

УДК 519.876.5

**Н.В. Смирнов, П.И. Новиков**

Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск, Россия

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА  
БИООЧИСТКИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ ЧАСОВЫМ  
РАСХОДОМ СТОЧНЫХ ВОД**

Очистка сточных вод – одна из приоритетных задач рационального природопользования. Концентрации загрязняющих веществ и патогенных организмов в сточных водах значительно увеличились за последние десятилетия. В результате существующие методы очистки сточных вод не всегда могут обеспечить необходимую степень очистки.

Поддержание постоянного значения объемной скорости подачи сточных вод, как правило, требует значительных финансовых затрат на строительство и содержание специальных резервуаров. В работе предложено дальнейшее развитие компарментальной математической модели процесса биологической очистки сточных вод для случая кусочно-постоянного в течение суток значения часового расхода сточных вод. Разработанная модель представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, которая учитывает динамику концентраций двух типов субстрата, микроорганизмов активного ила и кислорода. Для описания переключения процессов окисления с органики на аммоний и конкуренции за кислород использованы пороговые функции. Насыщение микроорганизмов активного ила субстратами и кислородом учтено с помощью функции Моно. Предложены оригинальные формулы для нахождения значений входных модельных концентраций.

Для компьютерного моделирования на языке программирования Python был написан программный комплекс. Параметрическая идентификация проведена в два этапа. Сначала методом сканирования найдены значения параметров, обеспечивающие минимум критерию оптимальности, затем значения параметров были дополнительно уточнены. Результаты компьютерного моделирования, графики динамики модельных концентраций и их значения на выходе из компарментов показывают адекватность разработанной модели процессу биоочистки воды.

Предложенные формулы и уравнения для нахождения соответственно входных и выходных значений модельных концентраций, разделение аэротенка на компарменты обеспечивают возможность нахождения значений модельных концентраций на выходе из компарментов аэротенка в любой момент времени, что необходимо для решения задач прогнозирования и оптимального управления.

**Ключевые слова:** компьютерное моделирование, биологическая очистка, сточные воды, аэрация, окисление, нитрификация, динамические системы.

**N.V. Smirnov, P.I. Novikov**

Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russian Federation

## **COMPUTER MODELLING OF THE BIOLOGICAL TREATMENT PROCESS WITH THE PCEWISE CONSTANT HOURLY INFLOW RATE OF WASTEWATER**

Wastewater treatment is one of the priority tasks of rational nature management. Concentration of pollutants and pathogens in wastewater has increased significantly in recent decades. As a result, existing wastewater treatment methods can't always provide the required purification degree.

Maintaining a constant value of the inflow rate of wastewater, typically, requires significant financial costs for the construction and maintenance of special reservoirs. The article suggests further development of a compartmental mathematical model of the biological wastewater treatment process for the case of the piecewise constant hourly inflow rate of wastewater. The model is a system of non-linear differential equations that takes into account the dynamics of two types of substrate, activated sludge and oxygen concentrations. Threshold functions are used to describe the switching of oxidation processes from organic to ammonium and competition for oxygen. Saturation of microorganisms of activated sludge by substrates and oxygen is accounted for by the Mono function. Original formulas for finding the values of input model concentrations are proposed.

The program complex for computer modelling in the Python programming language was written. Parameter estimation is carried out in two stages. First, by using the scanning method, the values of the parameters that provide the minimum of the optimality criterion were found, and then the parameter values were further refined. The computer modelling results, graphs of the model concentrations dynamics and their values at the outlet from the compartments show the adequacy of the model developed for the biological treatment process of water.

The proposed formulas and equations for finding the corresponding input and output values of model concentrations, the separation of the aeration tank into compartments, make it possible to find the values of model concentrations at the end of the aeration tank compartments at any time that is necessary for solving prediction and optimal control problems.

**Keywords:** computer modelling, biological treatment, wastewater, aeration, oxidation, nitrification, dynamic systems.

**Введение.** От качества воды в водных объектах зависит экологическая безопасность страны. Концентрации загрязняющих веществ и патогенных организмов в сточных водах резко увеличились за последние десятилетия. В результате существующие методы очистки воды не во всех случаях могут гарантировать необходимую степень очистки сточных вод, что обуславливает актуальность проведения исследований процессов биоочистки и их моделирования.

Вопросу математического моделирования процесса биоочистки посвящены работы В.А. Вавилина [1], С.В. Яковлева, Т.А. Карюхиной [2], Н.С. Жмур [3] и др. Большое количество математических моделей, которые предложили В.А. Вавилин и др., не учитывают насыщение микроорганизмов активного ила кислородом, субстратом и другие

факторы, оказывающие влияние на динамику окислительных процессов. В конце 80-х гг. XX в. W. Gujer, M. Henze, T. Matsuo и др. разработали математическую модель процесса биоочистки ASM1 [4], которая учитывает большое количество особенностей процесса биоочистки, но при этом в модели настолько много параметров и настолько большая размерность, что параметрическая идентификация и дальнейшее исследование вызывают непреодолимые трудности. Модель ASM1 задала направление для дальнейших исследований, проведенных М. Barbu [5], Q. Chai [6], D. Dochain [7], Р.А. Vanrolleghem [8] и др. За 2015–2017 гг. теме моделирования процесса биоочистки воды также было посвящено большое количество работ, в том числе [9–16].

