DOI: 10.15593/2499-9873/2018.2.03
УДК 51-72

И.П. Попов

Курганский государственный университет, Курган, Россия

СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ДЕЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРОВ

Вводятся в рассмотрение скалярная и векторная производные вектора по другому вектору, которые могут иметь приложение к решению задач механики. Доказывается теорема о представлении скалярной производной в виде комбинации частных производных. Отмечено, что при решении ряда задач механики для упрощения вычислений систему координат выбирают таким образом, чтобы по крайней мере направление некоторых векторов совпадало с одной из координатных осей. Это порождает необходимость доказательства двух теорем для двухмерного и одномерного случаев. Доказывается теорема о представлении векторной производной в виде комбинации частных производных. Доказываются две аналогичные теоремы для двухмерного и одномерного случаев. В качестве характерных частных случаев рассматриваются скалярная и векторная производные по радиус-вектору, порождающие соответствующие формализмы, связывающие эти производные с оператором набла. Приводится примеры приложения полученных результатов к задачам механики.

Ключевые слова: векторное поле, деление, скалярная производная, векторная производная, вектор Умова, ускорение, скорость.

I.P. Popov

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation

SCALAR AND VECTOR DIVISION AND DERIVATIVES VECTORS

The work is devoted to the operations of differentiation in the space of vector fields and smooth functions. In mechanics, it is widely used derivative of a scalar function of the vector. To some extent, like it is determined by the derivative of the vector to another vector. However, formally interpreting the derivative as division differentials are entered in consideration of scalar and vector derived vector on another vector, which may have application to the solution of problems of mechanics. The definition of a derivative of a scalar vector field on another vector field. We prove a theorem on the representation of the scalar derivative in the form of a combination of partial derivatives. As a typical particular case is considered a scalar derivative in the radius vector, generating formalism linking it with the operator nabla. It is noted that in solving some problems in the mechanics to simplify the calculation coordinate system is chosen so that at least some vectors direction coincides with one of the coordinate axes. If it concerns the vector for derivation to be performed, in such cases, the formula for the three-dimensional case can not be used because some of this vector differentials are equal to zero. This circumstance makes it necessary to prove two theorems for the two-dimensional and one-dimensional case. The definition of a vector derivative of a vector field on another vector field. We prove a theorem on the representation of the derivative vector as a combination of partial derivatives. As a typical particular case considered vector derivative of the radius vector, generating formalism linking it with the operator nabla. We prove similar theorems for two-dimensional and one-dimensional case. We give examples of applications of these results to problems of mechanics.

Keywords: vector field, division, the scalar derivative, vector derivative, Umov vector, acceleration, speed.

Введение

Работа посвящена рассмотрению операций дифференцирования на пространстве векторных полей и гладких функций в R^3 [1–4].

В приложениях достаточно широко используется производная скалярной функции по вектору [5–9]. В какой-то мере подобно ей определяется производная вектора по другому вектору:

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} b_x + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} b_y + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} b_z.$$

Вместе с тем, формально интерпретируя производную как отношение дифференциалов, можно ввести в рассмотрение *скалярную* и *векторную* производные вектора по другому вектору, которые могут иметь приложение к решению задач механики.

1. Деление векторов

Определение 1. Частное $a/\mathbf{b}$ от деления скаляра a на вектор $\mathbf{b}$ есть вектор

$$\mathbf{c} = \frac{a}{\mathbf{b}} = \frac{a}{\mathbf{b}} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}} = \frac{a\mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \frac{a}{b^2}\mathbf{b}.$$

Обратно,

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \frac{a}{b^2}\mathbf{b} = a.$$

В частности,

$$\frac{1}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{b^2}.$$

Определение 2. Частное $\mathbf{e}/\mathbf{b}$ от скалярного деления вектора $\mathbf{e}$ на вектор $\mathbf{b}$ есть скаляр

$$p = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{b}} = \mathbf{e} \cdot \frac{1}{\mathbf{b}} = \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{b}}{b^2} = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}}{b^2} = \frac{c}{b^2} = \frac{e}{b}\cos\theta,$$

