



DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2017.4.04
УДК 51-76+616.31-085

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ЗУБНЫХ ПРОТЕЗОВ

С.Е. Жолудев¹, И.Н. Кандоба^{2, 3}

¹ Кафедра ортопедической стоматологии Уральского государственного медицинского университета Минздрава РФ, Россия, 620028, Екатеринбург, ул. Репина, 3, e-mail: ortoped_stom@mail.ru

² Кафедра вычислительной математики Института естественных наук и математики Уральского федерального университета им. Первого президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620026, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 48

³ Отдел прикладных проблем управления Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Россия, 620990, Екатеринбург, ул. Ковалевской, 16, e-mail: kandoba@imm.uran.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации значений упругих параметров материала и формы одного из элементов шинирующего дугового протеза. Эта конструкция применяется в ортопедической стоматологии для восстановления зубного ряда. Ее оптимизируемым элементом является мягкая подкладка между базисом протеза и подлежащей слизистой оболочкой, предназначенная для уменьшения негативного воздействия жевательной нагрузки на ткани протезного ложа. В работе основное внимание уделяется вопросу определения распределения материала подкладочного слоя, которое бы минимизировало воздействие жевательной нагрузки на подлежащие ткани. Для этого используются методы математического моделирования. Предлагается распределение материала подкладочного слоя описывать с помощью скалярной функции, значения которой задают его толщину в соответствующей точке. Искомая функция определяется как предел специальной функциональной последовательности, на элементах которой последовательно уменьшаются значения ряда оптимизируемых критериев. Применимость предлагаемого подхода иллюстрируется на упрощенном модельном примере, в основу которого положена двумерная неоднородная задача упругости. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: мягкая подкладка, дуговой протез, напряженно-деформированное состояние, протезное ложе, упругие параметры, оптимальная форма.

ВВЕДЕНИЕ

В ортопедической стоматологии одной из важных проблем, возникающих при восстановлении зубного ряда с помощью шинирующего дугового протеза, является уменьшение негативного воздействия жевательной нагрузки [8] на ткани протезного ложа. Один из способов ее решения – использование мягких подкладок между базисом протеза и подлежащей слизистой оболочкой [6, 9].

Основной целью работы является разработка методов определения оптимальных значений упругих параметров материала и его распределения в подкладочном слое, позволяющих существенно снизить негативное воздействие жевательной нагрузки на ткани протезного ложа. Для этого используются методы математического моделирования.

Предлагается распределение материала подкладочного слоя (его форму) описывать с помощью функции, значением которой в каждой точке ее области определения является толщина слоя. Искомая функция строится как предел специальной функциональной последовательности, на элементах которой последовательно уменьшаются значения нескольких оптимизируемых критериев. Значения этих критериев характеризуют степень негативного воздействия жевательной нагрузки на ткани протезного ложа и определяются с помощью специальных функционалов, описывающих некоторые свойства напряженно-деформированного состояния исследуемого фрагмента зубочелюстной системы. Для построения элементов указанной последовательности функций применяется методология [3], которая достаточно хорошо себя зарекомендовала при решении подобных задач оптимизации формы в ортопедической стоматологии. Применимость этой методологии для приближенного решения исследуемой в работе оптимизационной задачи иллюстрируется на одной упрощенной модели фрагмента зубочелюстной системы.

УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ «ЗУБЫ – ПРОТЕЗ – ЧЕЛЮСТЬ»

Зубочелюстная система, представляющая собой сложную медико-биологическую систему мягких и костных тканей челюстей и восстановленного с помощью шинирующего дугового протеза зубного ряда, рассматривается как неоднородная конструкция, подверженная воздействию заданной внешней статической нагрузки [2, 12–14]. Эта конструкция представляет собой объединение конечного числа обладающих различными механическими свойствами упругих сегментов. Предполагается, что эти сегменты однородны и изотропны. Часть внешней границы конструкции жестко закреплена, а к другой ее части прикладывается заданная статическая нагрузка.

