



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.13

УДК 539.313:517.968.72

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ С ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Е.Н. Огородников, В.П. Радченко, Л.Г. Унгарова

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 20 мая 2018 г.
Принята: 25 июня 2018 г.
Опубликована: 29 июня 2018 г.

Ключевые слова:

наследственно-упругое тело, нелинейность, структурные модели, операторы дробного интегро-дифференцирования, реологические модели, идентификация, интегральные уравнения, численные методы, экспериментальные данные, поливинилхлоридный пластикат.

АННОТАЦИЯ

На основе метода структурного моделирования и гипотезы Больцмана-Вольтерры о наследственно упругом деформируемом твердом теле рассмотрены линейные и нелинейные дробные аналоги классических реологических моделей: Ньютона (так называемая модель Скотт Блэра), Фойхта, Максвелла, Кельвина и Зенера с использованием аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля.

Выделены классы нелинейных математических моделей, для которых решение задачи ползучести удается получить в явном виде в терминах известных специальных функций. Разработана методика идентификации параметров предложенных математических моделей на основе экспериментальных данных по одноосному растяжению образцов при различных постоянных уровнях нагрузки. При наличии явных решений задачи ползучести параметры математических моделей определяются из решения задачи аппроксимации экспериментальных значений деформации методом наименьших квадратов с последующим уточнением методом координатного спуска. Для нелинейных математических моделей вязкоупругого деформирования, не позволяющих найти решение задачи ползучести в явном виде, разработана методика определения параметров модели на основе метода координатного спуска с обращением на каждом шаге к численному решению определяющего интегрального уравнения.

Методика идентификации параметров моделей с операторами дробного интегро-дифференцирования реализована на примере ползучести поливинилхлоридного пластика. Приводятся значения параметров для всех исследуемых моделей, выполнена проверка их адекватности экспериментальным данным, анализируются погрешности отклонения расчетных данных от опытных значений. В качестве примера выполнен сравнительный анализ относительной погрешности аппроксимации экспериментальных кривых ползучести и теоретических значений деформации в рамках линейного, нелинейного интегрируемого и нелинейного неинтегрируемого дробных аналогов модели Кельвина.

Обсуждаются вопросы целесообразности использования моделей вязкоупругого деформирования с операторами дробного интегро-дифференцирования на основе сопоставления расчетов по рассмотренным моделям с данными расчетов по моделям вязкоупругости с целочисленными операторами интегро-дифференцирования.

© ПНИПУ

© Огородников Евгений Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: eugen.ogo@gmail.com
Радченко Владимир Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: radch@samgtu.ru
Унгарова Луиза Гадильевна – ассистент, e-mail: algluiza@gmail.com

Evgeniy N. Ogorodnikov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: eugen.ogo@gmail.com
Vladimir P. Radchenko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: radch@samgtu.ru
Luiza G. Ungarova – Assistant, e-mail: algluiza@gmail.com



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

MATHEMATICAL MODELS OF NONLINEAR VISCOELASTICITY WITH OPERATORS OF FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION

E.N. Ogorodnikov, V.P. Radchenko, L.G. Ungarova

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 May 2018
 Accepted: 25 June 2018
 Published: 29 June 2018

Keywords:

hereditary-elastic body, nonlinearity, structural models, operators of fractional integro-differentiation, rheological models, identification, integral equations, numerical methods, experimental data, polyvinyl chloride plastic.

ABSTRACT

Based on the method of structural modelling and the Boltzmann-Volterra hypothesis of the hereditary elasticity deformable solid, the article considers linear and nonlinear fractional analogues of classical rheological models, such as Newton (the so-called model of Scott Blair), Voigt, Maxwell, Kelvin and Zener using the tool of fractional integro-differentiation of Riemann Liouville.

The classes of nonlinear mathematical models are distinguished, for which the solution of the creep problem can be obtained explicitly in terms of known special functions. A technique for identifying the parameters of the proposed mathematical models is developed on the basis of known experimental data on uniaxial stretching of samples at different and constant load levels. In the presence of explicit solutions to the creep problem, the parameters of mathematical models are determined from the solution of the problem of approximating the experimental values of deformation using the method of least squares with subsequent refinement by the coordinate-wise descent method at all time points for all stress values in a series of experiments. For nonlinear mathematical models of viscoelastic deformation, which do not allow to find the solution of the creep problem in an explicit form, a method for determining the model parameters based on the coordinate-wise descent method with inversion at each step to the numerical solution of the defining integral equation has been developed.

The method of identifying model parameters with operators of fractional integro-differentiation is realized on the example of creep of polyvinylchloride plastic compound. The values of the parameters for all the models studied are given, their adequacy to the experimental data is checked, and errors in the deviation of the calculated data from the experimental values are analyzed. As an example, a comparative analysis of the relative error in approximating the experimental creep curves by theoretical deformation values is made in the framework of a linear, nonlinear integrable and nonlinear nonintegrable fractional analog of the Kelvin model.

The article outlines the appropriateness of using the viscoelastic deformation models with the operators of fractional integro-differentiation, based on the comparison of calculations of the considered models with the calculations of the viscoelasticity models having integral operators of integro-differentiation.

© PNRPU

Введение

В работе [1] на основе метода структурного моделирования и гипотезы Больцмана-Вольтерры о наследственно-упругом деформируемом твердом теле рассмотрены линейные дробные аналоги некоторых классических реологических моделей:

– модель Скотт Блэра как аналог и обобщение модели Ньютона для вязкой жидкости

$$\sigma(t) = \eta D_{0+}^{\alpha} \varepsilon, \quad (1)$$

а также дробные аналоги моделей:

– Фойхта

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) + \eta D_{0+}^{\alpha} \varepsilon, \quad (2)$$

– Максвелла

$$E_2 \sigma(t) + \eta D_{0+}^{\alpha} \varepsilon = \eta E_2 D_{0+}^{\alpha} \varepsilon, \quad (3)$$

– Кельвина

$$(E_1 + E_2) \sigma(t) + \eta D_{0+}^{\alpha} \sigma = E_1 E_2 \varepsilon(t) + \eta E_2 D_{0+}^{\alpha} \varepsilon, \quad (4)$$

– Зенера

$$E_1 \sigma(t) + \eta D_{0+}^{\alpha} \sigma = E_1 E_2 \varepsilon(t) + \eta (E_1 + E_2) D_{0+}^{\alpha} \varepsilon, \quad (5)$$

где $D_{0+}^{\alpha} \varphi = (d/dt) I_{0+}^{1-\alpha} \varphi$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$ функции $\varphi(t)$ ($t > 0$); $I_{0+}^{\beta} \varphi = (I_{0+}^{\beta} \varphi)(t)$ – интеграл Римана-Лиувилля порядка $\beta > 0$ [2]; E_1, E_2, η – постоянные величины, которые при $\alpha = 1$ совпадают с модулями упругих элементов и коэффициентом демпфирования соответственно в классических моделях.

В указанной работе было отмечено, что если в исходном определяющем соотношении В. Вольтерры использовано ядро Абеля, то в определяющих соотношениях в дифференциальной форме возникнут дробные производные Римана- Лиувилля на отрезке временной оси. Показана корректность классической задачи Коши для дробных дифференциальных уравнений относительно некоторых линейных комбинаций функций напряжения и деформации. Найдены явные решения задачи ползучести при постоянном напряжении на стадиях нагружения и разгрузки. Отмечено, что они могут быть использованы для аппроксимации экспериментальных зависимостей

деформации от времени, полученных в опытах по одноосному растяжению деформируемых тел под действием постоянных нагрузок. Решение задачи аппроксимации позволяет идентифицировать параметры реологической модели и тем самым определить вид и структуру математической модели вязкоупругого поведения изучаемой среды в форме определяющего соотношения между функциями напряжения и деформации.

В работе [3] решена задача идентификации параметров линейных математических моделей для перечисленных выше механических моделей вязкоупругого деформирования в упрощенном варианте и приведены оценки погрешностей соответствующих аппроксимаций. В работах [1] и [3] были использованы данные эксперимента по нагружению образцов из поливинилхлоридного пластиката, приведенные в работе [4]. Расчеты [3] показали существенный разброс значений параметров математических моделей. Поэтому выполнялось осреднение их значений по всем реализациям. Математическая модель с усредненными параметрами затем предлагалась в качестве теоретической модели вязкоупругого поведения испытываемых образцов. При этом относительная погрешность аппроксимаций заключалась в пределах от 4 до 19 %, что хорошо видно из расчетных данных, приведенных в работе [3]. Как отмечено в работе [5], установленная в [3] зависимость идентифицируемых параметров модели от уровня напряжения в серии экспериментов и в особенности факт увеличения погрешности аппроксимаций экспериментальных точек теоретическими значениями деформации при крайних уровнях напряжения может свидетельствовать о нелинейности механической модели.

Построение нелинейных моделей базируется на обобщении линейных. Основные идеи классических (линейных) наследственно-упругих моделей восходит к работам В. Вольтерры [6, 7] и Х. Больцмана [8]. Они получили мощное развитие в работе Ю.Н. Работнова [9], которая, по существу, заложила начало школы механики наследственно-упругих твердых тел. Отметим здесь также несколько предшествующих работ [10–15].