где θ – угол между векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{b}$. При этом

$$\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{b}} \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{e}} = \cos^2\theta.$$

Определение 3. Частное **e÷b** от векторного деления вектора **e** на вектор **b** есть вектор

$$\mathbf{q}=\mathbf{e}\div\mathbf{b}=\mathbf{e}\times\frac{1}{\mathbf{b}}=\mathbf{e}\times\frac{\mathbf{b}}{b^2}=\frac{\mathbf{e}\times\mathbf{b}}{b^2}=\frac{\mathbf{d}}{b^2}=\frac{e}{b}\frac{\mathbf{d}}{d}\sin\theta.$$

Здесь «×» – знак векторного произведения.

При этом

$$(\mathbf{e}\div\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\div\mathbf{e})=-\sin^2\theta\,,$$

$$\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{b}}\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{e}}-(\mathbf{e}\div\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\div\mathbf{e})=1,$$

$$p^2+\mathbf{q}^2=\frac{e^2}{b^2}\,.$$

Теорема 1. Если известны частные от скалярного p и векторного $\mathbf{q}$ деления двух векторов **e** и **b**, а также делитель **b**, то делимое определяется как

$$\mathbf{e}=\mathbf{b}p+\mathbf{b}\times\mathbf{q}\,.$$

Доказательство

$$\mathbf{b}p+\mathbf{b}\times\mathbf{q}=\frac{1}{b^2}\left[\mathbf{b}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{b})\right]=\frac{1}{b^2}\left[\mathbf{b}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{e}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e})\right]=\mathbf{e}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если известны частные от скалярного p и векторного $\mathbf{q}$ деления двух векторов **e** и **b**, а также делимое **e**, то делитель определяется как

$$\mathbf{b}=\frac{p\mathbf{e}+\mathbf{q}\times\mathbf{e}}{p^2+\mathbf{q}^2}\,.$$

Доказательство

$$\frac{p\mathbf{e}+\mathbf{q}\times\mathbf{e}}{p^2+\mathbf{q}^2}=\frac{1}{b^2}\frac{b^2}{e^2}\left[(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}+(\mathbf{e}\times\mathbf{b})\times\mathbf{e}\right]=$$

$$=\frac{1}{e^2}\left[(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}+\mathbf{b}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})-\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\right]=\mathbf{b}.$$

Теорема доказана.

2. Скалярная производная вектора по другому вектору

Определение 4. Операция

$$d\mathbf{a}\cdot\frac{1}{d\mathbf{b}}$$

называется скалярной производной векторного поля $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ по векторному полю $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$.

Теорема 3. Имеет место формула

$$d\mathbf{a}\cdot\frac{1}{d\mathbf{b}} = \frac{da_x}{db_x} + \frac{da_y}{db_y} + \frac{da_z}{db_z}. \qquad (1)$$

Доказательство

$$d\mathbf{a}\cdot\frac{1}{d\mathbf{b}} = d\left(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\right)\cdot\frac{1}{d\left(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}\right)} =$$

$$= \left(da_x\mathbf{i} + da_y\mathbf{j} + da_z\mathbf{k}\right)\cdot\frac{1}{db_x\mathbf{i} + db_y\mathbf{j} + db_z\mathbf{k}} =$$

$$= da_x\mathbf{i}\cdot\frac{1}{db_x\mathbf{i} + db_y\mathbf{j} + db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{db_x\mathbf{i}}{db_x\mathbf{i}} + da_y\mathbf{j}\cdot\frac{1}{db_x\mathbf{i} + db_y\mathbf{j} + db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{db_y\mathbf{j}}{db_y\mathbf{j}} +$$

$$+ da_z\mathbf{k}\cdot\frac{1}{db_x\mathbf{i} + db_y\mathbf{j} + db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{db_z\mathbf{k}}{db_z\mathbf{k}} =$$