В исследуемой задаче особый интерес представляет распределение напряжений и деформаций, возникающих на контактных границах сегмента, соответствующего подкладочному слою. Воздействие жевательной нагрузки на ткани протезного ложа определяется в основном значениями напряжений и деформаций в несущем (фронтальном) сечении протеза. Это обстоятельство позволяет ограничиться рассмотрением плоской неоднородной задачи теории упругости, решение которой позволяет провести требуемый анализ распределения напряжений и деформаций на контактной границе сегментов подкладочного слоя и слизистой оболочки. Основной проблемой, возникающей при реализации этого подхода, является учет в такой плоской модели взаимодействия протеза со всеми зубами ряда, соединенными с помощью проволоочной шины. Предлагается рассмотреть упрощенную двумерную модель фрагмента зубочелюстной системы, в которой плоское фронтальное сечение протеза дополняется фронтальными сечениями всех остальных элементов зубного ряда, которые выполнены, вообще говоря, в разных соответствующих элементах плоскостях. Здесь полагается, что все эти плоскости ортогональны некоторой одной и той же плоскости, а сечения соседних элементов ряда (двух зубов или пары зуб – протез) пересекаются по прямой, проходящей через их контактную поверхность (или точку). На рис. 1 представлена такая упрощенная геометрическая модель плоских сечений фрагмента зубочелюстной системы, которая была построена на основе рентгенограммы конкретного пациента. На рис. 1 различными цветами отображены сегменты ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$), соответствующие различным тканям зубочелюстной системы и элементам дугового протеза (далее, для краткости, просто – протеза). Здесь белым цветом отображены сегменты твердых тканей зуба; светло-серым – сегменты слизистой оболочки, периодонта, костной ткани челюсти; темно-серым – сегмент

седловидной части протеза; светло-серым со штриховкой – сегмент подкладочного слоя.

Моделирование шин различных типов в рамках используемой двумерной геометрической модели фрагмента зубочелюстной системы осуществляется путем создания контактных точек границ соседних сегментов твердых тканей зубов и сегмента протеза. На рис. 1 квадратными маркерами черного цвета указаны контактные точки шинированных с помощью проволочной шины элементов зубного ряда. Далее считается, что в этих точках отсутствуют относительные сдвиги контактирующих сегментов.

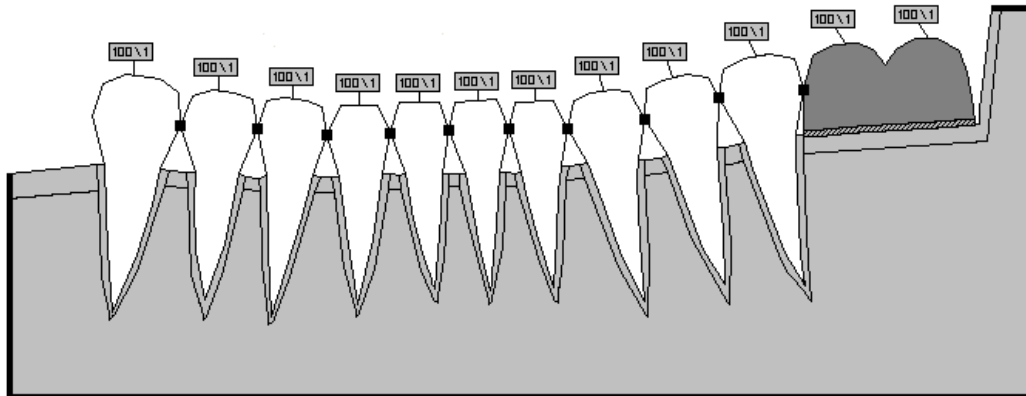


Рис. 1. Упрощенная плоская геометрическая модель фрагмента зубочелюстной системы. Сегменты различных тканей зубочелюстной системы и дугового протеза

Упругие механические свойства всех образующих рассматриваемую плоскую неоднородную конструкцию однородных сегментов описываются двумя параметрами – модулем Юнга (μ) и коэффициентом Пуассона (ν). Значения этих параметров для различных тканей зубочелюстной системы были взяты из [12, 13].

Функциональная жевательная нагрузка на зубы и протез моделируется с помощью внешней статической нагрузки, задаваемой набором внешних сил F_i ($i=1, 2, \dots, K$), приложенных к внешней части Γ_1 границ сегментов твердых тканей зубов и сегмента протеза. Для каждой силы указываются направление, середина элементарного отрезка приложения, величина силы и длина элементарного отрезка (см. рис. 1). При этом предполагается, что на внешней части Γ_2 границы сегмента губчатой кости (на рис. 1 отображена толстой черной линией) отсутствуют смещения – эта часть границы жестко закреплена, а на контактных границах смежных сегментов отсутствуют относительные сдвиги. Эти данные позволяют однозначно задать граничные условия для системы дифференциальных уравнений [3, 5], решение которой описывает напряженно-деформированное состояние рассматриваемой плоской неоднородной конструкции. Численное решение краевой задачи для этой системы дифференциальных уравнений выполняется с помощью специальной модификации [10] метода граничных элементов, существенно использующей аналитические вычисления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Содержательно задача оптимизации упругих параметров и формы подкладочного слоя заключается в следующем. Фиксируются вариант шинирования зубного ряда, форма седловидной части дугового протеза и жевательная нагрузка на зубы и протез. Требуется определить значения упругих параметров материала и форму