В работах [17, 18] авторы разработали математическую модель процесса биоочистки с меньшей, чем в ASM1, размерностью и предложили алгоритм параметрической идентификации. Определение в общей биомассе концентраций гетеротрофных и автотрофных микроорганизмов требует значительных временных затрат, что обуславливает необходимость использования общей концентрации микроорганизмов активного ила. В статье представлено дальнейшее развитие математической модели [19], в частности, введена кусочно-постоянная функция расхода сточных вод, предложены формулы для нахождения входных значений модельных концентраций, разработан подход, позволяющий определять значения модельных концентраций в любой точке аэротенка в любой момент времени, а также предложены оригинальное уравнение динамики концентрации кислорода и формула для нахождения удельной скорости подачи кислорода, упрощена переменная структура модели.

**1. Математическая модель процесса биоочистки.** Процесс биологической очистки рассмотрим на примере аэротенка промежуточного типа (рис. 1), установленного на канализационных очистных сооружениях (КОС) г. Петрозаводска. Поступающий с концентрацией  $X$  активный ил в регенераторе аэротенка окисляет абсорбированный субстрат. В нескольких точках второго коридора аэротенка (всего  $nt$  точек) в иловую смесь входят сточные воды. В течение суток часовой расход сточных вод изменяется, поэтому его будем рассматривать как кусочно-постоянную функцию  $\hat{q}_{cv}(t^*)$ , где  $t^*$  – номер часа в сутках,  $t^* = 0, 1, 2, \dots$ . Объемная скорость входящих сточных вод в одной точке аэротенка находится по формуле  $q_{cv}(t^*) = \hat{q}_{cv}(t^*) / nt$ .

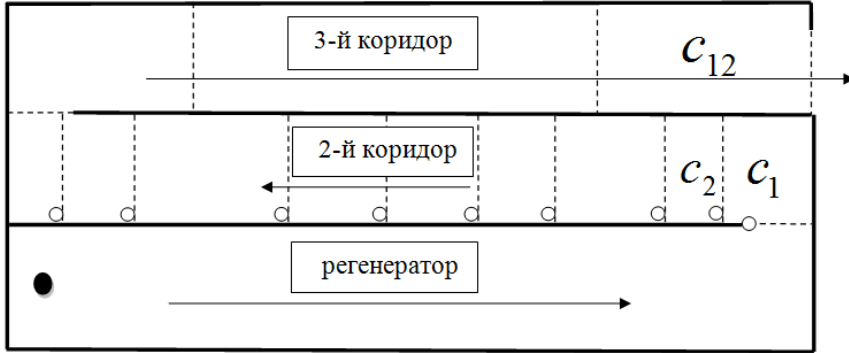


Рис. 1. Схема аэротенка: о – место вхождения сточной воды в аэротенк; • – место вхождения иловой смеси в аэротенк; → – направление движения иловой смеси; --- – граница компартов

Различного типа субстраты, содержащиеся в сточной воде, окисляются активным илом по мере прохождения коридоров аэротенка. Места отбора проб условно разделяют аэротенк на компартменты  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 12$ . На дне аэротенка расположены плети диспергаторов, которые подают необходимый для процессов окисления воздух и обеспечивают перемешивание иловой смеси.

В сточной воде выделим два типа загрязнителя: легко биоразлагаемый органический субстрат и аммоний с концентрациями  $S_S$  и  $S_{NH}$  соответственно. Условно разделим аэротенк на участки длиной  $a = 1$  м, объем каждого из которых

$$V_{el} = a \cdot b \cdot h,$$

где  $h$  – высота иловой смеси в аэротенке,  $b$  – ширина коридора аэротенка. Для нахождения значений концентрации  $S_j^{in}$ ,  $j \in \{S, NH\}$  на входе в компартмент, в начале которого расположена труба для подачи сточных вод, предложена формула

$$S_j^{in} = \frac{t_{el}(t^*)q_{cv}(t^*)S_j^{cv} + V_{el}S_j^{C-1} + V_iS_j^{C_i}}{t_{el}(t^*)q_{cv}(t^*) + V_{el} + V_i}, \quad (1)$$

где  $t_{el}(t^*)$  – время заполнения  $V_{el}$  иловой смесью,  $S_j^{cv}$  – концентрация реагента в сточной воде,  $S_j^{C-1}$  – выходная из предыдущего компартамента концентрация реагента,  $S_j^{C_i}$  – концентрация  $j$ -го реагента