К настоящему моменту опубликовано огромное количество работ, посвященных дробным реологическим моделям (см., например, библиографические списки в работах [2, 16–19]). Как отмечено в монографии [2, с. 443], большинство авторов используют в определяющих соотношениях дробные производные Капуто [20–23], производные Грюнвальда–Летникова [24] или Лиувилевскую форму дробного интегро-дифференцирования на всей числовой оси, в то время как дробные реологические модели описываются в терминах дробных производных Римана–Лиувилля на отрезке временной оси [25]. Для нахождения явных решений дифференциальных уравнений дробного порядка, возникающих из определяющих соотношений, используется в основном преобразование Лапласа. В работе [1] показано, что они могут быть найдены собственными методами дробного анализа путём нахождения ре-

зольвент интегральных уравнений в терминах некоторых специальных функций.

Проблема идентификации параметров дробных реологических моделей в процессе аппроксимации экспериментальных данных определёнными аналитическими зависимостями обсуждалась уже авторами ранних работ по наследственно упругим моделям (см., например, [11]). В монографии Ю.Н. Работнова [26, с. 86] приведен метод прямого определения параметров дробно-экспоненциального ядра ползучести, предложенный ранее авторами работы [27]. Однако указанный метод основан на сравнении образов преобразований Лапласа явного (аналитического) решения задачи с образом полиномиальной аппроксимации экспериментальных точек и минимизации суммы квадратов отклонений методом координатного спуска в пространстве параметров модели. В действительности проблема может быть решена непосредственно путём сопоставления экспериментальных и теоретических значений.

В немногочисленных публикациях последних десяти лет проблема идентификации параметров дробных моделей в основном решается на теоретическом уровне, например, методами спектрального анализа [28]. В работе [29] параметры модели определяются исходя из нескольких характерных точек, полученных в эксперименте, путем подстановки значений деформации в аналитические решения соответствующей задачи.

В связи с вышеизложенным целью настоящей работы является:

1) разработка методики идентификации параметров линейных дробных моделей (1)–(5) вязкоупругого деформирования поливинилхлоридного пластиката (ПВХП) с использованием методов наименьших квадратов и координатного спуска;

2) построение нелинейных моделей деформирования на основе обобщения линейных соотношений (1)–(5); выделение класса нелинейных математических моделей, для которых решение задачи ползучести можно получить в явном виде, и разработка численных методов решения этой задачи для неинтегрируемых моделей;

3) проверка адекватности линейных и нелинейных дробных моделей экспериментальным данным вязкоупругого деформирования ПВХП, анализ погрешностей моделей;

4) обсуждение целесообразности использования дробных моделей в теории вязкоупругости.

1. Описание эксперимента и идентификация параметров линейных математических моделей вязкоупругого тела

В работе [4] исследовано поведение поливинилхлоридных трубок длиной $l = 1000$ мм и площадью поперечного сечения $1,2 \text{ мм}^2$ при температуре $20 \text{ }^\circ\text{C}$ и постоянных напряжениях $\sigma_j \in \{4,655; 6,288; 8,738; 10,372; 12,005\}$ МПа ($j = \overline{1,5}$), действующих на образцы в те-

чение 8 ч, после чего производилась полная разгрузка образцов ($\sigma = 0$ при $t > 8$ ч). Экспериментальные значения деформации измерялись в определенные дискретные моменты времени. При каждом уровне напряжения испытывалось от 3 до 5 образцов, а затем значения деформации усреднялись. На рисунке значками представлены усредненные кривые экспериментальных значений деформации на стадиях нагрузки и разгрузки. Ось абсцисс отражает шкалу времени в часах, ось ординат – шкалу деформации.

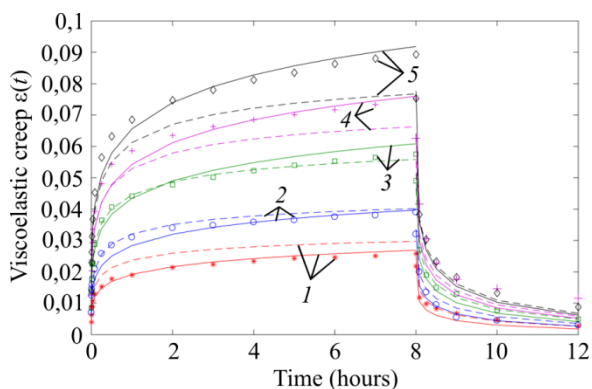


Рис. Экспериментальные (значки), расчетные по линейной модели (4) (штриховые линии) и расчетные по нелинейной модели (29) (сплошные линии) кривые деформации для поливинилхлоридного пластика при пяти постоянных уровнях напряжений: 1 – $\sigma = 4,655$ МПа; 2 – $\sigma = 6,288$ МПа; 3 – $\sigma = 8,738$ МПа; 4 – $\sigma = 10,372$ МПа; 5 – $\sigma = 12,005$ МПа с последующей разгрузкой

Fig. Experimental (symbols), calculated by the linear model (4) (dashed line) and calculated by the nonlinear model (29) (solid line) stress curves for polyvinyl chloride plasticate at five different constant stress levels: 1 – $\sigma = 4.655$ MPa; 2 – $\sigma = 6.288$ MPa; 3 – $\sigma = 8.738$ MPa; 4 – $\sigma = 10.372$ MPa; 5 – $\sigma = 12.005$ MPa with subsequent unloading

Данный материал имеет мгновенную упругую деформацию при приложении и снятии нагрузки, а под действием постоянной нагрузки проявляет свойство вязкоупругости.

В настоящей работе предлагается определять параметры линейных (и далее нелинейных) математических моделей путём аппроксимаций экспериментальных данных во временных точках t_i ($i = \overline{1, n}$, n – число измерений) по всем уровням напряжения $\sigma(t) = \sigma_j H(t)$ ($\sigma_j = \text{const}$, $j = \overline{1, N}$, N – количество уровней напряжения, $H(t)$ – функция Хевисайда) на основе метода наименьших квадратов с последующим уточнением значений этих параметров методом координатного спуска, используя аналитические или численные решения определяющих уравнений соответствующих моделей. Найденные в работе [1] аналитические зависимости деформации как функции времени и напряжения для линейных математических моделей позволяют вычислить теоретическую деформацию в тех же дискретных по

времени и напряжению точках: $\varepsilon_{ij} = f(\alpha, \beta, \gamma, \dots; t_i, \sigma_j)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ – идентифицируемые параметры. Искомые параметры определяются путем минимизации функционала

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N (\varepsilon_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij})^2 \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{\varepsilon}(t_i, \sigma_j)$ – экспериментальные значения деформации в дискретные моменты времени t_i при указанных выше уровнях напряжений σ_j .

Рассмотрим решение задачи идентификации параметров математической модели на примере использования линейного дробного аналога модели Кельвина (4). При изменении напряжения по закону

$$\sigma(t) = \sigma_0 [H(t) - H(t - T)], \quad (7)$$

где $\sigma_0 = \text{const} > 0$; T – момент времени разгрузки, решение задачи ползучести для модели (4) имеет вид [1]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2} \left[H(t) \left[1 + \frac{E_2}{E_1} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t \right) \right) \right] - H(t - T) \left[1 + \frac{E_2}{E_1} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\mu}; t - T \right) \right) \right] \right]; \quad (8)$$

$$\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} E_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu) \quad (9)$$

– обобщенная (двухпараметрическая) дробная экспоненциальная функция [30], $E_\alpha(z, \mu)$ – функция типа Миттаг–Леффлера [31].

Будем аппроксимировать экспериментальные данные $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ теоретическими значениями деформации на стадии нагружения в дискретные моменты времени t_i при заданных значениях напряжения σ_j по формуле

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_j}{E_2} + \frac{\sigma_j}{E_1} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t_i \right) \right). \quad (10)$$

Дробный аналог модели Кельвина содержит четыре параметра (α, E_1, E_2, η), подлежащие идентификации. В начальный момент времени $t_1 = 0$ полная деформация принимает значения, равные величинам мгновенной упругой деформации:

$$\varepsilon_j(0+) = \frac{\sigma_j}{E_2}. \quad (11)$$

Используя экспериментальные значения упругой деформации при каждом значении напряжения σ_j , из (11) находим величину E_2 , затем усреднением получаем оценку этой величины.

Остальные неизвестные параметры α, E_1, η предварительно находим в первом приближении. Рас-

кладывая дробно-экспоненциальную функцию в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t) &= E_\alpha(\lambda t^\alpha; 1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(1+k\alpha)} \approx 1 + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [2], из (10)–(12) получим приближенное равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} - \varepsilon_j(0+) &= \frac{\sigma_j}{E_1} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t_i \right) \right) \approx \\ &\approx \frac{\sigma_j t_i^\alpha}{\eta \Gamma(1+\alpha)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим $u_{ij} = \ln(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_j(0+))$, $\tau_i = \ln t_i$, $s_j = \ln \sigma_j$, $\delta = \ln(\eta \Gamma(1+\alpha))$, $\tilde{u}_{ij} = \ln(\tilde{\varepsilon}_{ij} - \tilde{\varepsilon}_j^{\text{мн}})$. Логарифмируя (13), получим $u_{ij} \approx s_j + \alpha \tau_i - \delta$.