подкладочного слоя (распределение его толщины), для которых напряжения, возникающие в точках контактной границы «подкладка – слизистая оболочка», будут, во-первых, минимальны и, во-вторых, наиболее равномерно распределены на этой границе. Существуют основания считать, что выполнение этих требований позволяет значительно уменьшить негативное влияние жевательной нагрузки на слизистую оболочку протезного ложа.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

Сформулируем математическую постановку задачи оптимизации. Зафиксируем геометрическую форму однородных упругих сегментов плоской неоднородной конструкции и набор контактных точек для сегментов смежных зубов и протеза. Жестко закрепим априори выбранную внешнюю границу сегмента губчатой кости. Зададим на части внешней границы сегментов зубов и протеза напряжения, моделирующие один из возможных вариантов воздействия жевательной нагрузки на восстановленный зубной ряд.

Постановка задачи теории упругости

Пусть $\Omega \subset R^2$: $\Omega = \bigcup_{k=1}^n \omega_k$ – неоднородная область, где ω_k – однородные сегменты, упругие свойства которых описываются соответствующими модулями Юнга μ_k и коэффициентами Пуассона ν_k ($k = 1, 2, \dots, n$) (рис. 1–3).

К заданной части Γ_1 внешней границы Γ области Ω приложены внешние силы F_i ($i = 1, 2, \dots, N$), задающие в ее точках ненулевые напряжения f^* . В точках другой заданной части Γ_2 внешней границы Γ заданы нулевые перемещения $u^* = 0$ – эта часть границы жестко закреплена. Напряженно-деформированное состояние области Ω описывается решением краевой задачи (1)–(4), которая заключается в определении в каждом из составляющих область Ω сегментов ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$) вектора перемещений u , тензора деформаций ε и тензора напряжений σ , удовлетворяющих в рассматриваемом сегменте системе уравнений

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (3)$$

и заданным на внешней границе $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ области Ω граничным условиям

$$\sigma_{ij}n_j = f_i = f_i^* \text{ на } \Gamma_1; u_i = u_i^* \text{ на } \Gamma_2. \quad (4)$$

Здесь значения всех индексов изменяются от 1 до 2, а по повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 2, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$, μ_0 – модуль упругости при сдвиге (модуль Юнга), ν_0 – коэффициент Пуассона, δ_{ij} – символ Кронекера, n_i – вектор нормали к границе сегмента. Значения модуля упругости и коэффициента Пуассона различаются для разных сегментов. На внутренних границах, являющихся границами между сегментами, принимается условие непрерывности перемещений и напряжений.

Постановка задачи оптимизации

Рассмотрим сегмент $\omega(\gamma^p, \Gamma^p)$ плоского сечения седловидной части протеза, где γ^p и Γ^p – контактная граница этого сегмента с сегментом слизистой оболочки и его внешняя граница соответственно (см. рис. 2). Определим функцию $\tilde{h}(s)$, где $s \in [0, L(\gamma^p)]$ $L(\gamma^p)$ – длина γ^p . Значение функции $\tilde{h}(s)$ задается как длина отрезка, расположенного на внутренней к $\omega(\gamma^p, \Gamma^p)$ нормали $n(s)$ к γ^p в точке s (см. рис. 2). График функции $\tilde{h}(s)$ определяет кривую $\tilde{\gamma}$, которая совместно с γ^p ограничивает дополнительный сегмент $\omega(\gamma^p, \tilde{\gamma})$, соответствующий подкладочному слою. Кривая $\tilde{\gamma}$ описывает форму этого слоя, а функция $\tilde{h}(s)$ – распределение его толщины.