в компартменте  $C_i$ ,  $V_i$  – объем  $C_i$ . Для компартментов, в начале которых не осуществляется подача сточных вод, предложена формула

$$S_j^{in} = \frac{V_{el} S_j^{C_{-1}} + V_i S_j^{C_i}}{V_{el} + V_i}. \quad (2)$$

В биомассе активного ила наблюдают два вида микроорганизмов: гетеротрофные и автотрофные, при этом концентрация микроорганизмов второго вида значительно меньше, чем концентрация микроорганизмов первого вида [20]. Гетеротрофы преимущественно окисляют углеродосодержащий субстрат, автотрофы – аммоний. При определении значения химического потребления кислорода (ХПК) учитывается расход кислорода на окисление всех органических веществ, в том числе тех, которые не будут окислены в аэротенке. В работе [17] предложена пороговая функция, позволяющая описать переключение процесса окисления с органики на аммоний при достижении концентрацией  $S_s$  некоторого значения  $\kappa_i + \delta$ :

$$f_1(S_s) = \frac{1}{1 + e^{\alpha \left( \frac{\kappa_i + \delta}{S_s} - 1 \right)}}, \quad (3)$$

где  $\kappa_i$  – наименьшее допустимое значение ХПК надильной жидкости в  $i$ -м компартменте:  $\delta$  и  $\alpha$  – соответственно достаточно малая и большая величины. В ходе компьютерных экспериментов были найдены значения констант:  $\delta = 10^{-2}$  и  $\alpha = 10^4$ , которые обеспечивают возможность уменьшения концентрации  $S_s$  до величины, которая чуть больше  $\kappa_i$ , что необходимо для непрерывности математической модели (5)–(8). Также эти значения констант обеспечивают близость функции  $f_1(S_s)$  к разрывной ступенчатой функции, при этом:

$$f_1(S_s) \approx \begin{cases} f_{\varepsilon_1}, & \text{при } S_s \in (0, \kappa_i + \delta - \varepsilon), \\ \frac{1}{2}, & \text{при } S_s \in [\kappa_i + \delta - \varepsilon, \kappa_i + \delta + \varepsilon], \\ 1 - f_{\varepsilon_2}, & \text{при } S_s \in (\kappa_i + \delta + \varepsilon, \infty), \end{cases}$$

где  $f_{\varepsilon_1}$ ,  $f_{\varepsilon_2}$ ,  $\varepsilon$  – достаточно малые положительные величины.

Наличие органических веществ провоцирует активизацию гетеротрофных микроорганизмов, которые в значительной мере подавляют автотрофные микроорганизмы в борьбе за кислород [3]. В результате процесс нитрификации сначала в значительной мере затормаживается и начинает производиться автотрофами по мере удаления органического субстрата, что отражает предложенная в [19] функция:

$$f_2(S_S, S_{NH}) = \frac{S_{NH} / (S_S - \kappa_i - \delta)}{K_a + S_{NH} / (S_S - \kappa_i - \delta)}, \quad (4)$$

где  $K_a$  – параметр, характеризующий замедление процессов нитрификации, значение которого находится экспериментально.

Пусть  $q(t^*)$  – суммарный расход смеси активного ила и сточных вод, тогда время прохождения иловой смесью  $i$ -го компартмента аэротенка можно найти следующим образом:

$$T_i^{t^*} = \frac{V_i}{q(t^*)}.$$

Используя функцию Моно  $f(S, K) = \frac{S}{S + K}$  и константы  $Q_i^{t^*} = \frac{1}{T_i^{t^*}}$ ,

разработана модификация математической модели биоочистки сточных вод, предложенной в [19], в которой добавлено уравнение динамики кислорода и для упрощения записи не указаны номера компартмента и часа в сутках:

$$\dot{S}_S = Q(S_S^{in} - S_S) - \frac{\mu_S}{Y_S} f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) f_1(S_S) X, \quad (5)$$

$$\dot{S}_{NH} = Q(S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \frac{\mu_{NH}}{Y_{NH}} f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) f_2(S_S, S_{NH}) X, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{X} = Q(X^{in} - X) + (\mu_S f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) f_1(S_S) + \\ + \mu_{NH} f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) f_2(S_S, S_{NH}) - b) X, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_O = Q(S_O^{in} - S_O) + u - v - \left( \frac{1 - \hat{Y}_S}{Y_S} \mu_S f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) f_1(S_S) + \right. \\ \left. + \frac{4,57 - \hat{Y}_{NH}}{Y_{NH}} \mu_S \beta_{NH,O} f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) f_2(S_S, S_{NH}) \right) X, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $u = \frac{K_{von} v_{von} K_{disp,k} p r_O \rho_O}{V_i K_{tan k} K_{disp}}$ ,