$$= da_x\mathbf{i}\cdot\frac{db_x\mathbf{i}}{\left(db_x\mathbf{i} + db_y\mathbf{j} + db_z\mathbf{k}\right)\cdot db_x\mathbf{i}} + da_y\mathbf{j}\cdot\frac{db_y\mathbf{j}}{\left(db_x\mathbf{i} + db_y\mathbf{j} + db_z\mathbf{k}\right)\cdot db_y\mathbf{j}} +$$

$$+ da_z\mathbf{k}\cdot\frac{db_z\mathbf{k}}{\left(db_x\mathbf{i} + db_y\mathbf{j} + db_z\mathbf{k}\right)\cdot db_z\mathbf{k}} =$$

$$= \frac{da_x\mathbf{i}\cdot db_x\mathbf{i}}{db_x^2} + \frac{da_y\mathbf{j}\cdot db_y\mathbf{j}}{db_y^2} + \frac{da_z\mathbf{k}\cdot db_z\mathbf{k}}{db_z^2} =$$

$$= \frac{da_x db_x}{db_x^2} + \frac{da_y db_y}{db_y^2} + \frac{da_z db_z}{db_z^2} = \frac{da_x}{db_x} + \frac{da_y}{db_y} + \frac{da_z}{db_z}.$$

Теорема доказана.

Представляет интерес частный случай, когда берется скалярная производная по радиус-вектору $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

$$d\mathbf{a}\cdot\frac{1}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \mathrm{div}\mathbf{a} = \nabla\cdot\mathbf{a}\,.$$

Следствие. Имеет место формализм:

$$d\cdot\frac{1}{d\mathbf{r}} = \nabla\cdot\,.$$

Замечание. При решении ряда задач механики для упрощения вычислений систему координат выбирают таким образом, чтобы по крайней мере направление некоторых векторов совпадало с одной из координатных осей. Если это касается вектора, по которому предполагается выполнить дифференцирование, то в таких случаях формула (1) использоваться не может, поскольку некоторые дифференциалы этого вектора равны нулю.

Это обстоятельство обусловливает следующие две теоремы.

Теорема 4. Имеет место формула

$$d\mathbf{a}\cdot\frac{1}{d\left(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2\right)} = \frac{da_1}{db_1} + \frac{da_2}{db_2}\,,$$

где $\mathbf{e}$ – орты.

Доказательство

$$d\mathbf{a}\cdot\frac{1}{d\left(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2\right)} = d\left(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3\right)\cdot\frac{1}{d\left(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2\right)} =$$

$$= \left(da_1\mathbf{e}_1 + da_2\mathbf{e}_2 + da_3\mathbf{e}_3\right)\cdot\frac{1}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2} =$$

$$= da_1\mathbf{e}_1\cdot\frac{1}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2}\cdot\frac{db_1\mathbf{e}_1}{db_1\mathbf{e}_1} + da_2\mathbf{e}_2\cdot\frac{1}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2}\cdot\frac{db_2\mathbf{e}_2}{db_2\mathbf{e}_2} +$$

$$+ da_3\mathbf{e}_3\cdot\frac{1}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2}\cdot\frac{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2} =$$

$$= \frac{da_1\mathbf{e}_1\cdot db_1\mathbf{e}_1}{\left(db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2\right)\cdot db_1\mathbf{e}_1} + \frac{da_2\mathbf{e}_2\cdot db_2\mathbf{e}_2}{\left(db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2\right)\cdot db_2\mathbf{e}_2} +$$

$$+\frac{da_3\mathbf{e}_3\cdot(db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2)}{(db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2)\cdot(db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2)}=\frac{da_1db_1}{db_1^2}+\frac{da_2db_2}{db_2^2}=\frac{da_1}{db_1}+\frac{da_2}{db_2}.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 5. Имеет место формула

$$d\mathbf{a}\cdot\frac{1}{db_1\mathbf{e}_1}=\frac{da_1}{db_1}.$$

Пример 1. Тело массой m движется со скоростью

$$\mathbf{v}=\mathbf{i}\frac{1}{3}v+\mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{3}v+\mathbf{k}\frac{\sqrt{5}}{3}v.$$