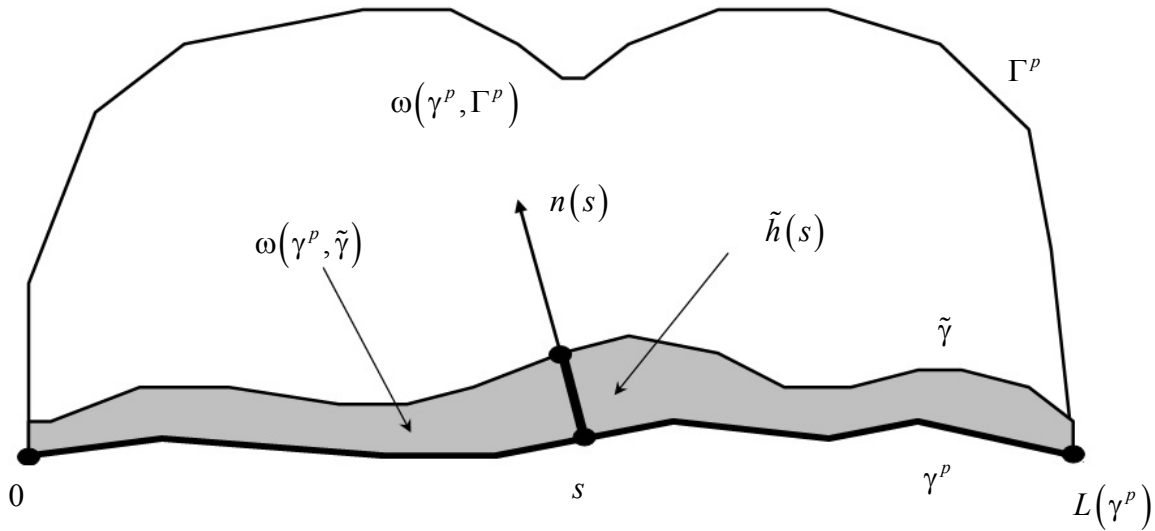


Рис. 2. Фронтальное плоское сечение седловидной части дугового протеза

Зафиксируем границу Γ , величины f^* , u^* и положительную величину $S < \text{mes}(\omega(\gamma^p, \Gamma^p))$, где $\text{mes}(\omega(\gamma^p, \Gamma^p))$ – площадь сегмента $\omega(\gamma^p, \Gamma^p)$. Задача оптимизации заключается в определении значений упругих параметров сегмента $\omega(\gamma^p, \tilde{\gamma})$ (модуля Юнга $\tilde{\mu}$ и коэффициента Пуассона $\tilde{\nu}$) и такой функции $\tilde{h}(s)$, $s \in [0, L(\gamma^p)]$, для которых выполняются следующие условия:

$$(a) \quad \text{mes}(\omega(\gamma^p, \tilde{\gamma})) = \int_0^{L(\gamma^p)} \tilde{h}(s) ds \leq S, \tag{5}$$

где $\text{mes}(\omega(\gamma^p, \tilde{\gamma}))$ – площадь сегмента $\omega(\gamma^p, \tilde{\gamma})$;

(b) При замене части сегмента $\omega(\gamma^p, \Gamma^p)$ дополнительным сегментом $\omega(\gamma^p, \tilde{\gamma})$ обеспечивается одновременное достижение минимальных значений следующих функционалов:

$$V[\tilde{h}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}] = \frac{1}{L(\gamma^p)} \int_0^{L(\gamma^p)} f(s) ds, \quad (6)$$

$$G[\tilde{h}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}] = \int_0^{L(\gamma^p)} (f(s) - V[\tilde{h}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}])^2 ds. \quad (7)$$

Таким образом, исследуемая оптимизационная задача сводится к следующей задаче векторной оптимизации:

$$\min_{\tilde{h} \in H, \tilde{\lambda} \in \Lambda} J[\tilde{h}, \tilde{\lambda}] \text{ при ограничении (5)}. \quad (8)$$

Здесь

$$J[\tilde{h}, \tilde{\lambda}] = \begin{pmatrix} V[\tilde{h}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}] \\ G[\tilde{h}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}] \end{pmatrix}, \tilde{\lambda} = (\tilde{\mu}, \tilde{\nu})^T, H = C^1([0, L(\gamma^p)]), \Lambda = \{\lambda = (\mu, \nu)^T \in R^2 \mid \mu > 0, \nu > 0\}.$$

Подходы к решению задачи векторной оптимизации

Задача (8) относится к классу многокритериальных задач оптимизации. В ней значение функционала $V[\cdot]$ определяет среднее значение абсолютных значений напряжений f в точках контактной границы γ^p , а значение функционала $G[\cdot]$ – среднее значение разброса абсолютных значений напряжений f на этой границе. Если кривая γ^p обладает достаточной гладкостью (C^1), то одновременная минимизация функционалов (6) и (7) позволяет совместно минимизировать и абсолютные значения напряжений и добиваться наиболее равномерного их распределения на γ^p – контактной границе «подкладка – слизистая оболочка». Условие (5) накладывает ограничение на площадь допустимого плоского сечения подкладочного слоя. Отсутствие этого ограничения приводит либо к полной замене седловидной части протеза подкладочным слоем, либо к возникновению недопустимой подвижности седловидной части протеза.