$S_S^{in}$  и  $S_S$  (г ХПК/м<sup>3</sup>),  $S_{NH}^{in}$  и  $S_{NH}$  (г NH<sub>4</sub><sup>+</sup>/м<sup>3</sup>),  $S_O^{in}$  и  $S_O$  (г O<sub>2</sub>/м<sup>3</sup>),  $X^{in}$  и  $X$  (г акт. ила/м<sup>3</sup>) – концентрации на входе и выходе из компартмента соответственно легко биоразложимого органического субстрата, аммония, растворенного кислорода, активного ила,  $K_S$  (г ХПК/м<sup>3</sup>) и  $K_{NH}$  (г NH<sub>4</sub><sup>+</sup>/м<sup>3</sup>) – коэффициенты полунасыщения легко биоразложимым органическим субстратом и аммонием соответственно,  $K_{O,H}$  и  $K_{O,A}$  (г O<sub>2</sub>/м<sup>3</sup>) – коэффициенты полунасыщения кислородом при окислении легко биоразложимого органического субстрата и аммония соответственно,  $Y_S$  (г активного ила/ г ХПК) и  $Y_{NH}$  (г активного ила/ г NH<sub>4</sub><sup>+</sup>) – коэффициенты перехода массы легко биоразложимого органического субстрата и аммония соответственно в биомассу,  $b$  (1/мин) – скорость распада микроорганизмов,  $\mu_S$  и  $\mu_{NH}$  (1/мин) – максимум скорости роста за счет окисления легко биоразложимого органического субстрата и аммония соответственно,  $\hat{Y}_S$  и  $\hat{Y}_{NH}$  – безразмерные величины, значения которых равны численным значениям соответствующих параметров,  $u$  – удельная скорость подачи кислорода,  $v$  (г O<sub>2</sub>/мин · м<sup>3</sup>) – удельная скорость перехода кислорода через поверхность воды в атмосферу,  $\rho_O$  – плотность воздуха,  $\beta_{NH,O}$  (г O<sub>2</sub> / г NH<sub>4</sub><sup>+</sup>) – параметр, значение которого находится экспериментально,  $V_i$  – объем  $i$ -го компартмента,  $pr_O$  – доля кислорода в объеме воздуха,  $K_{tan k}$  – количество аэротенков,  $K_{disp}$  и  $K_{disp,k}$  – количество плетей диспергаторов в аэротенке и в его  $k$ -м коридоре соответственно,  $K_{von}$  – количество воздуходувок в аэротенке,  $v_{von}$  – объемная скорость подачи воздуха одной воздуходувкой.

Для проведения компьютерных экспериментов разделим временную ось на интервалы  $t_{el}$ . Для каждого компартмента по формулам (1) и (2) находят значения входных концентраций. Интегрируя систему (5)–(8), находят значения этих концентраций через интервал  $t_{el}$ . Такая последовательность действий повторяется необходимое количество раз, что позволяет находить значения выходных модельных концентраций в случае кусочно-постоянного в течение суток часового расхода сточных вод.

**2. Результаты компьютерного моделирования.** На языке программирования Python написан программный комплекс, позволяющий решать задачи параметрической идентификации модели и прогнозирования. При проведении численных экспериментов был использован решатель ОДУ Lsode из библиотеки odespy, который использовал метод Адамса. Разбиение каждого интервала  $t_{el}$  на 1000 точек оказалось оптимальным в смысле минимизации времени расчетов при допустимых погрешностях расчетов.

Для нахождения значений параметров модели (5)–(8) было расширено множество допустимых значений параметров, предлагаемых в работе [20]. Методом сканирования, который также был использован в работе [18], с помощью вычислительного кластера КарНЦ РАН [21] для каждого компартмента были найдены значения вектора параметров  $P^* = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $n$  – количество параметров, которые доставляют минимум функционалу:

$$J = \sum_{k=1}^4 sc_k^2 (y_k - y_k^m(P))^2,$$

где  $sc_k$  – масштабирующие коэффициенты, равные величинам, которые являются обратными значениям соответствующих входных концентраций,  $y_k^m$ ,  $y_k$  – модельные и экспериментальные значения концентраций,  $P$  – вектор значений параметров. Векторы приближенных значений параметров  $P^*$  были вручную уточнены и получены векторы  $\hat{P}$ . Результаты параметрической идентификации приведены в табл. 1, причем для удобства записи параметры  $\mu_s$ ,  $\mu_{NH}$ ,  $b$  имеют размерность 1/сут. Из табл. 1 видно, что многие из параметров принимают постоянное значение для всех компартментов, наиболее сильно изменяются значения параметров скорости роста микроорганизмов за счет окисления субстратов, уменьшение приблизительно в два раза значения параметра  $v$  в компартментах третьего коридора обусловлено уменьшением в два раза объема подаваемого в него воздуха по сравнению со вторым коридором аэротенка.