Минимизируя далее функцию

$$\begin{aligned} f(\alpha, \delta) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n (\tilde{u}_{ij} - u_{ij})^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n (\tilde{u}_{ij} - s_j - \alpha \tau_i + \delta)^2 \rightarrow \min, \end{aligned}$$

найдем значения параметров α и δ в первом приближении, используя необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0.$$

Вернувшись к введенным выше обозначениям, получим приближенное значение параметра

$$\eta = e^\delta / \Gamma(1+\alpha).$$

Оставшийся параметр E_1 найдем из известной асимптотической формулы для линейного дробного аналога модели Кельвина (4), справедливой для $0 < \alpha < 1$ при $t \rightarrow \infty$ [1]:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \sigma_0 / E_1 + \sigma_0 / E_2, \quad (14)$$

где $\sigma_0 = \text{const}$. Приравнявая правую часть равенства (14) к последнему экспериментальному значению деформации $\tilde{\varepsilon}_j(t_n) = \tilde{\varepsilon}_{nj}$ ($t_n = T - 0$) при различных уровнях нагрузки σ_j , получим приближенное равенство

$$\frac{\sigma_j}{E_1} \approx \tilde{\varepsilon}_{nj} - \frac{\sigma_j}{E_2},$$

из которого определяется E_1 при каждом σ_j , а затем усреднением находится оценка величины E_1 .

Полученные значения параметров являются начальными приближениями для дальнейшего их уточнения

методом координатного спуска (методом Хука–Дживса [32]), в соответствии с которым осуществлялась вариация параметров в четырехмерном пространстве $\alpha \times E_1 \times E_2 \times \eta$ вдоль координатных осей в направлениях, минимизирующих функционал (6). В итоге получены следующие значения параметров модели Кельвина (4): $\alpha = 0,411$ (параметр дробности), $E_1 = 147,85$ МПа, $E_2 = 947,75$ МПа, $\eta = 127,42$ МПа·с. Погрешность аппроксимации экспериментальных данных по всем пяти реализациям (сплошные линии на рис. 1) в норме

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^{n_j} (\tilde{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_{ij})^2 / \sum_{i=1}^{n_j} (\tilde{\varepsilon}_{ij})^2 \right]}, \quad (15)$$

где N – количество кривых ($N = 5$); n_j – количество экспериментальных значений на реализации при $\sigma = \sigma_j$ ($j = \overline{1, N}$), составила 10,34 %. Для анализа полученных результатов в табл. 1 приведены погрешности аппроксимаций в каждой из пяти реализаций модели Кельвина (4).

По разработанной схеме идентификации параметров аналогичные расчеты выполнены и для остальных моделей (1)–(3) и (5). Для моделей Скотт Блэра (1) и дробного аналога модели Фойхта (2), которые не описывают мгновенную упругую деформацию, использовались экспериментальные данные без учета упругой деформации.

В табл. 2 приведены погрешности всех моделей (1)–(5) для времени $t \in [0; 12]$ с (т.е. учитывалась деформация и при нагрузке, и при разгрузке), рассчитанные в норме (15). Анализ данных табл. 2 свидетельствует, что в целом все пять линейных моделей дают соизмеримую погрешность, при этом модели Скотт Блэра и Максвелла дают несколько худшие результаты, чем остальные.

Второй важный результат следует из анализа данных, представленных на рис. 1 и в табл. 1. Здесь наблюдается систематическое увеличение погрешности при относительно больших и относительно малых значениях напряжений. Это, в свою очередь, свидетельствует о наличии нелинейности между напряжениями и деформациями и ставит проблему разработки нелинейных дробных моделей вязкоупругого деформирования, что и является одной из целей дальнейших исследований.

Таблица 1

Погрешности аппроксимаций для линейного дробного аналога модели Кельвина (4) для каждой реализации

Table 1

Approximation errors for the linear fractional Kelvin model (4) for each implementation

Stresses, MPa	4.655	6.288	8.738	10.372	12.005
Δ , %	19.103	5.406	3.212	11.897	12.101

Таблица 2

Средние погрешности аппроксимаций для различных линейных дробных математических моделей поливинилхлоридного пластика

Table 2

Average errors of approximations for different linear fractional mathematical models of polyvinyl chloride plastic

Fractional models of				
Scott Blair (1)	Voigt (2)	Maxvell (3)	Kelvin (4)	Zener (5)
13.975 %	10.901 %	12.842 %	10.343 %	10.329 %

2. Нелинейные математические модели, допускающие аналитическое решение задачи ползучести. Идентификация параметров

Существуют различные феноменологические подходы к введению нелинейных зависимостей в определяющее соотношение между напряжением и деформацией. Например, в равенстве

$$\sigma(t) = A\varepsilon(t), \tag{16}$$

где $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ – напряжение и деформация в момент времени t , можно предположить, что непрерывный оператор A является нелинейным. Однако для создания «работоспособной» математической модели вид оператора A требует конкретизации. Как уже отмечалось в разд. 1 в математических моделях вязкоупругого тела с памятью возникают дифференциальные или интегральные операторы Римана-Лиувилля дробного порядка $\alpha \in (0,1)$, причем параметр α – один из параметров, подлежащих идентификации по результатам экспериментальных данных. Считая оператор A в равенстве (16) линейным, можно рассматривать зависимости следующего вида:

$$\varphi(\sigma(t)) = Af(\varepsilon(t)),$$

где $\varphi(x)$, $f(x)$ – монотонные, достаточно гладкие функции. Вид этих функциональных зависимостей также требует конкретизации. Обычно рассматриваются зависимости степенного характера.

Поскольку в работе используется метод структурного моделирования вязкоупругого тела, будем считать, что зависимость между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ в упругих элементах структурных моделей определяется равенствами вида

$$\sigma = E\varepsilon^n \quad (n > 0). \tag{17}$$

Вязкие элементы будем моделировать зависимостями, в которых напряжение пропорционально степени дробной производной Римана-Лиувилля функции деформации

$$\sigma = \eta \left(D_{0+}^\alpha \varepsilon \right)^m \quad (m > 0, 0 < \alpha < 1) \tag{18}$$

или пропорционально дробной производной степени деформации

$$\sigma = \eta D_{0+}^\alpha \varepsilon^m \quad (m > 0, 0 < \alpha < 1). \tag{19}$$

В приведенных равенствах E и η – некоторые положительные константы, совпадающие с модулем упругого элемента и коэффициентом демпфирования, если $n = m = 1, \alpha = 1$. Заметим, что при $\alpha = 1$ нелинейный вариант элемента Скотт Блэра (18) превращается в хорошо известную нелинейную зависимость напряжения от степени скорости деформации $\sigma = \eta(\dot{\varepsilon})^m$. Нелинейный же вариант элемента Скотт Блэра (19) при $\alpha = 1$ приводит к закону, в котором напряжение пропорционально скорости деформации с коэффициентом, зависящим от величины деформации $\sigma = k(\varepsilon)\dot{\varepsilon}$, где $k = \eta m \varepsilon^{m-1}$. Отметим, что соотношения такого типа соответствуют теории упрочнения [37], широко используемой при описании ползучести различных материалов.

Выполняя последовательное соединение упругого элемента (17) и вязкого элемента (18), получим первый вариант нелинейного дробного аналога модели Максвелла в дифференциальной форме

$$D_{0+}^\alpha \left(\varepsilon - \left(\frac{\sigma}{E} \right)^{1/n} \right) = \left(\frac{\sigma}{\eta} \right)^{1/m}. \tag{20}$$

Если соединить последовательно тот же упругий элемент и вязкий элемент (19), то получим второй вариант этой же математической модели

$$D_{0+}^\alpha \left(\varepsilon - \left(\frac{\sigma}{E} \right)^{1/n} \right)^m = \frac{\sigma}{\eta}. \tag{21}$$

Нелинейные уравнения (20) и (21) – простейшие дифференциальные уравнения с производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$. Они позволяют найти функцию деформации $\varepsilon(t)$ для любой зависимости $\sigma = \sigma(t)$. Действительно, с начальным условием $\lim_{t \rightarrow 0+} (\varepsilon(t) - (\sigma(t)/E)^{1/n}) = 0$ уравнение (20) редуцируется к интегральному соотношению

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma(t)}{E} \right)^{1/n} + I_{0+}^\alpha \left(\frac{\sigma(t)}{\eta} \right)^{1/m}, \tag{22}$$

а уравнение (21) – к соотношению

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma(t)}{E} \right)^{1/n} + \left(I_{0+}^\alpha \frac{\sigma(t)}{\eta} \right)^{1/m}, \tag{23}$$

которые можно рассматривать, с одной стороны, как нелинейные дробные аналоги модели Максвелла в ин-

тегральной форме, с другой – как представления функции деформации при известном законе нагружения. Вычисляя дробные интегралы для $\sigma = \sigma_0 H(t)$, где $\sigma_0 > 0$, найдем решения задачи ползучести для обоих вариантов нелинейной модели Максвелла:

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma_0}{E}\right)^{1/n} + \left(\frac{\sigma_0}{\eta}\right)^{1/m} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad (24)$$

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma_0}{E}\right)^{1/n} + \left(\frac{\sigma_0}{\eta}\right)^{1/m} \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{1/m}, \quad (25)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Выполняя параллельное соединение упругого элемента (17) и вязкого элемента (18), получим первый вариант нелинейного дробного аналога модели Фойхта в дифференциальной форме:

$$\sigma = E\varepsilon^n + \eta(D_{0t}^\alpha \varepsilon)^m. \quad (26)$$

Это определяющее соотношение является существенно нелинейным дифференциальным уравнением с дробной производной Римана-Лиувилля. Найти аналитическое решение подобного дифференциального уравнения не представляется возможным. Вопросы, связанные с методами численного решения нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными и проблемой идентификации параметров такого рода моделей, будут рассмотрены в следующем разделе данной статьи.