В соответствии с [10] в этом случае интегральный (в смысле объемного интегрирования) вектор Умова

$$\mathbf{u}=\mathbf{i}\frac{1}{162}mv^3+\mathbf{j}\frac{3\sqrt{3}}{162}mv^3+\mathbf{k}\frac{5\sqrt{5}}{162}mv^3.$$

При этом

$$d\mathbf{u}\cdot\frac{1}{d\mathbf{v}}=\frac{du_x}{dv_x}+\frac{du_y}{dv_y}+\frac{du_z}{dv_z}=\frac{1}{18}mv^2+\frac{3}{18}mv^2+\frac{5}{18}mv^2=\frac{1}{2}mv^2,$$

что является кинетической энергией.

3. Векторная производная вектора по другому вектору

Определение 5. Операция

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{d\mathbf{b}}$$

называется векторной производной векторного поля **a** по векторному полю **b**.

Теорема 6. Имеет место формула

$$d\mathbf{a}\frac{1}{d\mathbf{b}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{da_y}{db_z}-\frac{da_z}{db_y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{da_z}{db_x}-\frac{da_x}{db_z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{da_x}{db_y}-\frac{da_y}{db_x}\right)\mathbf{k}\right]. \quad (2)$$

Доказательство

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{d\mathbf{b}}=d\left(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}\right)\times\frac{1}{d\left(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}\right)}=$$

$$=\left(da_x\mathbf{i}+da_y\mathbf{j}+da_z\mathbf{k}\right)\times\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}=$$

$$=da_x\mathbf{i}\times\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{db_y\mathbf{j}}{db_y\mathbf{j}}+\frac{db_z\mathbf{k}}{db_z\mathbf{k}}\right)+$$

$$+da_y\mathbf{j}\times\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{db_x\mathbf{i}}{db_x\mathbf{i}}+\frac{db_z\mathbf{k}}{db_z\mathbf{k}}\right)+$$

$$+da_z\mathbf{k}\times\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{db_x\mathbf{i}}{db_x\mathbf{i}}+\frac{db_y\mathbf{j}}{db_y\mathbf{j}}\right)=$$

$$=da_x\mathbf{i}\times\frac{db_y\mathbf{j}}{2\left(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}\right)\cdot db_y\mathbf{j}}+da_x\mathbf{i}\times\frac{db_z\mathbf{k}}{2\left(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}\right)\cdot db_z\mathbf{k}}+$$

$$+da_y\mathbf{j}\times\frac{db_x\mathbf{i}}{2\left(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}\right)\cdot db_x\mathbf{i}}+da_y\mathbf{j}\times\frac{db_z\mathbf{k}}{2\left(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}\right)\cdot db_z\mathbf{k}}+$$

$$+da_z\mathbf{k}\times\frac{db_x\mathbf{i}}{2\left(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}\right)\cdot db_x\mathbf{i}}+da_z\mathbf{k}\times\frac{db_y\mathbf{j}}{2\left(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}\right)\cdot db_y\mathbf{j}}=$$

$$=\frac{da_x\mathbf{i}\times db_y\mathbf{j}}{2db_y^2}+\frac{da_x\mathbf{i}\times db_z\mathbf{k}}{2db_z^2}+\frac{da_y\mathbf{j}\times db_x\mathbf{i}}{2db_x^2}+$$

$$+\frac{da_y\mathbf{j}\times db_z\mathbf{k}}{2db_z^2}+\frac{da_z\mathbf{k}\times db_x\mathbf{i}}{2db_x^2}+\frac{da_z\mathbf{k}\times db_y\mathbf{j}}{2db_y^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{da_xdb_y}{db_y^2}\mathbf{k}-\frac{da_xdb_z}{db_z^2}\mathbf{j}-\frac{da_ydb_x}{db_x^2}\mathbf{k}+\frac{da_ydb_z}{db_z^2}\mathbf{i}+\frac{da_zdb_x}{db_x^2}\mathbf{j}-\frac{da_zdb_y}{db_y^2}\mathbf{i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{da_x}{db_y}\mathbf{k}-\frac{da_x}{db_z}\mathbf{j}-\frac{da_y}{db_x}\mathbf{k}+\frac{da_y}{db_z}\mathbf{i}+\frac{da_z}{db_x}\mathbf{j}-\frac{da_z}{db_y}\mathbf{i}\right)=$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{da_y}{db_z} - \frac{da_z}{db_y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{da_z}{db_x} - \frac{da_x}{db_z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{da_x}{db_y} - \frac{da_y}{db_x}\right)\mathbf{k}\right].$$

Теорема доказана.