Таблица 1

Значения  $\hat{P}$  в компартментах  $C_i$

$C_i$	$Y_s$	$Y_{NH}$	$\mu_s$	$\mu_{NH}$	$K_S$	$K_{NH}$	$K_{O,H}$	$K_{O,A}$	$K_\alpha$	$\beta_{NH,O}$	$b$	$v$
$C_1$	0,75	0,28	0,155	0,020	120,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	2,25	1,725
$C_2$	0,75	0,28	0,390	0,030	150,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	0,00	1,729
$C_3$	0,75	0,28	0,210	0,010	150,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	0,60	1,769
$C_4$	0,75	0,38	0,160	0,022	150,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	0,03	1,754
$C_5$	0,75	0,38	0,480	0,001	150,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	0,00	1,764
$C_6$	0,75	0,38	0,210	0,007	150,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	0,00	1,7625
$C_7$	0,75	0,38	0,150	0,003	150,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	0,00	1,7543
$C_8$	0,75	0,75	0,690	0,030	150,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	0,00	1,739
$C_9$	0,75	0,75	0,510	0,065	75,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	0,00	1,685
$C_{10}$	0,75	0,75	0,200	0,001	150,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	0,00	0,878
$C_{11}$	0,75	0,75	0,200	0,001	150,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	0,00	0,868
$C_{12}$	0,75	0,75	0,004	0,001	150,00	1,75	0,25	2,00	3,00	1,00	0,00	0,883

На рис. 2 отражена динамика модельных концентраций в компартменте  $C_{10}$  в течение часа.

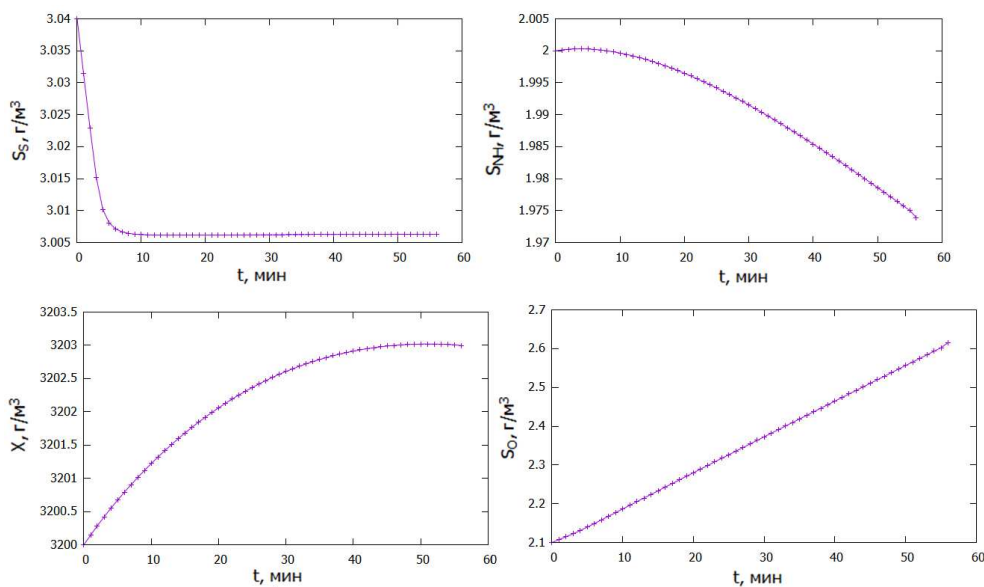


Рис. 2. Динамика концентраций легко биоразложимого органического субстрата, аммония, общей концентрации активного ила и кислорода в  $C_{10}$

Графики в правом и левом верхнем углу на рис. 2 подтверждают корректную отработку пороговых функций (3) и (4) тем, что процесс нитрификации заторможен при концентрации органических веществ больше порогового значения.

В течение часа расход сточных вод постоянный, в результате график в левом нижнем углу (см. рис. 2) отражает, что концентрация активного ила немного увеличилась за счет окисления поступившего субстрата. Увеличение значения концентрации кислорода на графике в правом нижнем углу (см. рис. 2) обусловлено изменением часового расхода сточных вод при неизменной скорости подачи кислорода.

На канализационно-очистных сооружениях (КОС) г. Петрозаводска были получены экспериментальные данные – значения модельных концентраций в начальный момент времени. Экспериментальные значения модельных концентраций через 60 мин после отбора проб были получены на основе ранее полученных данных.

Путем интегрирования системы (5)–(8) были найдены значения модельных концентраций через 60 мин после начала эксперимента. Близость значений модельных и экспериментальных концентраций (табл. 2, см. рис. 2) показывает адекватность разработанной математической модели процессу биоочистки сточных вод.