Если соединить параллельно упругий элемент (17) и вязкий элемент (19), то получим второй вариант нелинейного дробного аналога модели Фойхта:

$$\sigma = E\varepsilon^n + \eta D_{0t}^\alpha \varepsilon^m. \quad (27)$$

Если в этом соотношении ограничиться предположением $m = n$, то уравнение (27) окажется хорошо известным дифференциальным уравнением Барретта относительно функции $u(t) = \varepsilon^n(t)$ [33]. Его решение с однородным начальным условием при $\alpha \in (0,1)$ в терминах дробно-экспоненциальной функции записывается в виде

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{\sigma_0}{E} (1 - \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t)) \right]^{1/n}, \quad (28)$$

где функция $\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t)$ определена соотношением (9).

Выполним теперь последовательное соединение второго варианта дробного аналога модели Фойхта (27) с параметрами E_1, n_1, η, α ($m = n_1$), описываемого в дифференциальной форме равенством

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1^{n_1} + \eta D_{0t}^\alpha \varepsilon_1^{n_1},$$

с упругим элементом, определяемым зависимостью $\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2^{n_2}$, где σ_1, σ_2 – напряжения, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – деформации в соответствующих структурных элементах. Учитывая, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, а полная деформация $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, получим определяющее соотношение для нелинейного варианта дробного аналога модели Кельвина в следующем виде:

$$\eta D_{0t}^\alpha \left(\varepsilon - \left(\frac{\sigma}{E_2} \right)^{1/n_2} \right)^{n_1} + E_1 \left(\varepsilon - \left(\frac{\sigma}{E_2} \right)^{1/n_2} \right)^{n_1} = \sigma(t). \quad (29)$$

Обозначая $u(t) = \left(\varepsilon(t) - \left(\frac{\sigma(t)}{E_2} \right)^{1/n_2} \right)^{n_1}$, получим

вновь дифференциальное уравнение Барретта относительно функции $u(t)$:

$$\eta D_{0t}^\alpha u(t) + E_1 u(t) = \sigma(t). \quad (30)$$

С начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\varepsilon(t) - \left(\frac{\sigma(t)}{E_2} \right)^{1/n_2} \right)^{n_1} = 0$$

уравнение (30) редуцируется к интегральному уравнению Вольтерры второго рода с ядром Абеля

$$u(t) + \frac{E_1}{\eta} I_{0t}^\alpha u(t) = \frac{1}{\eta} I_{0t}^\alpha \sigma(t).$$

Его решение записывается в терминах резольвентного оператора [1]

$$E_{0t;\lambda}^{\mu,\alpha} f = \int_0^t \text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; \tau) f(\tau) d\tau.$$

Используя свойства этого оператора [34], нетрудно найти решение интегрального уравнения для $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ в виде

$$u(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t \right) \right).$$

Для функции деформации получим выражение

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma_0}{E_2} \right)^\gamma + \left[\frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t \right) \right) \right]^\beta, \quad (31)$$

где $\beta = 1/n_1$; $\gamma = 1/n_2$.

Записывая закон изменения напряжения равенством $\sigma(t) = \sigma_0 (H(t) - H(t-T))$, найдем зависимость для деформации на стадии нагрузки ($\sigma_0 = \text{const} > 0$ при $0 < t \leq T$) и разгрузки ($\sigma_0 = 0$ при $t > T$) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \left(\frac{\sigma_0}{E_2}\right)^\gamma (H(t) - H(t-T)) + \\ & + \left(\frac{\sigma_0}{E_1}\right)^\beta \left[H(t) \left(1 - \text{Exp}\left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t\right)\right) - \right. \\ & \left. - H(t-T) \left(1 - \text{Exp}\left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t-T\right)\right) \right]^\beta. \end{aligned} \quad (32)$$

Продемонстрируем методику решения задачи идентификации параметров на примере нелинейного дробного аналога модели Кельвина (29) применительно к уже рассмотренным экспериментальным данным ПВХП.

Сохраняя обозначения, принятые в разд. 1, аппроксимируем экспериментальные данные теоретическими значениями деформации в точках (t_i, σ_j) , вычисленными по формуле (31):

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\sigma_j}{E_2}\right)^\gamma + \left[\frac{\sigma_j}{E_1} \left(1 - \text{Exp}\left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t_i\right)\right)\right]^\beta. \quad (33)$$

В начальный момент времени $t_1 = 0$ возникает лишь мгновенная упругая деформация

$$\varepsilon_j(0+) = \left(\frac{\sigma_j}{E_2}\right)^\gamma. \quad (34)$$

Логарифмируя равенство (34) и учитывая обозначения: $u_j = \ln \varepsilon_j(0+)$, $s_j = \ln \sigma_j$, $c = \gamma \ln E_2$, $\tilde{u}_j = \ln \tilde{\varepsilon}_j(0+)$, для нахождения параметров γ и E_2 минимизируем функционал:

$$f(\gamma, c) = \sum_{j=1}^N (\tilde{u}_j - u_j)^2 = \sum_{j=1}^N (\tilde{u}_j - \gamma s_j + c)^2 \rightarrow \min.$$

Остальные неизвестные параметры α , E_1 , η , β предварительно находим в первом приближении, подобно тому как это делалось для линейных моделей. Для этого возьмем первые два члена ряда дробно-экспоненциальной функции (12). Тогда из равенства (33) следует, что

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon_j(0+) = \left[\frac{\sigma_j}{E_1} \left(1 - \text{Exp}\left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t_i\right)\right)\right]^\beta \approx \left(\frac{\sigma_j t_i^\alpha}{\eta \Gamma(1+\alpha)}\right)^\beta$$

Прологарифмируем это приближенное равенство. Получим

$$u_{ij} \approx \beta \left(s_j + \alpha \tau_i - \delta\right),$$

где $u_{ij} = \ln(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_j(0+))$, $\tau_i = \ln t_i$, $s_j = \ln \sigma_j$, $\delta = \ln(\eta \Gamma(1+\alpha))$. Обозначая $\tilde{u}_{ij} = \ln(\tilde{\varepsilon}_{ij} - \tilde{\varepsilon}_j(0+))$ и минимизируя функционал

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta, \delta) = & \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n (\tilde{u}_{ij} - u_{ij})^2 = \\ = & \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n (\tilde{u}_{ij} - \beta(s_j + \alpha \tau_i - \delta))^2 \rightarrow \min, \end{aligned}$$

на основании метода наименьших квадратов определяем величины β , α , δ и далее $\eta = e^\delta / \Gamma(1+\alpha)$.

Для нахождения оставшегося параметра E_1 заметим, что, как и в линейной модели, функция деформации в задаче ползучести в рамках нелинейного дробного аналога модели Кельвина имеет асимптоту. Из формулы (31) следует существование предела

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma_0}{E_2}\right)^\gamma + \left(\frac{\sigma_0}{E_1}\right)^\beta. \quad (35)$$

Приравнивая правую часть равенства (35) к последнему экспериментальному значению деформации $\tilde{\varepsilon}_j(t_n) = \tilde{\varepsilon}_{nj}$ на стадии нагрузки ($t_n = T$) при различных уровнях нагрузки σ_j , получим приближенные равенства

$$\left(\frac{\sigma_j}{E_1}\right)^\beta \approx \tilde{\varepsilon}_{nj} - \tilde{\varepsilon}_{0j},$$

где $\tilde{\varepsilon}_{0j} = \tilde{\varepsilon}_j(0+)$, из которых параметр E_1 вычисляется для каждого уровня нагрузки σ_j ($j = \overline{1, N}$) и далее производится усреднение этой величины.

Полученные значения параметров для стадии нагружения будут являться начальными приближениями для дальнейшего их уточнения методом координатного спуска, но уже на стадиях нагрузки и разгрузки.

Рассчитанные по описанной схеме значения параметров модели Кельвина (29) приведены в последней строке табл. 3. По аналогичной схеме определялись значения остальных нелинейных моделей, допускающих аналитические решения, которые также представлены в табл. 3. Отметим, что для моделей (18), (19) и (27), не описывающих мгновенно-упругую деформацию, использовались лишь экспериментальные значения вязкоупругой деформации

В табл. 4 приведены оценки погрешности в соответствии с нормой (15) для всех исследованных нелинейных моделей, допускающих аналитические решения, при этом минимальную погрешность дает модель Кельвина (29). Для сравнения в первой строке приведены погрешности для линейных моделей. Модели Скотт Блэра (18) и (19) при переходе к линейному случаю ($n = 1, m = 1$) принимают вид уравнения (1), нелинейная модель Фойхта (27) становится моделью (2), нелинейные модели Максвелла (20) и (21) преобразуются в (3), а нелинейная модель Кельвина (29) – в (4).

