С учетом представлений (33), (36), (37) по схеме, предложенной в [10, 13], доказываются соотношения:

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \alpha'(t_1,x)\frac{\partial^2 G(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\alpha(t_1,x)=$$

$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1} L_1(t_1,x,\tau)\Delta_{v(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))\right)'\frac{\partial^2 G(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\times$$

$$\times\left(\sum_{s=x_0}^{x-1} L_1(t_1,x,s)\Delta_{v(s)}F(s,a(s),u(s))\right)=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(\tau)}F'(\tau,a(\tau),u(\tau))\times$$

$$\times\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} L_1'(t_1,x,\tau)\frac{\partial^2 G(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}L_1(t_1,x,s)\right\}\times$$

$$\times\Delta_{v(s)}F(s,a(s),u(s)), \tag{38}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\beta'(t,x_1)\frac{\partial^2 Q(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\beta(t,x_1)\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} L_2(t,x_1,\tau)\Delta_{v(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))\right)'\times$$

$$\times\frac{\partial^2 Q(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1} L_2(t,x_1,s)\Delta_{v(s)}F(s,a(s),u(s))\right)dt=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\Delta_{v(\tau)}F'(\tau,a(\tau),u(\tau))\times$$

$$\times\left\{\int_{t_0}^{t_1} L_2'(t,x_1,\tau)\frac{\partial^2 Q(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}L_2(t,x_1,s)\,dt\right\}\times$$

$$\times\Delta_{v(s)}F(s,a(s),u(s)), \tag{39}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\alpha'(t,x)H_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\alpha(t,x)+$$

$$+\alpha'(t,x)H_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\beta(t,x)+$$

$$+\beta'(t,x)H_{yz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)\alpha(t,x)+$$

$$+\beta'(t,x)H_{yy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)\beta(t,x)\Big]dt=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(\tau)}F'\left(\tau,a(\tau),u(\tau)\right)\times$$

$$\times\left\{\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}L_1'(t,x,\tau)H_{zz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)L_1(t,x,s)+\right.\right.$$

$$+L_1'(t,x,\tau)H_{zy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)L_2(t,x,s)+$$

$$+L_2'(t,x,\tau)H_{yz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)L_1(t,x,s)+$$

$$\left.\left.+L_2'(t,x,\tau)H_{yy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)L_2(t,x,s)\right]dt\right\}\times$$

$$\times\Delta_{v(s)}F\left(s,a(s),u(s)\right),\tag{40}$$

$$\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\gamma'(x)M_{aa}\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\gamma(x)=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(\tau)}F'\left(\tau,a(\tau),a(\tau-N),u(\tau)\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\tau)M_{aa}\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\Phi(x,s)\right\}\times$$

$$\times\Delta_{v(s)}F\left(s,a(s),a(s-N),u(s)\right),\tag{41}$$

$$\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\gamma'(x)M_{ac}\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\gamma(x-N)=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(\tau)}F'\left(\tau,a(\tau),a(\tau-N),u(\tau)\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\tau)M_{ac}\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\Phi(x-N,s)\right\}\times$$

$$\times\Delta_{v(s)}F\left(s,a(s),a(s-N),u(s)\right),$$

$$\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\gamma'(x-N)M_{cc}\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\gamma(x-N)=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(\tau)}F'\left(\tau,a(\tau),a(\tau-N),u(\tau)\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x-N,\tau)M_{cc}\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\Phi(x-N,s)\right\}\times$$

$$\times\Delta_{v(s)}F\left(s,a(s),a(s-N),u(s)\right),$$

$$\gamma'(x_1)\frac{\partial^2\varphi\left(a(x_1)\right)}{\partial a^2}\gamma(x_1)=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(\tau)}F'\left(\tau,a(\tau),a(\tau-N),u(\tau)\right)\Phi'(x,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi\left(a(x_1)\right)}{\partial a^2}\Phi(x,s)\,\Delta_{v(s)}F\left(s,a(s),a(s-N),u(s)\right).$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\Delta_{v(x)}M_a\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)+$$

$$+\Delta_{v(x)}M_c\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\gamma(x-N)\Big]=$$