Таблица 2

Экспериментальные и модельные концентрации  
на выходе из компартментов

Параметр	$S_s$ (г ХПК/м <sup>3</sup> )		$S_{NH}$ (г NH <sub>4</sub> <sup>+</sup> /м <sup>3</sup> )		$X$ (кг микроорганизмов/м <sup>3</sup> )		$S_0$ (г O <sub>2</sub> /м <sup>3</sup> )	
	Эксп. данные	Мод. данные	Эксп. данные	Мод. данные	Эксп. данные	Мод. данные	Эксп. данные	Мод. данные
$C_1$	2,98	2,97	0,56	0,55	3,73	3,73	3,31	3,33
$C_2$	4,20	4,20	0,90	0,89	3,67	3,66	3,15	3,16
$C_3$	4,55	4,55	0,90	0,88	3,56	3,56	2,67	2,67
$C_4$	5,01	5,01	0,97	0,97	3,50	3,50	3,46	3,46
$C_5$	4,65	4,65	1,40	1,35	3,49	3,41	3,64	3,63
$C_6$	4,52	4,50	1,31	1,31	3,43	3,37	3,43	3,43
$C_7$	4,26	4,26	1,50	1,50	3,39	3,36	3,78	3,78
$C_8$	4,37	4,38	1,90	1,90	3,38	3,27	2,97	2,97
$C_9$	4,20	4,26	2,10	2,07	3,26	3,19	2,54	2,52
$C_{10}$	3,02	3,00	2,00	1,97	3,30	3,20	2,64	2,61
$C_{11}$	3,02	2,99	1,02	0,90	3,28	3,15	2,33	2,33
$C_{12}$	3,10	3,10	0,50	0,45	3,32	3,28	2,47	2,46

**Выводы.** В работе модифицирована модель процесса биологической очистки с целью возможности ее применения в случае кусочно-постоянного в течение суток значения часового расхода сточных вод. Добавленное уравнение динамики концентрации кислорода позволяет более точно моделировать процесс биоочистки. Созданный программный комплекс позволяет решать задачи прогнозирования и параметрической идентификации. Результаты компьютерного моделирования, близость модельных и экспериментальных данных, полученные графики динамики модельных концентраций подтверждают адекватность модели реальному процессу биоочистки. Предложенный алгоритм расчета позволяет находить значения модельных концентраций в любой точке аэротенка в любой момент времени, что необходимо для решения задач прогнозирования и оптимального управления.

### **Библиографический список**

1. Вавилин В.А. Время оборота биомассы и деструкция органического вещества в системах биологической очистки. – М.: Наука, 1986. – 143 с.
2. Яковлев С.В., Карюхина Т.А. Биохимические процессы в очистке сточных вод. – М.: Стройиздат, 1980. – 200 с.
3. Жмур Н.С. Управление процессом и контроль результата очистки сточных вод на сооружениях с аэротенкам. – М.: Луч, 1997. – 172 с.
4. Activated sludge model no. 1 / M. Henze, C.P.L. Grady, W. Gujer, T. Matsuo, G.V.R. Marais [et al.]. – London: IAWPRC, 1987.
5. Barbu M., Caraman S., Ceanga E. Control strategies of a multivariable wastewater treatment process. comparative study // Workshop on Modeling and Control of Complex Systems, Proceedings, CD-ROM. – Ayia Napa, Cyprus. – 2005.
6. Chai Q. modeling, estimation and control of biological wastewater treatment plants. Doctoral Theses at NTNU 2008:108 at HiT. – Porsgrunn, 2008.
7. Dochain D., Vanrolleghem P.A. Dynamical modelling and estimation in wastewater treatment processes. – London: IWA Publishing, 2001. – 342 p.

8. Evaluation of an ASM1 model calibration procedure on a municipal-industrial wastewater treatment plant / B. Petersen, K. Gernaey, P.A. Vanrolleghem, M. Henze // *Journal of Hydroinformatics*. – 2002. – № 04.1. – P. 15–38.

9. Numerical solution of a multi-class model for batch settling in water resource recovery facilities / R. Bürger, S. Diehl, M.C. Martíá, P. Mulet, I. Nopens, E. Torfs, P.A. Vanrolleghem // *Applied Mathematical Modelling*. – September, 2017. – Vol. 49. – P. 415–436. DOI: 10.1016/j.apm.2017.05.014

10. Villez K., Vanrolleghem P.A., Corominas L. Optimal flow sensor placement on wastewater treatment plants // *Water Research*. – 2016. – Vol. 101. – P. 75–83. DOI: 10.1016/j.watres.2016.05.068

11. Evaluation of different nitrous oxide production models with four continuous long-term wastewater treatment process data series / M. Sperandio, M. Pocquet, L. Guo, B.-J. Ni, P.A. Vanrolleghem, Z. Yuan // *Bioprocess Biosyst Eng*. – 2016. – Vol. 39. – P. 493–510. DOI: 10.1007/s00449-015-1532-2