Представляет интерес частный случай, когда берется векторная производная по радиус-вектору $\mathbf{r}$.

$$d\mathbf{a} \times \frac{1}{d\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x}\right)\mathbf{k}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{a}.$$

Следствие. Имеет место формализм:

$$d \times \frac{1}{d\mathbf{r}} = -\frac{1}{2}\nabla \times .$$

Приведенное выше замечание обусловливает следующие две теоремы.

Теорема 7. Имеет место формула

$$d\mathbf{a} \times \frac{1}{db\mathbf{e}_1} = \frac{da_3}{db}\mathbf{e}_2 - \frac{da_2}{db}\mathbf{e}_3, \tag{3}$$

Доказательство

$$d\mathbf{a} \times \frac{1}{db\mathbf{e}_1} = d\left(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3\right) \times \frac{1}{db\mathbf{e}_1} = \left(da_1\mathbf{e}_1 + da_2\mathbf{e}_2 + da_3\mathbf{e}_3\right) \times \frac{1}{db\mathbf{e}_1} =$$

$$= da_1\mathbf{e}_1 \times \frac{1}{db\mathbf{e}_1} \cdot \frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1} + da_2\mathbf{e}_2 \times \frac{1}{db\mathbf{e}_1} \cdot \frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1} + da_3\mathbf{e}_3 \times \frac{1}{db\mathbf{e}_1} \cdot \frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1} =$$

$$= da_1\mathbf{e}_1 \times \frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1 \cdot db\mathbf{e}_1} + da_2\mathbf{e}_2 \times \frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1 \cdot db\mathbf{e}_1} + da_3\mathbf{e}_3 \times \frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1 \cdot db\mathbf{e}_1} =$$

$$= \frac{da_1\mathbf{e}_1 \times db\mathbf{e}_1}{db^2} + \frac{da_2\mathbf{e}_2 \times db\mathbf{e}_1}{db^2} + \frac{da_3\mathbf{e}_3 \times db\mathbf{e}_1}{db^2} =$$

$$= -\frac{da_2 db}{db^2}\mathbf{e}_3 + \frac{da_3 db}{db^2}\mathbf{e}_2 = \frac{da_3}{db}\mathbf{e}_2 - \frac{da_2}{db}\mathbf{e}_3 .$$

Теорема доказана.

Теорема 8. Имеет место формула

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{d\left(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2\right)}=-\frac{da_3}{2db_2}\mathbf{e}_1+\frac{da_3}{2db_1}\mathbf{e}_2+\left(\frac{da_1}{db_2}-\frac{da_2}{db_1}\right)\mathbf{e}_3.$$

Доказательство

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{d\left(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2\right)}=d\left(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3\right)\times\frac{1}{d\left(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2\right)}=$$

$$=\left(da_1\mathbf{e}_1+da_2\mathbf{e}_2+da_3\mathbf{e}_3\right)\times\frac{1}{db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2}=$$

$$=da_1\mathbf{e}_1\times\frac{1}{db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2}\cdot\frac{db_2\mathbf{e}_2}{db_2\mathbf{e}_2}+da_2\mathbf{e}_2\times\frac{1}{db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2}\cdot\frac{db_1\mathbf{e}_1}{db_1\mathbf{e}_1}+$$

$$+\,da_3\mathbf{e}_3\times\frac{1}{db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{db_1\mathbf{e}_1}{db_1\mathbf{e}_1}+\frac{db_2\mathbf{e}_2}{db_2\mathbf{e}_2}\right)=$$