Один из подходов к решению многокритериальных оптимизационных задач заключается в переходе от задачи (8) к задаче минимизации при ограничении (5) одного (скалярного) критерия

$$I_\alpha[\cdot] = \alpha V[\cdot] + (1 - \alpha) G[\cdot], \quad (9)$$

где $\alpha \in [0, 1]$ – числовой параметр, определяющий величину приоритета при совместной минимизации функционалов (6) и (7).

В результате скаляризации (9) векторного критерия $J[\cdot]$ исследуемая задача векторной оптимизации (8) сводится к следующему однопараметрическому семейству задач минимизации (параметр $\alpha \in [0, 1]$):

$$\min_{\tilde{h} \in H, \tilde{\lambda} \in \Lambda} I_\alpha[\tilde{h}, \tilde{\lambda}] \text{ при ограничении (5)}. \quad (10)$$

ДВУШАГОВАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА

Для нахождения при фиксированном значении параметра α в задаче (10) ее субоптимального решения предлагается специальная итерационная процедура.

С ее помощью последовательно уточняются значения упругих параметров $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ подкладочного слоя и распределение его толщины.

Для этого задается начальное распределение толщины подкладочного слоя – функция $\tilde{h}^{(0)}(s), s \in [0, L(\gamma^p)]$. Например, $\tilde{h}^{(0)}(s) \equiv \frac{S}{L(\gamma^p)}$.

Затем на каждой k -й итерации выполняются две операции (шага):

I) Фиксируется текущая функция $\tilde{h}^{(k)}(s), s \in [0, L(\gamma^p)]$ и решается более простая оптимизационная задача:

$$\min_{\tilde{\lambda} \in \Lambda} I_{\alpha} [\tilde{h}^{(k)}, \tilde{\lambda}]. \quad (11)$$

Поскольку в задаче (11) оптимизируемыми параметрами являются коэффициенты $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ в дифференциальных уравнениях (1), (2), то для минимизации функционала (9) по этим переменным (аргумент \tilde{h} фиксирован) могут быть использованы известные [7, 15] методы оптимального управления. В результате для текущей формы подкладочного слоя, которая описывается функцией $\tilde{h}^{(k)}$, определяются оптимальные (или близкие к оптимальным) значения его упругих параметров $\tilde{\mu}^{(k)}$ и $\tilde{\nu}^{(k)}$ ($\tilde{\lambda}^{(k)} = (\tilde{\mu}^{(k)}, \tilde{\nu}^{(k)})^T \in \Lambda$).

II) Фиксируются значения $\tilde{\mu}^{(k)}, \tilde{\nu}^{(k)}$ и уточняется текущее, задаваемое функцией $\tilde{h}^{(k)}$, распределение толщины подкладочного слоя:

$$\tilde{h}^{(k+1)}(s) = \tilde{h}^{(k)}(s) + \delta \tilde{h}^{(k)}(s, \varepsilon^{(k)}), s \in [0, L(\gamma^p)], \varepsilon^{(k)} > 0, \quad (12)$$

где

$$\delta \tilde{h}^{(k)}(s, \varepsilon^{(k)}) = \varepsilon^{(k)} (f(s) - V[\tilde{h}^{(k)}, \tilde{\mu}^{(k)}, \tilde{\nu}^{(k)}]), s \in [0, L(\gamma^p)], \varepsilon^{(k)} > 0. \quad (13)$$

Здесь при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon^{(k)} > 0$ преобразование (12), (13) определяет функцию $\tilde{h}^{(k+1)}$ – жорданову кривую $\tilde{\gamma}^{(k+1)}$, которая является графиком этой функции и задает форму контактной границы «протез – подкладка». Здесь при малых значениях параметра $\varepsilon^{(k)} > 0$ преобразование (12), (13) обеспечивает и выполнение изопериметрического ограничения (5), поскольку

$$\int_0^{L(\gamma^p)} \delta \tilde{h}^{(k)}(s, \varepsilon^{(k)}) ds = \varepsilon^{(k)} \int_0^{L(\gamma^p)} (f(s) - V[\tilde{h}^{(k+1)}, \tilde{\mu}^{(k)}, \tilde{\nu}^{(k)}]) ds = 0.$$