$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Big[\Delta_{v(x)}M_a\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\Phi(x,s)+\right.$$

$$+\Delta_{v(x)}M_c\left(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\right)\Phi(x-N,s)\Big]\times$$

$$\left.\times\Delta_{v(s)}F\left(s,a(s),a(s-N),u(s)\right)\right].$$

Следуя работам [10, 13], введем матричную функцию:

$$K(\tau,s)=-\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}L_1'(t_1,x,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x,z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}L_1(t_1,x,s)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}L_2'(t,x_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\left(t,y(t,x_1)\right)}{\partial y^2}L_2(t,x_1,s)\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Big[L_1'(t,x,\tau)H_{zz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)L_1(t,x,s)+\right.$$

$$+L_1'(t,x,\tau)H_{zy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)L_2(t,x,s)+$$

$$+L_2'(t,x,\tau)H_{yz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)L_1(t,x,s)+$$

$$\left.+L_2'(t,x,\tau)H_{yy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)L_2(t,x,s)\Big]\right]dt+$$

$$+\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Big[\Phi'(x,\tau)M_{aa}\big(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\big)\Phi(x,s)+$$
$$+\Phi'(x,\tau)M_{ac}\big(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\big)\Phi(x-N,s)+$$
$$+\Phi'(x-N,\tau)M_{ca}\big(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\big)\Phi(x-N,s)+$$
$$+\Phi'(x-N,\tau)M_{cc}\big(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\big)\Phi(x-N,s)\Big]-$$
$$-\Phi'(x_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi\big(a(x_1)\big)}{\partial a^2}\Phi(x_1,s). \tag{42}$$

Принимая во внимание тождества (38)–(41) и учитывая формулу (42), запишем неравенство (30) в виде

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(\tau)}F'\big(\tau,a(\tau),u(\tau)\big)K(\tau,s)\Delta_{v(s)}F\big(s,a(s),u(s)\big)+$$
$$+2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Big[\Delta_{v(x)}M_a\big(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\big)\Phi(x,s)+$$
$$+\Delta_{v(x)}M_c\big(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x)\big)\Phi(x-N,s)\Big]\times$$
$$\times\Delta_{v(s)}F\big(s,a(s),u(s)\big)\Bigg]\le 0. \tag{43}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. Если множество (7) выпуклое, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(x)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенство (43) выполнялось для всех $v(x)\in U,\ x\in X$.

Теорема 3 является довольно общей. Из нее, используя произвольность допустимого управления $v(x)\in U,\ x\in X,$ можно получить ряд легко проверяемых необходимых условий оптимальности особых управлений.

Приведем одно из них:

Теорема 4. Если множество (7) выпуклое, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\Delta_w F'\left(\xi, a\left(\xi\right), u\left(\xi\right)\right) K\left(\theta, \xi\right) \Delta_w F\left(\xi, a\left(\xi\right), u\left(\xi\right)\right) \le 0 \tag{44}$$

выполнялось для всех $\xi \in X$, $w \in U$.

Теорема 4 является аналогом условия Габасова – Кирилловой из [9] для рассматриваемой задачи. Условие (44) слабее, чем (43).

Заключение

Исследована задача оптимального управления гибридными системами типа Россера. С применением схем, предложенных в работах [10, 13], удалось получить аналог дискретного принципа максимума Л.С. Понтрягина и изучить случай вырождения условия максимума.

Список литературы

1. Kaczorek T. Positive 2D hybrid linear systems // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. – 2007. – Т. 55. – № 4. – С. 351–358.

2. Kaczorek T., Marchenko V., Sajewski L. Solvability of 2D hybrid linear systems-comparison of three different methods // Acta mechanica et automatic. – 2008. – Т. 2. – № 2. – С. 59–66.

3. Marchenko V.M., Borkovskaya I.M., Pyzhkova O.N. Hybrid control discrete-continuous 2-D systems // Technical University of Biolyostok. – 2010. – С. 3–8.

4. Roesser R.P. A discrete state-space model for linear image processing // IEEE Trans on Automatic Control. – 1975. – Т. AC–20, № 1. – С. 1–10.

5. Kaczorek T. The control and systems theory. – Warsaw: RWN, 1996.

6. De la Sen M.A. A note about total stability of a class of hybrid systems // Informatica. 2006. – Т. 17, № 4. – С. 565–576.

7. Марченко В.М., Борковская И.М., Пыжкова О.Н. Гибридные динамические системы с многомерным временем // Труды БГТУ, Серия: Физико-математические науки и информатика. – 2015. – № 6. – С. 3–9.

8. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. – Минск: Изд-во БГУ, 1981. – 400 с.

9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности в дискретных системах управления // Управляемые системы. ИМ (СО) АН СССР. – 1979. – Вып. 18. – С. 14–25.

10. Мансимов К.Б. Дискретные системы. – Баку: Изд-во БГУ, 2013. – 171 с.

11. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. – Баку: ЭЛМ, 2013. – 353 с.

12. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973. – 251 с.

13. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. – Баку: ЭЛМ, 1999. – 174 с.

14. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. – М.: URSS, 2011. – 272 с.

15. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1986. – 384 с.

16. Джаббарова А.Я., Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. О представлении решений одной дискретно-непрерывной линейной системы типа Россера // Доклады НАН Азербайджана. – 2013. – № 8. – С. 15–18.

17. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. – Минск: Изд-во БГУ. – 1973, 248 с.

References

1. Kaczorek T. *Positive 2D hybrid linear systems – Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*. 2007, Vol. 55, No. 4, pp. 351-358.

2. Kaczorek T., Marchenko V., Sajewski L. *Solvability of 2D hybrid linear systems-comparison of three different methods – Acta mechanica et automatic*. 2008, Vol. 2, No. 2, pp. 59-66.

3. Marchenko V.M., Borkovskaya I.M., Pyzhkova O.N. *Hybrid control discrete-continuous 2-D systems – Technical University of Biolyostok*. 2010, pp. 3-8.

4. Roesser R.P. *A discrete state-space model for linear image processing – IEEE Trans on Automatic Control*. 1975, AC – 20, No. 1, pp. 1-10.

5. Kaczorek T. The control and systems theory. Warsaw, Publ. RWN, 1996.

6. De la Sen M.A. *A note about total stability of a class of hybrid systems – Informatica*. 2006, Vol. 17, No. 4, pp. 565-576.

7. Marchenko V.M., Borkovskaya I.M., Pyzhkova O.N. *Gibridnyye dinamicheskiye sistemy s mnogomernym vremenem* [The stability of hybrid 2-D systems] – *Trudy BGU, Ser. fiz.-mat. nauk i informatika,* 2015, No. 6, pp. 3-9.

8. Gabasov R., Kirillova F.M. Metody optimizatsii [Optimization methods]. Minsk. Publ. of Belarus State University. 1981, 400 p.

9. Gabasov R., Kirillova F.M. K teorii neobkhodimykh usloviy optimal'nosti v diskretnykh sistemakh upravleniya [To the theory of necessary optimality conditions in discrete control systems] – *Upravlyayemyye sistemy. IM (SO) AN SSSR*, 1979, vol. 18, pp. 14-25.

10. Mansimov K.B. Diskretnyye sistemy [Discrete systems]. Baku, Publ. of Baku State University, 2013, 171 p.

11.Mardanov M.J., Mansimov K.B., Melikov T.K. Issledovaniye osobykh upravleniy i neobkhodimyye usloviya optimal'nosti vtorogo poryadka v sistemakh s zapazdyvaniyem[Investigation of special controls and necessary conditions for second-order optimality in systems with delay]. Baku, Publ. ELM, 2013, 363 p.

12.Gabasov R., Kirillova F.M. Osobyye optimal'nyye upravleniya [Special optimal controls]. Moscow, Publ. URSS. 2013, 256 p.

13. Mansimov K.B. Osobyye upravleniya v sistemakh s zapazdyvaniyem [Special controls in systems with delay] Baku, Publ. ELM, 1999, 174 p.

14. Gabasov R., Kirillova F.M. Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya [The maximum principle in the theory of optimal control]. Moscow, Publ. URSS, 2011, 272 p.

15. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko Ye.F. Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Publ. Nauka, 1986, 384 p.

16. Djabbarova A.Y., Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. *O predstavlenii resheniy odnoy diskretno-nepreryvnoy lineynoy sistemy tipa Rossera* [On the representation of solutions of a discrete continuous linear system of Rosser type] - *Dokl. NAN Azerbaidzhana*. 2013, No. 8, pp. 15.

17. Gabasov R., Kirillova F.M. Optimizatsiya lineynykh system [Optimization of linear systems]. Minsk, Publ. of Belarus State University. 1973, 248 p.

Получено 25.06.2018

Об авторах

Джаббарова Айгун Ящар кызы (Баку, Азербайджан) – аспирантка Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку, Az1141, ул. Б. Вахабзаде 9, e-mail: aygun-cabbarova@mail.ru).

Мансимов Камиль Байрамали оглы (Баку, Азербайджан) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку, Az1141, ул. Б. Вахабзаде 9, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

About the authors

Aygun Ya. Djabbarova (Baku, Azerbaijan) – Postgraduate Student, Institute of Control Systems of ANAS (9, B. Vahabzade av., Baku, AZ1141, Azerbaijan, e-mail: aygun-cabbarova@mail.ru).

Kamil B. Mansimov (Baku, Azerbaijan) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University, Head of the Laboratory of Control with Complex Dynamic Systems, Institute of Control Problems of ANAS (9, B. Vahabzade av., Baku, AZ1141, Azerbaijan, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).