12. Mathematical modeling of autotrophic denitrification (AD) process with sulphide as electron donor / G. Xu, F. Yin, S. Chen, Y. Xu, H.-Q. Yu // *Water Research*. – 2016. – Vol. 91. – P. 225–234. DOI: 10.1016/j.watres.2016.01.011

13. Mathematical modeling of simultaneous carbon-nitrogen-sulfurremoval from industrial wastewater / X.-J. Xu, C. Chen, A.-J. Wang, B.-J. Ni, W.-Q. Guo, Y. Yuan, C. Huang, X. Zhou, D.-H. Wu, D.-J. Lee, N.-Q. Ren. // *Journal of Hazardous Materials*. – 2017. – Vol. 321. – P. 371–381. DOI: /10.1016/j.jhazmat.2016.08.074

14. Simsek H. Mathematical modeling of wastewater-derived biodegradable dissolved organic nitrogen // *Environmental Technology*. – 2016. – P. 2879–2889. DOI: 10.1080/09593330.2016.1167964

15. Mathematical simulating the process of aerobic granular sludge treating high carbon and nitrogen concentration wastewater / J. Zhao, J. Huang, M. Guan, Y. Zhao, G. Chen, X. Tian // *Chemical Engineering Journal*. – 2016. – Vol. 306. – P. 676–684. DOI: 10.1016/j.cej.2016.07.098

16. Grigorieva E.V., Bondarenko N.V., Khailov E.N. Time optimal control problem for the waste water biotreatment model // *Journal of Dynamical and Control Systems*. – January, 2015. – Vol. 21. – P. 3–24. DOI: 10.1007/s10883-014-9214-y

17. Кириллов А.Н., Рейсс Т.В., Смирнов Н.В. Математическое моделирование процессов нитрификации и окисления органических веществ в проточной биосистеме // Ученые записки Петрозавод. гос. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2013. – № 4(133). – С. 105–109.

18. Кириллов А.Н., Смирнов Н.В. Параметрическая идентификация математической модели процесса биологической очистки в аэротенке // Труды Карел. науч. центра Рос. акад. наук. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. – 2014. – № 4. – С. 67–74.

19. Смирнов Н.В. Математическое моделирование процесса биологической очистки воды с учетом общей концентрации микроорганизмов активного ила // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2016. – № 02(85). – Ч. II. – С. 81–86.

20. A nonlinear observer for an activated sludge wastewater treatment process / B. Boulkroune, M. Darouach, S. Gille [et al.] // American Control Conference. – USA, 2009. – P. 1027–1033.

21. Центр высокопроизводительной обработки данных. ЦКП КарНЦ РАН [Электронный ресурс]. – URL: <http://cluster.krc.karelia.ru> (дата обращения: 01.03.2017).

### **References**

1. Vavilin B.A. Vremia oborota biomassy i destrukttsiia organicheskogo veshchestva v sistemakh biologicheskoi ochistki [Time of biomass turnover and destruction of organic matter in the systems of biological treatment]. Moscow: Nauka, 1986. 143 p.

2. Iakovlev S.V., Kariukhina T.A. Biokhimicheskie protsessy v ochistke stochnykh vod [Biochemical processes in waste water treatment]. Moscow: Stroiizdat, 1980. 200 p.

3. Zhmur N.S. Upravlenie protsessom i kontrol' rezul'tata ochistki stochnykh vod na sooruzheniiakh s aerotenkam [The management of process and control wastewater treatment result on treatment plants with aeration tanks]. Moscow: Luch, 1997. 172 p.

4. Henze M., Grady C.P.L., Gujer W., Matsuo T., Marais G.V.R. [et al.]. Activated sludge model no. 1. London: IAWPRC, 1987.

5. Barbu M., Caraman S., Ceanga E. Control strategies of a multivariable wastewater treatment process. comparative study. *Workshop on Modeling and Control of Complex Systems, Proceedings, CD-ROM*. Ayia Napa, Cyprus, 2005.

6. Chai Q. Modeling, estimation and control of biological wastewater treatment plants. Doctoral Theses at NTNU 2008:108 at HiT. Porsgrunn, 2008.

7. Dochain D., Vanrolleghem P.A. Dynamical modelling and estimation in wastewater treatment processes. – London: IWA Publishing, 2001. 342 p.

8. Petersen B., Gernaey K., Vanrolleghem P.A., Henze M. Evaluation of an ASM1 model calibration procedure on a municipal-industrial wastewater treatment plant. *Journal of Hydroinformatics*, 2002, no. 04.1, pp. 15-38.