В качестве примера на рис. 1 сплошными линиями нанесены расчетные данные по нелинейной модели (29).

Таблица 3

Значения параметров для нелинейных дробных моделей, допускающих аналитические решения задачи вязкоупругости

Table 3

The values of parameter for nonlinear fractional models that admit analytical solutions of the viscoelasticity problem

Fractional Models of	α	E_1 , MPa	E_2 , MPa	η , MPa·с	β	γ
Scott Blair (18)	0.180	–	–	126.026	1.298	–
Scott Blair (19)	0.173	–	–	139.119	1.271	–
Voigt (27)	0.274	44.413	–	84.081	1.299	–
Maxvell (20)	0.180	–	331.807	127.721	1.291	1.281
Maxvell (21)	0.174	–	331.807	139.342	1.271	1.281
Kelvin (29)	0.284	47.743	331.807	81.328	1.281	1.299

Таблица 4

Погрешности аппроксимаций (Δ , %) для линейных и нелинейных дробных аналогов реологических моделей, допускающих аналитические решения задачи вязкоупругости

Table 4

The approximation errors (Δ , %) for linear and nonlinear fractional analogs of the rheological models that admit analytical solutions of the viscoelasticity problem

	Fractional models of					
	Scott Blair (18)	Scott Blair (19)	Voigt (27)	Maxvell (20)	Maxvell (21)	Kelvin (29)
Linear ($n = 1, m = 1$)	13.975	13.975	10.901	12.842	12.842	10.343
Nonlinear	9.167	8.002	8.007	7.985	7.022	7.014

Анализ данных табл. 4 свидетельствует о том, что средние погрешности аппроксимаций значений деформации ПВХП нелинейными дробными моделями улучшены на 3,3 % – 6 % по сравнению с линейными дробными моделями. Полученный результат может служить обоснованием использования нелинейных моделей с операторами дробного интегро-дифференцирования в теории вязкоупругости.

3. Численное исследование и идентификация параметров нелинейных моделей наследственно-упругого тела дробного порядка, не допускающих аналитического решения

Основная цель данного раздела заключается в разработке методики решения задачи идентификации параметров математических моделей одноосного напряженного состояния в случае, когда определяющие соотношения, связывающие напряжение и деформацию вязкоупругой среды, в дифференциальной или интегральной формах не позволяют найти решение в явном виде в терминах известных специальных функций. В этом случае неизвестные параметры математической модели могут быть найдены численно методом координатного спуска с обращением на каждом шаге к численному решению определяющего интегрального уравнения, требуя минимума среднеквадратического отклонения расчетных значений деформации от экспериментальных данных.

В данном разделе для идентификации параметров использовались экспериментальные данные ПВХП без учета разгрузки. В связи с этим значения погрешностей аппроксимаций для интегрируемых линейных и нелинейных моделей пересчитаны только для случая нагрузки с целью дальнейшего сравнения с погрешностями аппроксимаций при численном исследовании нелинейных дробных моделей неинтегрируемого типа.

При аппроксимации данных серии экспериментов с различными постоянными нагрузками σ_j ($j = \overline{1, N}$) следует обратиться к формуле (15), в которой вместо точных значений деформации $\varepsilon_{ij} = \varepsilon(t_i, \sigma_j)$ должны фигурировать численные значения $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon^*(t_i, \sigma_j)$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, N}$).

Рассмотрим в качестве примера нелинейный дробный аналог модели Фойхта (26). Разрешая это уравнение относительно дробной производной, получим

$$D_{0t}^\alpha \varepsilon = \left(\frac{\sigma - E\varepsilon^n}{\eta} \right)^{1/m}. \quad (36)$$

С однородным начальным условием дифференциальное уравнение (36) эквивалентным образом редуцируется к интегральному уравнению Вольтерры с ядром Абеля в канонической форме Гаммерштайна [35]:

$$\varepsilon(t) = I_{0t}^\alpha \left(\frac{\sigma - E\varepsilon^n}{\eta} \right)^{1/m}. \quad (37)$$

Обозначим в нелинейном интегральном уравнении (37) подынтегральное выражение как функцию $u(t)$. Тогда вычислительная процедура сведется к численному решению интегро-функциональной системы уравнений

$$\varepsilon(t) = I_{0t}^\alpha u, \quad u(t) = \left(\frac{\sigma(t) - E\varepsilon^n(t)}{\eta} \right)^{1/m}. \quad (38)$$

Для построения итерационных процедур численного решения нелинейных интегральных уравнений с ядром Абеля воспользуемся идеями, изложенными в работе [36]. Метод основывается на замене входящего в уравнение интегрального оператора квадратурными формулами, в качестве которых используются формулы приближенного вычисления дробных интегралов, аналогичные формуле прямоугольников и формуле трапеций. Для $\alpha > 0$ и фиксированного $t \in [0, T]$ выбирается разбиение отрезка $[0, T]$ на s равных частей с шагом $h = T/s$ точками $t_k = kh$ ($k = 0, \dots, s$), где $t_0 = 0$, $t_s = T - h$. Дробный интеграл представляется в виде суммы интегралов по отрезкам $[t_k, t_{k+1}]$, а подынтегральная функция – рядом Тейлора в окрестности точки t_k . Ограничиваясь двумя первыми членами разложения для функции $u(t) \in C[0, T] \cap C^1(0, T)$, в работе [36] авторы привели аналог первой (левой) формулы прямоугольников

$$I_{0t}^\alpha u = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{s-1} u_k \left[(n-k)^\alpha - (n-k-1)^\alpha \right] + o(h), \quad (39)$$

где $u_k = u(t_k)$. Аналог второй (правой) формулы прямоугольников имеет вид

$$I_{0t}^\alpha u = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{s-1} u_{k+1} \left[(n-k)^\alpha - (n-k-1)^\alpha \right] + o(h), \quad (40)$$

где $u_{k+1} = u(t_{k+1})$. Ограничиваясь тремя членами ряда Тейлора в разложении подынтегральной функции $u(t) \in C^1[0, T] \cap C^2(0, T)$, в работе [36] авторы получили аналог формулы трапеций

$$I_{0t}^\alpha u = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{k=0}^{s-1} \left\{ u_k \left[(n-k)^\alpha - (n-k-1)^\alpha \right] + u_{k+1} \left[(n-k)^{\alpha+1} - (n-k-1)^\alpha (n-k+\alpha) \right] \right\} + o(h^2). \quad (41)$$

Обозначая точное решение системы уравнений (38) $\varepsilon(t)$ в точке $t = t_k$ за ε_k , $u(t_k)$ – за u_k , а численные значения соответственно за ε_k^* и u_k^* , и используя, например, аналог левой формулы прямоугольников для дробного интеграла, получим следующие итерационные формулы:

$$\varepsilon_0^* = \varepsilon(0) = 0, \quad u_0^* = u(0) = (\sigma_0/\eta)^{1/m} \quad (i = 0), \quad (42)$$

$$\tilde{\varepsilon}_i^* = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{s-1} u_k^* \left[(i-k)^\alpha - (i-k-1)^\alpha \right], \quad (43)$$

$$u_i^* = \left(\frac{\sigma_0 - E(\tilde{\varepsilon}_i^*)^n}{\eta} \right)^{1/m} \quad (i = 1, \dots, s). \quad (44)$$

Отметим, что использование аналога левой формулы прямоугольников предпочтительно для нелинейных интегральных уравнений, так как ε_i^* на каждом шаге вычисляется через значения, найденные на предыдущих шагах. Использование двух других формул требует обращения к процедуре решения нелинейного алгебраического уравнения на каждом шаге. Для численной реализации метода построения для неинтегрируемой нелинейной модели с операторами дробного интегро-дифференцирования разработано соответствующее программное обеспечение. Его тестирование в линейном случае ($n = m = 1$) с использованием аналога формулы левых прямоугольников с параметрами $s = 480$ (количество разбиений), $\alpha = 0,4$, $E = 128$ МПа, $\eta = 114$ МПа·с ^{α} , $\sigma_0 = 12$ МПа, которые были найдены в результате идентификации параметров дробного линейного аналога модели Фойхта (2) по результатам эксперимента на растяжение ПВХП без учета мгновенной упругой деформации, показало, что среднеквадратическое отклонение численных решений от аналитического решения составляет 0,34 %, что вполне удовлетворительно для наших целей. Использование формул (40) и (41) приводит ожидаемо к более точным результатам: 0,17 % – для аналога правых прямоугольников и 0,05 % – для аналога формулы трапеций.

Тестирование программного обеспечения на основе известного решения нелинейной интегрируемой модели Фойхта (27) показало практически такие же результаты, как для описанной выше линейной модели. В дальнейшем авторы использовали в расчетах аналог левой формулы прямоугольников как более алгоритмически удобную.

Для того чтобы сравнить качество аппроксимаций экспериментальных данных испытываемых поливинилхлоридных трубок теоретическими значениями деформации, определяемыми из явных решений задачи ползучести в рамках линейных и нелинейных интегрируемых математических моделей, со значениями в неинтегрируемом случае, рассмотрим второй вариант нелинейного дробного аналога неинтегрируемой модели Кельвина, приведя предварительно вывод его основного определяющего соотношения.