Кроме того, как показывают результаты численного моделирования, значение параметра $\varepsilon^{(k)}$ может быть выбрано так, чтобы

$$I_{\alpha} [\tilde{h}^{(k+1)}, \tilde{\lambda}^{(k)}] < I_{\alpha} [\tilde{h}^{(k)}, \tilde{\lambda}^{(k)}]. \quad (14)$$

Таким образом, с помощью преобразования (12), (13) реализуется специальная вариация контактной границы $\tilde{\gamma}^{(k)}$ «протез – подкладка», обеспечивающая, во-первых, выполнение изопериметрического ограничения (5) и, во-вторых, уменьшение значения оптимизируемого критерия на очередном распределении материала подкладочного слоя, которое описывается функцией $\tilde{h}^{(k+1)}$ (формой кривой $\tilde{\gamma}^{(k+1)}$). В сущности, для задания такой вариации здесь использована методология, которая уже применялась в [3] для решения другой задачи оптимизации упругой формы.

Как показывают результаты численного моделирования, описанная выше итерационная процедура позволяет построить последовательность функций $\{\tilde{h}^{(k)}\}_{k=0,1,2,\dots,\infty}$, которая при $\varepsilon^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ равномерно на отрезке $[0, L(\gamma^p)]$ сходится к некоторой функции \tilde{h}^* , описывающей распределение материала подкладочного слоя, близкое к оптимальному в задаче (10). При этом на каждой итерации этой процедуры за счет выполнения первого шага последовательно уточняются и значения упругих параметров $\tilde{\mu}^{(k)}$ и $\tilde{\nu}^{(k)}$ материала подкладочного слоя текущей формы, которая описывается функцией $\tilde{h}^{(k)}$.

В заключение отметим, что в предложенной процедуре минимизации функционала (9) целесообразно на каждой ее итерации корректировать и значение параметра α в зависимости от текущих значений функционалов (6) и (7). Как представляется, это позволяет «более тонко настраивать» эту процедуру на приближенное решение исходной задачи векторной оптимизации (8).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В вычислительных экспериментах значения упругих параметров различных тканей зубочелюстной системы (зубная ткань, периодонт, слизистая оболочка, губчатая кость) принимались усредненными по данным, приведенным, например, в [4, 14]. При этом значения упругих параметров зубной ткани полагались равными значениям соответствующих параметров зубной эмали. В качестве материала седловидной части дугового протеза использовалась пластмасса горячей полимеризации *Vertex*. Значения упругих параметров (модуля Юнга μ и коэффициента Пуассона ν) различных материалов приведены в таблице.

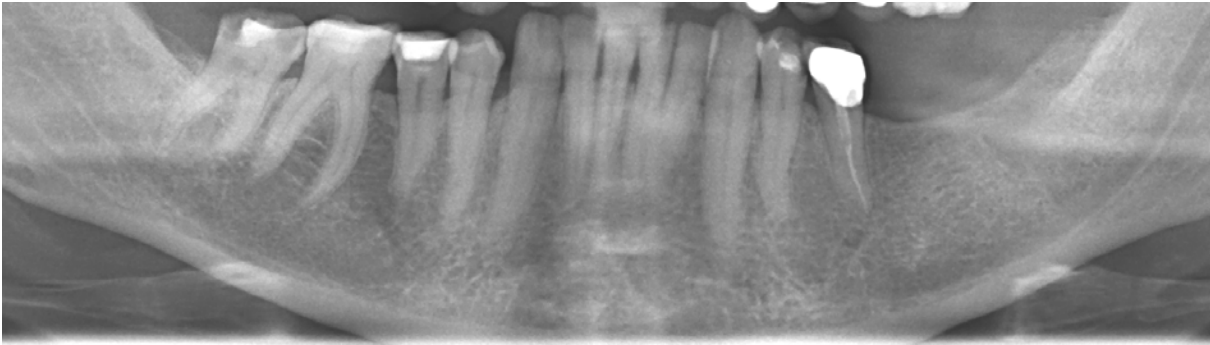
Значения упругих параметров

Материал	Коэффициент Пуассона (ν)	Модуль Юнга (μ , МПа)
Зубная ткань	0,33	70
Периодонт	0,49	0,65
Слизистая (прикрепленная)	0,5	5
Губчатая кость (при нормальной относительной плотности)	0,35	60
Пластмасса горячей полимеризации <i>Vertex</i>	0,39	1035
Материал <i>Miscopren soft</i> (подкладочный слой)	0,45	4,8