$$=da_1\mathbf{e}_1\times\frac{db_2\mathbf{e}_2}{\left(db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2\right)\cdot db_2\mathbf{e}_2}+da_2\mathbf{e}_2\times\frac{db_1\mathbf{e}_1}{\left(db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2\right)\cdot db_1\mathbf{e}_1}+$$

$$+\,da_3\mathbf{e}_3\times\frac{db_1\mathbf{e}_1}{2\left(db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2\right)\cdot db_1\mathbf{e}_1}+da_3\mathbf{e}_3\times\frac{db_2\mathbf{e}_2}{2\left(db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2\right)\cdot db_2\mathbf{e}_2}=$$

$$=\frac{da_1\mathbf{e}_1\times db_2\mathbf{e}_2}{db_2^2}+\frac{da_2\mathbf{e}_2\times db_1\mathbf{e}_1}{db_1^2}+\frac{da_3\mathbf{e}_3\times db_1\mathbf{e}_1}{2db_1^2}+\frac{da_3\mathbf{e}_3\times db_2\mathbf{e}_2}{2db_2^2}=$$

$$=\frac{da_1db_2}{db_2^2}\mathbf{e}_3-\frac{da_2db_1}{db_1^2}\mathbf{e}_3+\frac{da_3db_1}{2db_1^2}\mathbf{e}_2-\frac{da_3b_2}{2db_2^2}\mathbf{e}_1=$$

$$=-\frac{da_3}{2db_2}\mathbf{e}_1+\frac{da_3}{2db_1}\mathbf{e}_2+\left(\frac{da_1}{db_2}-\frac{da_2}{db_1}\right)\mathbf{e}_3.$$

Теорема доказана.

Пример 2. Точка совершает вращательное движение с угловой скоростью

$$\omega=\mathbf{k}\varepsilon$$

и тангенциальным ускорением

$$\mathbf{a}_\tau=-\mathbf{i}a\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}+\mathbf{j}a\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Здесь $\mathbf{k}\varepsilon$ – угловое ускорение. В соответствии с (3)

$$d\mathbf{a}_\tau \times \frac{1}{d\boldsymbol{\omega}} = \frac{da_{\tau y}}{d\omega_z}\mathbf{i} - \frac{da_{\tau x}}{d\omega_z}\mathbf{j} = -\mathbf{i}at\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} + \mathbf{j}at\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} = \mathbf{v},$$

т.е. результат является линейной скоростью точки.

Пример 3. Скорость точки

$$\mathbf{v} = -\mathbf{i}\omega R\sin\omega t + \mathbf{j}\omega R\cos\omega t + \mathbf{k}\omega^2 Rt,$$

ускорение

$$\mathbf{a} = -\mathbf{i}\omega^2 R\cos\omega t - \mathbf{j}\omega^2 R\sin\omega t + \mathbf{k}\omega^2 R.$$

В соответствии с (2)

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{d\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\left[\frac{da_y}{dv_z}\mathbf{i} - \frac{da_x}{dv_z}\mathbf{j} + \left(\frac{da_x}{dv_y} - \frac{da_y}{dv_x}\right)\mathbf{k}\right] =$$

$$= -\mathbf{i}\frac{\omega}{2}\cos\omega t - \mathbf{j}\frac{\omega}{2}\sin\omega t - \mathbf{k}\omega = -\boldsymbol{\omega}^*.$$

Список литературы

1. Попов И.П. Математическое моделирование формального аналога волновой функции // Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – № 1. – С. 9–14.

2. Абдуллаев А.Р., Савочкина А.А. Разрешимость периодической задачи для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 1. – С. 9–18.

3. Няшина Н.Д. Математическая модель деформирования стали при мартенситных переходах // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 1. – С. 36–46.

4. Баранова А.А. Методика анализа процесса биологической деструкции дротаверина гидрохлорида в условиях микростатистики // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 2. – С. 7–17.

5. Роговой А.А., Столбова О.С. Термомеханика фазовых переходов в ферромагнитных сплавах с памятью формы при конечных де-

формациях // Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – № 1. – С. 15–24.