Выполним последовательное соединение первого варианта дробного аналога модели Фойхта (26) с параметрами E_1, n, η, α, m , описываемого в дифференциальной форме равенством

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1^n + \eta (D_{0t}^\alpha \varepsilon_1)^m,$$

с упругим элементом, определяемым зависимостью $\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2^{n_2}$, где σ_1, σ_2 – напряжения, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – деформации в соответствующих структурных элементах. Учитывая, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, а полная деформация $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, получим определяющее соотношение для этого нелинейного варианта дробного аналога модели Кельвина в следующем виде:

$$\eta \left(D_{0t}^\alpha \left(\varepsilon - \left(\frac{\sigma}{E_2} \right)^{1/n_2} \right) \right)^m + E_1 \left(\varepsilon - \left(\frac{\sigma}{E_2} \right)^{1/n_2} \right)^{n_1} = \sigma(t). \quad (45)$$

Обозначая

$$v(t) = \varepsilon(t) - \left(\frac{\sigma(t)}{E_2} \right)^{1/n_2}, \quad (46)$$

из (45) получим нелинейное дифференциальное уравнение относительно функции $v(t)$:

$$\eta \left(D_{0t}^\alpha v \right)^m + E_1 v^{n_1} = \sigma(t).$$

Разрешим это уравнение относительно дробной производной:

$$D_{0t}^\alpha v = \left(\frac{\sigma - E_1 v^{n_1}}{\eta} \right)^{1/m}. \quad (47)$$

С начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\varepsilon(t) - \left(\frac{\sigma(t)}{E_2} \right)^{1/n_2} \right) = 0$$

уравнение (47) редуцируется к интегральному уравнению

$$v(t) = I_{0t}^\alpha \left(\frac{\sigma - E_1 v^{n_1}}{\eta} \right)^{1/m}. \quad (48)$$

Обозначим

$$u(t) = \left(\frac{\sigma - E_1 v^{n_1}}{\eta} \right)^{1/m}. \quad (49)$$

Тогда с учетом формулы (49) интегральное уравнение (48) приводится к виду

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma(t)}{E_2} \right)^{1/n_2} + I_{0t}^\alpha u. \quad (50)$$

Таким образом, задача сведена к необходимости численного решения интегро-функциональной системы уравнений (46), (49), (50).

Теперь продемонстрируем методику решения задачи идентификации параметров для нелинейного дробного аналога модели Кельвина (45), используя эти же экспериментальные данные по растяжению образцов из ПВХП. Параметры E_2 и n_2 , необходимые для расчета

значений мгновенной упругой деформации, найдем аналогично методике, изложенной для модели (29), учитывая, что $\gamma = 1/n_2$.

Остальные параметры: α, η, E_1, n_1 и m найдем с помощью метода координатного спуска, минимизируя функцию (15), в которой точные значения деформации $\varepsilon_{ij} = \varepsilon(t_i, \sigma_j)$ заменены на численные $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon^*(t_i, \sigma_j)$ ($i = \overline{1, s}, j = \overline{1, N}$).

Численные значения деформации будем искать, используя аналог левой формулы прямоугольников для дробного интеграла (40), по следующим итерационным формулам:

$$\varepsilon_0^* = \varepsilon(0) = \left(\frac{\sigma_j}{E_2} \right)^{1/n_2}, \quad (51)$$

$$v_0^* = v^*(0) = \varepsilon^*(0) - \left(\frac{\sigma_j}{E_2} \right)^{1/n_2} = 0;$$

$$\varepsilon_i^* = \left(\frac{\sigma_j}{E_2} \right)^{1/n_2} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \times \sum_{k=0}^{s-1} u_k^* \left[(n-k)^\alpha - (n-k-1)^\alpha \right], \quad (52)$$

где

$$u_i^* = \left(\frac{\sigma_j - E_1 (v_k^*)^{n_1}}{\eta} \right)^{1/m}, \text{ а } v_i^* = \varepsilon_i^* - \left(\frac{\sigma_j}{E_2} \right)^{1/n_2} \quad (i = \overline{1, s}). \quad (53)$$

В качестве начальных параметров α, η, E_1 используются значения, полученные при идентификации параметров в серии экспериментов для линейной модели (4), поэтому на первом этапе полагаем $n_1 = 1, m = 1$.

По результатам идентификации параметров модели (45) получены следующие их значения: $\alpha = 0,434, E_1 = 104,472$ МПа, $E_2 = 331,807$ МПа, $\eta = 123,045$ МПа·с, $n_1 = 0,882, n_2 = 0,781, m = 1$. В табл. 5 представлены погрешности аппроксимаций для всех трёх рассмотренных дробных аналогов модели Кельвина в линейном и нелинейном случаях в норме (15), при этом погрешность Δ для неинтегрируемого случая составила 6,379 %.

Анализ данных табл. 5 свидетельствует о том, что относительная погрешность аппроксимаций экспериментальных данных аналитическим решением задачи ползучести на основе нелинейного дробного аналога модели Кельвина (29) существенно меньше, чем в случаях, когда используется линейная модель (4) или численные методы решения определяющего интегрального уравнения в нелинейном неинтегрируемом дробном аналоге модели Кельвина (45). Но обе нелинейные модели дают лучшие результаты по сравнению с линейной моделью.

Средние погрешности аппроксимаций (Δ , %) для различных вариантов дробного аналога модели Кельвина

Table 5

The average approximation errors (Δ , %) for different variants of the fractional Kelvin model

Linear model (4)	Nonlinear model (29)	Nonlinear model (45)
9.872 % (using analytical solution (8))	4.256 % (using analytical solution (31))	6.379 % (using numerical solution (51)-(53))

4. Анализ математических моделей вязкоупругих сред с операторами дробного и целочисленного интегро-дифференцирования

Вопросы целесообразности применения моделей с операторами дробного интегро-дифференцирования в теории вязкоупругости имеют долгую историю (см., например, [9]). В настоящей работе авторы выполнили сравнительный анализ решений на основе дробных линейной (4) и нелинейных (26), (27) моделей Фойхта с данными, полученными на основе классической модели теории вязкоупругости с операторами целочисленного интегрирования Ю.П. Самарина [38, 39]. В цитируемых работах автором представлена нелинейная модель вязкоупругого тела в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \int_0^t \sum_{i=1}^n a_i e^{-\lambda_i(t-\tau)} \left(\frac{\sigma(\tau)}{\sigma^*} \right)^m d\tau, \quad (54)$$

где $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ – деформация и напряжение в момент времени t ; σ^* – нормирующий коэффициент; E – мгновенный модуль упругости; a_i, λ_i, m – некоторые подлежащие идентификации параметры модели. Отбрасывая мгновенно-упругую деформацию при $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, из (54) получим выражение для чистой вязкоупругой компоненты деформации $p = p(t)$:

$$p(t) = \sum_{i=1}^n A_i (1 - e^{-\lambda_i t}) \left(\frac{\sigma_0}{\sigma^*} \right)^m. \quad (55)$$

Посредством экспериментальных данных для серии кривых ползучести при пяти постоянных уровнях напряжения поливинилхлоридного пластика (см. рис. 1) и методики [38, 39] получена аппроксимация для рассматриваемого материала со следующими параметрами: $n = 3$, $m = 1,48$, $A_1 = 0,0192$, $A_2 = 0,0163$, $A_3 = 0,0212$, $\lambda_1 = 2,23$ (1/ч), $\lambda_2 = 0,064$ (1/ч), $\lambda_3 = 0,0019$ (1/ч), т.е. имеем в (55) 3 экспоненциальных слагаемых и 7 параметров. Приведем оценки погрешностей в норме (15) анализируемых моделей: для модели (55) (семь параметров) – $\Delta = 9,23$ %, линейного дробного аналога модели Фойхта (2) (три параметра) – $\Delta = 10,47$ %, нелинейного неинтегрируемого дробного аналога модели Фойхта (26) (пять параметров) –

$\Delta = 4,41$ %, нелинейного интегрируемого дробного аналога модели Фойхта (27) (четыре параметра) – $\Delta = 4,27$ %. Отметим, что погрешности определены только по кривым ползучести при нагрузке ($t \in [0,8]$ ч).

Таким образом, при меньшем числе параметров линейная дробная модель дает практически одинаковые результаты с моделью (55), а нелинейная дробная модель всего при четырех параметрах дает вдвое меньшую погрешность, чем модель с целочисленным интегральным оператором с семью параметрами. Отсюда можно сделать вывод о целесообразности использования математических моделей с дробными операторами интегро-дифференцирования в теории вязкоупругости.

Выводы

Выполненные исследования позволяют сформулировать следующие результаты.

1. Разработан ряд линейных и нелинейных математических моделей с операторами дробного интегро-дифференцирования для описания реологического деформирования вязкоупругих сред.

2. Разработана методика идентификации параметров дробных моделей вязко-упругого деформирования, реализованная применительно к экспериментальным данным по ползучести поливинилхлоридного пластика.

3. Выполнен сравнительный анализ погрешностей аппроксимации экспериментальных данных расчётными кривыми вязкоупругого деформирования при постоянных напряжениях, полученных по линейным и нелинейным дробным моделям.