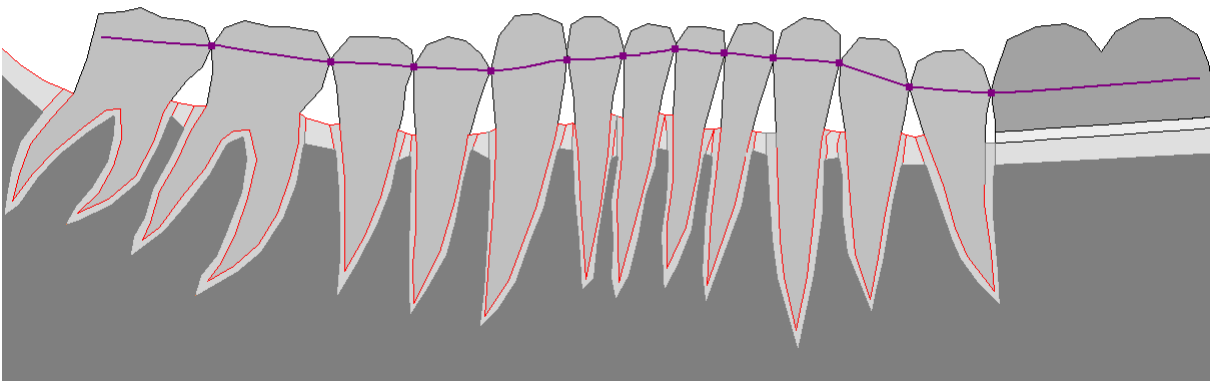
Здесь так же, как и в [3], для численного решения задачи упругости (1)–(4) применялся метод граничных элементов [1] с использованием методики [11], основанной на аналитических вычислениях некоторых функций. Эта методика позволила эффективно численно реализовать операции интегрирования и дифференцирования, которые используются для вычисления компонент напряжений и смещений в точках исследуемой конструкции.

Результаты оптимизации

На рис. 3 приведен пример плоской неоднородной конструкции, построенной с помощью описанной выше методики по одной из рентгенограмм. Как отмечалась выше, такая конструкция является существенно упрощенной моделью системы «зубы – протез – челюсть».



a



б

Рис. 3. Реальная рентгенограмма (*a*) и упрощенная модель системы «зубы – протез – челюсть» (*б*)

Результаты численного решения оптимизационной задачи (10) с использованием приведенной на рис. 3 модели позволяют сделать следующие выводы.

Использование подкладочного слоя и конструирование его формы с использованием функции \tilde{h}^* (кривой $\tilde{\gamma}^*$) позволяет существенно уменьшить на контактной границе «подкладка – слизистая» γ^p как абсолютные значения напряжений, так и величину их разброса. В частности, при $\alpha = 0,5$ в критерии (9) удается за счет рационального распределения материала подкладочного слоя существенно уменьшить значения обоих критериев (6) и (7) по сравнению с ситуацией, когда материал подкладочного слоя распределен равномерно ($h^*(s) \equiv \text{const}$, см. рис. 3). В том числе за семь итераций (11), (12) до 30% уменьшается максимальное значение напряжения и до 20% – значение разности максимального и минимального значений напряжений на контактной границе γ^p «подкладка – слизистая оболочка».

В большом числе случаев реализующиеся при численном решении задачи (10) для различных значений параметра α значения упругих параметров (модуля Юнга μ^* и коэффициента Пуассона ν^*) подкладочного слоя оказываются достаточно близкими к значениям соответствующих параметров известных материалов, например, *Miscopren soft* (см. таблицу).

Численное моделирование проводилось с помощью описанного в [5] пакета прикладных программ (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011613416 "НДС-ОПТИМА").