6. Сметанников О.Ю., Ильиных Г.В. Численное моделирование высокоскоростного течения газа в области с движущимися границами // Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – № 1. – С. 34–42.

7. Стволова С.С., Зубко И.Ю. О возможности описания упругой анизотропии в дискретно-атомистическом подходе на примере плоских квазикристаллических структур // Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – № 1. – С. 43–56.

8. Батин С.Е., Гитман М.Б. Об одном способе определения совместной плотности распределения функции нескольких случайных переменных // Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – № 1. – С. 59–66.

9. Колмогоров Г.Л., Мельникова Т.Е. Применение метода Ритца – Тимошенко для расчета круглых гибких пластин // Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – № 2. – С. 14–23.

10. Попов И.П. Волновые уравнения и меры движения // Вестник Удмуртского университета. Физика и химия. – 2014. – Вып. 2. – С. 30–33.

References

1. Popov I.P. Matematicheskoe modelirovanie formal'nogo analoga volnovoj funkcii [Mathematical modeling of the formal analog of the wave function]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* 2016, no. 1, pp. 9–14.

2. Abdullaev A.R., Savochkina A.A. Razreshimost' periodicheskoj zadachi dlya sistemy dvuh differencial'nyh uravnenij pervogo poryadka [Solvability of the periodic problem for a system of two first-order differential equations]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* 2015, no. 1, pp. 9–18.

3. Nyashina N.D. Matematicheskaya model' deformirovaniya stali pri martensitnyh perekhodah [Mathematical model of steel deformation during martensitic transitions]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* 2015, no. 1, pp. 36–46.

4. Baranova A.A. Metodika analiza processa biologicheskoj destrukcii drotaverina gidrohlorida v usloviyah mikrostatistiki [Methods of analysis of the process of biological degradation of drotaverine

hydrochloride under microstatistic conditions]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya*, 2015, no. 2, pp. 7–17.

5. Rogovoj A.A., Stolbova O.S. Termomekhanika fazovyh perekhodov v ferromagnitnyh splavah s pamyat'yu formy pri konechnyh deformaciyah [Thermomechanics of phase transitions in ferromagnetic alloys with shape memory for finite deformations]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* 2016, no. 1, pp. 15–24.

6. Smetannikov O.Yu., Il'inyh G.V. Chislennoe modelirovanie vysokoskorostnogo techeniya gaza v oblasti s dvizhushchimisya granicami [Numerical simulation of high-speed gas flow in a region with moving boundaries]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* 2016, no. 1, pp. 34–42.

7. Stvolova S.S., Zubko I.Yu. O vozmozhnosti opisaniya uprugoj anizotropii v diskretno-atomisticheskom podhode na primere ploskih kvazikristallicheskih struktur [On the possibility of describing elastic anisotropy in the discrete-atomistic approach on the example of planar quasicrystalline structures]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* 2016, no. 1, pp. 43–56.

8. Batin S.E., Gitman M.B. Ob odnom sposobe opredeleniya sovmestnoj plotnosti raspredeleniya funkcii neskol'kih sluchajnyh peremennyh [On one method for determining the joint distribution density of a function of several random variables]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* 2016, no. 1, pp. 59–66.

9. Kolmogorov G.L., Mel'nikova T.E. Primenenie metoda Ritca-Timoshenko dlya rascheta kruglyh gibkih plastin [Application of the Ritz-Tymoshenko method to calculate round flexible plates]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* 2016, no. 2, pp. 14–23.

10. Popov I.P. Volnovye uravneniya i mery dvizheniya [Wave equations and motion measures]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Fizika i himiya,* 2014, no. 2, pp. 30–33.

Получено 16.03.2018

Об авторе

Попов Игорь Павлович (Курган, Россия) – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета (640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4, e-mail: ip.popow@yandex.ru).

About the author

Igor' P. Popov (Kurgan, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Machine Tools and Instruments, Kurgan State University (63/4, Sovetskaja st., Kurgan, 640020, Russian Federation, e-mail: ip.popow@yandex.ru).