4. Выполнен сравнительный анализ данных расчетов по линейным и нелинейным дробным моделям с данными расчетов по определяющим соотношениям вязкоупругости с целочисленными операторами интегрирования применительно к поливинилхлоридному пластику. Показано, что при меньшем числе параметров линейной дробной модели погрешность аппроксимации практически совпадает, а для нелинейной дробной модели погрешность в два раза меньше погрешности по модели с классическим интегральным представлением. Этот факт может служить обоснованием использования моделей с операторами интегро-дифференцирования дробного порядка в теории вязкоупругости.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00249-а).

Библиографический список

1. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. Математическое моделирование наследственно-упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, – 2016. – № 1(20). – С. 167–194. DOI: 10.14498/vsgtu1456
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
3. Унгарова Л.Г. Применение линейных дробных аналогов реологических моделей в задаче аппроксимации экспериментальных данных по растяжению поливинилхлоридного пластика // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2016. – № 4(20). – С. 691–706. DOI:10.14498/vsgtu1523
4. Радченко В.П., Голудин Е.П. Феноменологическая стохастическая модель изотермической ползучести поливинилхлоридного пластика // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2008. – № 1(16). – С. 45–52. DOI: 10.14498/vsgtu571
5. Огородников Е.Н., Унгарова Л.Г. Аналитические решения задачи о ползучести и идентификация параметров нелинейных математических моделей наследственно-упругого тела // Тр. X Всерос. науч. конф. по механике деформируемого твердого тела. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2017. – С. 120–123.
6. Volterra V. Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità // Rend. Acc. Naz. Lincei. – 1909. – Vol. 5. – P. 295–301.
7. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / пер. с англ. П.Н. Кузнецова. – М.: Наука, 1982. – С. 304.
8. Boltzmann L. Theorie der elastischen Nachwirkung (Theory of elastic after effects) // Wien. Ber. – 1874. – Vol. 70. – P. 275–306; Boltzman L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung (On the elastic after effect) // Pogg. Ann. (2). – 1878. – Vol. 5. – P. 430–432; Boltzman L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung / Wissenschaftliche Abhandlungen. vol. 2 / Cambridge Library Collection, ed. F. Hasenöhl. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2012. – P. 318–320. DOI: 10.1017/CBO9781139381437.015
9. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием // ПММ. 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53–62.
10. Duffing G. Elastizität und Reibung beim Rientrieb (Elasticity and friction of the belt drive) // Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A. – 1931. – Vol. 2. – No. 3. – P. 99–104. DOI: 10.1007/BF02578795
11. Gemant A. A Method of Analyzing Experimental Results Obtained from Elasto-Viscous Bodies // J. Appl. Phys. – 1936. – P. 311–317. DOI: 10.1063/1.1745400
12. Gemant A. On fractional differentials // Philos. Mag. VII. Ser. – 1938. – Vol. 25. – P. 540–549.
13. Бронский А.П. Явление последствия в твёрдом теле // ПММ. – 1941. – Т. 5, № 1. – С. 31–56.
14. Слонимский Г.Л. О законах деформации реальных материалов // ЖТФ. – 1939. – Т. 9, № 20. – С. 1791–1799.
15. Герасимов А.Н. Обобщение лиейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // ПММ. – 1948. – Т. 12, № 3. – С. 251–260.

Acknowledgements

The work was made with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (grant Nr. 16-01-00249-a).

16. Булгаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 288 с.
17. Podlubny I. Fractional Differential Equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications // Mathematics in Science and Engineering. Vol. 198. – San Diego: Academic Press, 1999. – 340 p.
18. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
19. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. – London: Imperial College Press, 2010. – 347 p. DOI: 10.1142/9781848163300
20. Caputo M., Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism // Pure and Applied Geophysics. – 1971. – Vol. 91. – No. 1. – P. 134–147. DOI: 10.1007/bf00879562
21. Caputo M., Mainardi F. Linear models of dissipation in anelastic solids // La Rivista del Nuovo Cimento. – 1971. – P. 161–198. DOI: 10.1007/bf02820620
22. Bagley R.L., Torvik P.J. A theoretical basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity // J. Rheol. – 1983. – Vol. 27. – No. 3. – P. 201–210. DOI: 10.1122/1.549724
23. Bagley R.L., Torvik P.J. Fractional Calculus – A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures // AIAA. 1983. – Vol. 21. – No. 5. – P. 741–748. DOI: 10.2514/3.8142
24. Schmidt A., Gaul L. Parameter Identification and FE Implementation of a Viscoelastic Constitutive Equation Using Fractional Derivatives // Proc. Appl. Math. Mech. – 2002. – Vol. 1(1). – P. 153–154. DOI: 10.1002/1617-7061(200203)1:1<153::AID-PAMM153>3.0.CO;2-J
25. Lewandowski R., Chorążyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers // Computers and Structures. – 2009. – Vol. 88. – No. 1-2. – P. 1–17. DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.09.001
26. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
27. Определение характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ / Е.Н. Звонов, Н.И. Малинин, Л.Х. Паперник, Б.М. Цейтлин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1968. – № 5. – С. 76–85.
28. Vasques C.M.A., Dias Rodrigues J., Moreira R.A.S. Experimental identification of GHM and ADF parameters for viscoelastic damping modeling // III European Conference on Computational Mechanics. – Springer, 2006. – P. 76–95. DOI: 10.1007/1-4020-5370-3_173
29. Параметрическая идентификация математической модели вязкоупругих материалов с использованием производных дробного порядка / С.В. Ерохин, Т.С. Алероев, Л.Ю. Фриштер, А.В. Колесниченко // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Т. 11, № 3. – С. 82–86.
30. Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та.

Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – № 1(18). – С. 276–279. DOI: 10.14498/vsgtu685

31. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

32. Hooke R., Jeeves T.A. “Direct Search” Solution of Numerical and Statistical Problems // Journal of the ACM (JACM). – 1961. – P. 212–229. DOI: 10.1145/321062.321069

33. Barrett J.H. Differential equations of non-integer order // Canad. J. Math. – 1954. – Vol. 6. – P. 529–541. DOI: 10.4153/cjm-1954-058-2

34. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Яшагин Н.С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2011. – № 1(22). – С. 255–268. DOI: 10.14498/vsgtu932.

References

1. Ogorodnikov E.N., Radchenko V.P., Ungarova L.G. Mathematical modeling of hereditary elastically deformable body on the basis of structural models and fractional integro-differentiation Riemann-Liouville apparatus. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2016. vol. 20, no. 1, pp. 167-194. DOI: 10.14498/vsgtu1456.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. *Amsterdam, Elsevier, North-Holland Mathematics Studies*, 2006, vol. 204, 523 p.

3. Ungarova L. G. The use of linear fractional analogues of rheological models in the problem of approximating the experimental data on the stretch polyvinylchloride elastron. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2016, vol. 20, no. 4, pp. 691-706. DOI:10.14498/vsgtu1523.

4. Radchenko V. P., Goludin E. P. Phenomenological stochastic isothermal creep model for an polivinylchloride elastron. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.]*, 2008, vol. 16, no. 1, pp. 45-52. DOI: 10.14498/vsgtu571.

5. Ogorodnikov E. N., Ungarova L. G. Analytical solutions of the creep problem and parameter identification of nonlinear models of a hereditary-elastic body with operators of fractional differentiation. *Proceedings of the Tenth All-Russia Scientific Conference on Solid Mechanics*. Samara: Samara State Technical Univ., 2017. pp. 120-123.

6. Volterra V. Sulle equazioni integro-direzionali della teoria dell'elastica. *Rend. Acc. Naz. Lincei*. 1909, vol. 5, pp. 295-301.

7. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. *New York, Dover Publ., Inc.*, 1959. 226 p.

8. Boltzmann L. Theory of elastic after effects. *Wien.Ber.*, 1874, vol. 70, pp. 275-306; On the elastic after effect. *Pogg. Ann.*, 1878. Vol. 5. Pp. 430-432; Boltzman L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung / Wissenschaftliche Abhandlungen. vol. 2 / Cambridge Library Collection; ed. Friedrich Hasenöhr. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. Pp. 318-320. DOI: 10.1017/CBO9781139381437.015.

9. Rabotnov Yu.N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 684-696. DOI: 10.2478/s13540-014-0193

10. Duffing G. Elasticity and friction of the belt drive. *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, 1931, vol. 2, no. 3, pp. 99-104. DOI: 10.1007/BF02578795.

35. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: методы решения. – М.: Факториал Пресс, 2000. – 384 с.

36. Яшагин Н.С. Математическое моделирование и исследование осцилляционных явлений в системах с памятью на основе аппарата дробного интегро-дифференцирования: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Самара, 2011. – 186 с.

37. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

38. Самарин Ю.П. Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. – Куйбышев: Куйб. гос. ун-та, 1979. – 84 с.

39. Самарин Ю.П. Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // Проблемы прочности. – 1974. – № 9. – С. 24–27.