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения задачи оптимизации значений упругих параметров и формы подкладочного слоя могут быть использованы методы математической теории оптимального проектирования. Результаты математического и численного моделирования напряженно-деформированного состояния фрагмента зубочелюстной системы позволяют сделать следующее заключение: значения упругих параметров материала подкладочного слоя и его форма являются теми ресурсами, за счет рационального использования которых при восстановлении зубного ряда с помощью шинирующего дугового протеза можно добиться значительного снижения негативного воздействия функциональной жевательной нагрузки на слизистую оболочку протезного ложа. Следует признать, что этот вывод имеет частный характер, поскольку он базируется на результатах, полученных в рамках исследования существенно упрощенной модели системы «зубы – протез – челюсть». Получение более точных оценок выигрыша от оптимизации значений упругих параметров материала подкладочного слоя и его формы возможно на основе результатов анализа достаточно полной трехмерной математической модели указанной системы, что может быть направлением дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. Деменко В.Ф., Несвит Е.В., Новиков С.С., Шевченко А.А., Третьяк И.Г. Исследование изменения несущей способности коронки зуба при ее контактном нагружении в процессе износа с применением метода конечных элементов // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии – 2010. – № 46. – С. 47–68.
3. Жолудев С.Е., Кандоба И.Н. Об одной задаче оптимизации формы в стоматологии // Российский журнал биомеханики – 2017. – Т. 21, № 2. – С. 135–146.
4. Зайцев Д.В., Панфилов П.Е. Прочностные свойства дентина и эмали зубов человека при одноосном сжатии // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. – 2016. – Т. 21, № 3. – С. 802–804.
5. Кандоба И.Н., Спевак Л.Ф., Тарико О.С. Анализ напряженно-деформированного состояния в неоднородных конструкциях // Программные продукты и системы. – 2012. – № 1. – С. 69–75.
6. Лебеденко И.Ю., Налбанд К.Г., Перегудов А.Б., Воронов И.А. Исследование эластичных материалов для мягких подкладок съемных зубных протезов. Новое в теории и практике стоматологии: сб. науч. тр. – Ставрополь, 2003. – С. 276–281.
7. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
8. Сысоев Н.П. Методы и средства профилактики патологических изменений тканей протезного ложа при пользовании съемными протезами: автореф. дис. ... д-ра мед. наук. – Киев, 1992. – 46 с.
9. Тарико О.С., Жолудев С.Е., Кандоба И.Н. Математическое обоснование применения подкладочного слоя в шинирующих дуговых протезах при заболеваниях пародонта, сочетающихся с концевыми дефектами зубного ряда // Уральский медицинский журнал. – 2010. – № 8. – С. 26–28.

10. Федотов В.П., Спевак Л.Ф. Модифицированный метод граничных элементов в задачах механики, теплопроводности и диффузии. – Екатеринбург: УрО РАН, 2009. – 164 с.
11. Федотов В.П., Спевак Л.Ф. Аналитическое интегрирование функций влияния для решения задач упругости и теории потенциала методом граничных элементов // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19, № 2. – С. 87–104.
12. Чуйко А.Н., Шинчуковский И.А. Биомеханика в стоматологии. – Харьков: Форт, 2010. – 446 с.
13. Чумаченко Е.Н., Арутюнов С.Д., Лебеденко И.Ю. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния зубных рядов. – М.: Стоматология, 2003. – 261 с.
14. Шелковников Е.Ю., Кириллов А.И., Ефремов С.М., Рединова Т.Л., Тимофеев А.А., Метелева Т.Ю. Трехмерное математическое моделирование напряженно-деформированного состояния зуба и пломбы // Ползуновский вестник. – 2014. – № 2. – С. 54–58.
15. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. – Switzerland: Springer International Publishing, 2014. – 445 p.

ON OPTIMIZATION OF THE ELEMENTS OF DENTURES

S.E. Zholudev, I.N. Kandoba (Yekaterinburg, Russia)

The problem of optimization of the elastic parameters values and the shape of one of the elements of the splinting arc prosthesis is considered. This denture is used in orthopedic dentistry to restore the dentition. Its optimized element is a soft lining between the basis of the prosthesis and the underlying mucosa, designed to reduce the negative influence of the masticatory load on the tissues of the prosthetic bed. The paper is focused on the problem of determining the material distribution of the backing layer, which would minimize the negative influence of the masticatory load on the underlying tissues. Methods of mathematical modelling are used. It is proposed to describe the distribution of the material of the backing layer with the help of a scalar function whose values determine its thickness at the corresponding point. The desired function is defined as the limit of a special functional sequence, on the elements of which the values of a number of criteria are successively reduced. The applicability of the proposed approach is illustrated on a simplified model example, which is based on a two-dimensional inhomogeneous elasticity problem. The results of numerical modelling are presented.

Key words: soft lining, splinting arc prosthesis, stress-strain state, prosthetic bed, elastic parameters, optimal shape.

Получено 18 ноября 2017