9. Bürger R., Diehl S., Martíá M.C., Mulet P., Nopens I., Torfs E., Vanrolleghem P.A. Numerical solution of a multi-class model for batch settling in water resource recovery facilities. *Applied Mathematical Modelling*. September, 2017, vol. 49, pp. 415-436. DOI: 10.1016/j.apm.2017.05.014

10. Villez K., Vanrolleghem P.A., Corominas L. Optimal flow sensor placement on wastewater treatment plants. *Water Research*, 2016, vol. 101, pp. 75-83. DOI: 10.1016/j.watres.2016.05.068

11. Sperandio M., Pocquet M., Guo L., Ni B.-J., Vanrolleghem P.A., Yuan Z. Evaluation of different nitrous oxide production models with four continuous long-term wastewater treatment process data series. *Bioprocess Biosyst Eng*, 2016, vol. 39, pp. 493-510. DOI: 10.1007/s00449-015-1532-2

12. Xu G., Yin F., Chen S., Xu Y., Yu H.-Q. Mathematical modeling of autotrophic denitrification (AD) process with sulphide as electron donor. *Water Research*, 2016, vol. 91, pp. 225-234. DOI: 10.1016/j.watres.2016.01.011

13. Xu X.-J., Chen C., Wang A.-J., Ni B.-J., Guo W.-Q., Yuan Y., Huang C., Zhou X., Wu D.-H., Lee D.-J., Ren N.-Q. Mathematical modeling of simultaneous carbon-nitrogen-sulfur removal from industrial wastewater. *Journal of Hazardous Materials*, 2017, vol. 321, pp. 371-381. DOI: /10.1016/j.jhazmat.2016.08.074

14. Simsek H. Mathematical modeling of wastewater-derived biodegradable dissolved organic nitrogen. *Environmental Technology*, 2016, pp. 2879-2889. DOI: 10.1080/09593330.2016.1167964

15. Zhao J., Huang J., Guan M., Zhao Y., Chen G., Tian X. Mathematical simulating the process of aerobic granular sludge treating high carbon and nitrogen concentration wastewater. *Chemical Engineering Journal*, 2016, vol. 306, pp. 676-684. DOI: 10.1016/j.cej.2016.07.098

16. Grigorieva E.V., Bondarenko N.V., Khailov E.N. Time optimal control problem for the waste water biotreatment model. *Journal of Dynamical and Control Systems*. January, 2015, vol. 21. pp. 3-24. DOI: 10.1007/s10883-014-9214-y

17. Kirillov A.N., Reiss T.V., Smirnov N.V. Matematicheskoe modelirovanie protsessov nitrifikatsii i okisleniia organicheskikh veshchestv v protochnoi biosisteme [Mathematical modeling of nitrification and organic matter oxidation processes in flow-through biosystem]. *Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2013, no. 4(133), pp. 105-109.

18. Kirillov A.N., Smirnov N.V. Parametricheskaiia identifikatsiia matematicheskoi modeli protsessa biologicheskoi ochistki v aerotenke [Parameter estimation of the mathematical model of the biological treatment process in an aeration tank]. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk. Ser. Matematicheskoe modelirovanie i informatsionnye tekhnologii*, 2014, no. 4, p. 67-74.

19. Smirnov N.V. Matematicheskoe modelirovanie protsessa biologicheskoi ochistki vody s uchetom obshchei kontsentratsii mikroorganizmov aktivnogo ila [Mathematical modeling of the biological treatment process with the total concentration of the activated sludge microorganisms]. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 2016, no. 02(85), part II, pp. 81-86.

20. Boulkroune B., Darouach M., Gille S. [et al.]. A nonlinear observer for an activated sludge wastewater treatment process. *American Control Conference*. USA, 2009, pp. 1027-1033.

21. Tsentr vysokoproizvoditel'noi obrabotki dannykh. Tsentr kollektivnogo pol'zovaniia Karel'skogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk [Center for collective use of Karelian Research Centre of Russian academy of Sciences], available at: <http://cluster.krc.karelia.ru> (accessed 01 March 2017).

### **Сведения об авторах**

**Смирнов Николай Васильевич** (Петрозаводск, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория вероятностей и анализа данных» Петрозаводского государственного университета (185910, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33, e-mail: nvsmirnov87@gmail.com).

**Новиков Павел Иванович** (Петрозаводск, Россия) – студент Института математики и информационных технологий Петрозаводского государственного университета (185910, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33, e-mail: pavnovik@gmail.com).

### **About the authors**

**Smirnov Nikolay Vasilyevich** (Petrozavodsk, Russian Federation) is a Ph.D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Department of Probability Theory and Data Analysis, Petrozavodsk State University (185910, Petrozavodsk, 33, pr. Lenina, e-mail: nvsmirnov87@gmail.com).

**Novikov Pavel Ivanovich** (Petrozavodsk, Russian Federation) is a Student of Institute of Mathematics and Information Technologies, Petrozavodsk State University (185910, Petrozavodsk, 33, pr. Lenina, e-mail: pavnovik@gmail.com).

Получено 09.10.2017