11. Gemant A.A. Method of Analyzing Experimental Results Obtained from Elasto-Viscous Bodies. *J. Appl. Phys*, 1936, pp. 311-317. DOI: 10.1063/1.1745400

12. Gemant A. On fractional differentials. *Philos. Mag.*, VII. Ser., 1938, vol. 25, pp. 540–549.

13. Bronskij A.P. Yavleniye posledeystviya v tvordom tele [Residual effect in rigid bodies], *Prikl. Mat. Mekh.*, 1941, vol. 5, no. 1, pp. 31-56.

14. Slonimsky G. L. O zakonakh deformatsii real'nykh materialov [On the laws of deformation of real materials]. *Acta physicochim*, 1940, vol. 12, pp. 99-128.

15. Gerasimov A.N. Obobshcheniye lineynykh zakonov deformirovaniya i yego primeneniye k zadacham vnutrennego treniya [A generalization of linear laws of deformation and its application to internal friction problem], *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 3, pp. 251-260.

16. Bulgakov I. I. *Polzuchest' polimernykh materialov [Creep of Polymer Materials]*. Moscow, Nauka, 1973, 288 p.

17. Podlubny I. Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *San Diego, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press*, 1999. vol. 198. 340 p.

18. Uchaikin V.V. Metod drobnnykh proizvodnykh [The fractional derivatives method]. *Ulyanovsk, Artishok*, 2008, 512 p.

19. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. *An introduction to mathematical models*. Hackensack, NJ, World Scientific, 2010, pp. 347. DOI: 10.1142/9781848163300.

20. Caputo M., Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, 1971, vol. 91, no. 1, pp. 134-147. DOI: 10.1007/bf00879562.

21. Caputo M., Mainardi F. Linear models of dissipation in anelastic solids. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 1971, pp. 161-198. DOI: 10.1007/bf02820620.

22. Bagley R.L., Torvik P.J. A theoretical basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity. *J. Rheol.*, 1983, vol. 27, no. 3, pp. 201-210. DOI: 10.1122/1.549724.

23. Bagley R. L., Torvik P.J. Fractional Calculus – A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1983, vol. 21, no. 5, pp. 741-748. DOI: 10.2514/3.8142.

24. Schmidt A., Gaul L. Parameter identification and FE implementation of a viscoelastic constitutive equation using fractional deriva-

tives. Proc. Appl. Math. Mech., 2002, vol. 1(1), pp. 153-154. DOI: 10.1002/1617-7061(200203)1:1<153::AID-PAMM153>3.0.CO;2-J.

25. Lewandowski R., Chorążyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers. *Computers and Structures*, 2009, vol. 88, no. 1-2, pp. 1-17. DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.09.001.

26. Rabotnov Yu. N. Elementy nasledstvennoy mekhaniki tvordykh tel [*Elements of hereditary solid mechanics*]. *Mir Publ.*, 1980, 384 p.

27. Zvonov E.N., Malinin N.I., Papernik L.H., Ceytlin B.M. Opredeleniye kharakteristik polzuchesti lineynykh uprugonasledstvennykh materialov s ispol'zovaniyem ETSVM [Determination of the creep characteristics of linear elastic-hereditary materials using an electronic digital computer], *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1968, no. 5, pp. 76-85.

28. Vasques C.M.A., Dias Rodrigues J., Moreira R.A.S. Experimental identification of GHM and ADF parameters for viscoelastic damping modeling. *Berlin, Springer, III European Conference on Computational Mechanics*, 2006, pp. 76-95. DOI: 10.1007/1-4020-5370-3_173.

29. Erokhin S.V., Aleroev T.S., Frishter L.Yu., Kolesnichenko A.V. Parametricheskaya identifikatsiya matematicheskoy modeli vyazkouprugikh materialov s ispol'zovaniyem proizvodnykh drobnogo poryadka [Parameter identification of the viscoelastic materials mathematical model using fractional derivatives]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 82-86.

30. Ogorodnikov E.N., Yashagin N.S. Some special functions in the solution to cauchy problem for a fractional oscillating equation. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2009, vol. 18, no. 1, pp. 276-279. doi: 10.14498/vsgtu685.

31. Dzhrbashyan M.M. Integral'nye preobrazovaniia i predstavleniia funktsii v kompleksnoi oblasti [Integral Transforms

and Representation of Functions in Complex Domain]. *Moscow, Nauka*, 1966, 672 p.

32. Hooke R., Jeeves T. A. "Direct Search" Solution of numerical and statistical problems. *Journal of the ACM (JACM)*, 1961, no. 2, pp. 212-229. DOI: 10.1145/321062.321069.

33. Barrett J. H. Differential equations of non-integer order. *Canad. J. Math.*, 1954, vol. 6, pp. 529-541. DOI: 10.4153/cjm-1954-058-2.

34. Ogorodnikov E.N., Radchenko V.P., Yashagin N.S. Rheological model of viscoelastic body with memory and differential equations of fractional oscillator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2011, vol. 22, no. 1, pp. 255-268. DOI: 10.14498/vsgtu932.

35. Mangirov A. V., Polyaniin A. D. *Spravochnik po integral'nyim uravneniyam: Metody resheniya*. [Handbook of integral equations: methods of solution]. *Moscow, Factorial Press*, 2000, 384 p.

36. Yashagin N.S. Matematicheskoye modelirovaniye i issledovaniye ostsillyatsionnykh yavleniy v sistemakh s pamyat'yu na osnove apparata drobnogo integro-differentsirovaniya: Dissertatsiya na soiskaniye uchenoy stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk. [Mathematical modeling and investigation of oscillation phenomena in systems with memory based on the apparatus of fractional integro-differentiation]. *Samara*, 2011, 186 p.

37. Rabotnov Yu.N. Polzuchest' elementov konstruktivnykh [Creep of structural elements]. *Moscow, Nauka*, 1966. 752 p.

38. Samarin Yu.P., Uravneniya sostoyaniya materialov so slozhnyimi reologicheskimi svoystvami. [Equations of state of materials with complex rheological properties.] *Kuibyshev, Kuib. State University*. 1979, 84 p.

39. Samarin Yu.P., Postroyeniye eksponentsial'nykh approksimatsiy dlya krivykh polzuchesti metodom posledovatel'nogo vydeleniya eksponentsial'nykh slagayemykh. [Construction of exponential approximations for creep curves by the method of sequential extraction of exponential terms]. *Problems of Strength*. 1974, no. 9, pp. 24-27.

УСЛОВИЯ ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ В ЖУРНАЛЕ «ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МЕХАНИКА»

1. Общие положения

- 1.1. Журнал «Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика» является периодическим печатным научным рецензируемым журналом (ISSN печатной версии – 2224-9893, ISSN электронной версии – 2226-1869). Журнал «Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), свидетельство ПИ № ФС77-56517 от 26.12.2013 г. До 2012 года журнал носил название «Вестник Пермского государственного технического университета. Механика» (ISSN – 2078-6603).
- 1.2. Журнал выпускается Пермским национальным исследовательским политехническим университетом.
- 1.3. Журнал индексируется в международных реферативных базах Scopus, Russian Science Citation Index на платформе Web of Science (RSCI), EBSCO, входит в проект «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ). С 01.12.2015 г. журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.
- 1.4. Журнал выходит 4 раза в год. Установлены сроки выхода номеров:

Номер	Сроки приема статей	Сроки выхода номера
1	до 15 января	30 марта
2	до 15 апреля	30 июня
3	до 15 июля	30 сентября
4	до 10 октября	30 декабря

2. Требования к представляемым материалам

- 2.1. К опубликованию в журнале «Вестник ПНИПУ. Механика» принимаются статьи (в том числе обзорного характера), ранее не публиковавшиеся и содержащие существенные, обладающие научной новизной, результаты в области механики деформируемого твердого тела, в том числе:
 - развитие и приложения классических и обобщенных моделей деформирования и разрушения твердых тел;
 - математические модели неупругого деформирования сред, в том числе с учетом эволюции микроструктуры, многоуровневые модели неупругого деформирования;
 - модели процессов деформирования сред с фазовыми и релаксационными переходами;
 - механика наноматериалов;
 - технологическая механика, в том числе механика реономных сред;
 - механика композиционных материалов и конструкций;
 - вычислительная механика деформируемого твердого тела, развитие и применение современных вычислительных и программных средств;
 - экспериментальная механика деформируемого твердого тела.
- 2.2. Рукописи статей объемом до 15 страниц (для обзоров – до 30 страниц), подготовленные с помощью редактора текста Word for Windows 7, направляются по адресу: 614990, Пермский край, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, ПНИПУ, редакция журнала «Вестник ПНИПУ. Механика». Электронный вариант статьи одновременно направляется на адрес (e-mail): pnpru.mechanics@gmail.com.
- 2.3. Правила оформления статьи (см. образец на сайте <http://vestnik.pstu.ru/mechanics/toauthors/requirements/>):

Заголовки:

название статьи: шрифт – Times New Roman Cyr, полужирный; размер символов – 14; подзаголовки (при наличии): шрифт – Times New Roman Cyr, полужирный; размер символов – 12. Выравнивание заголовка и подзаголовка – по центру.

Текст статьи:

шрифт – Times New Roman Cyr; размер символов – 12; межстрочный интервал – одинарный; выравнивание по ширине страницы; переносы желательно не использовать; поля страницы: левое – 3 см; правое – 2 см; верхнее – 2,5 см; нижнее – 2,5 см. Абзацный отступ 0,5 см.