УДК 517.927

Э.В. Плехова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе получены достаточные условия существования решения задачи Коши для дифференциального уравнения $x''(t)+\frac{\gamma}{t^2}x(t)=f\left(t,x(t),x'(t)\right),\quad t\in[0;1].$

Ключевые слова: разрешимость, задача Коши, коэффициент сюръективности.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x''(t)+\frac{\gamma}{t^2}x(t)=f\left(t,x(t),x'(t)\right),\quad t\in[0;1], \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases} \tag{1}$$

где $f:[0;1]\times R\times R\to R$ – функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори, γ – константа.

В работе получены достаточные условия существования решения задачи Коши (1). При этом рассматриваемое множество значений параметра γ частично содержит такие значения параметра γ, при которых соответствующая линейная краевая задача является неоднозначной разрешимой.

Пусть $L_2=L_2[0;1]$ – банахово пространство функций $y:[0;1]\to R$, суммируемых с квадратом по Лебегу. Решение задачи (1) будем искать в пространстве $W_2^2=W_2^2[0;1]$ – абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x:[0;1]\to R$, таких, что $x''\in L_2$. Рассмотрим подпространство $W_0=\left\{x\in W_2^2 : x(0)=x'(0)=0\right\}$. Отметим, что задача Коши (1) эквивалентна дифференциальному уравнению (1_1)

на подпространстве W_0. Норму на W_0 определим равенством $\|x\| = \|x''\|_{L_2}$.

Для линейного ограниченного оператора $L: X \to Y$, где X, Y – банаховы пространства, введем понятие коэффициента сюръективности.

Определение [1]. Число $q(L)$, определенное равенством

$$q(L) = \inf_{\|z\|=1} \|L^* z\|,$$

где $L^*: Y^* \to X^*$ – сопряженный с L оператор, называется коэффициентом сюръективности линейного ограниченного оператора L.

Отметим некоторые свойства коэффициента сюръективности, используемые в данной работе.

Лемма 1 [1]. Для линейных ограниченных операторов L_1 и L_2 справедливы утверждения:

1) оператор L_1 сюръективен тогда и только тогда, когда $q(L_1) > 0$;

2) $q(L_1 + L_2) \geq q(L_1) - \|L_2\|$.

Для доказательства основного результата нам потребуются вспомогательные утверждения об операторах Чезаровского типа

$$(Cx)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds, \tag{2}$$

$$(Ay)(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t sy(s)\,ds. \tag{3}$$

Оператор (2) достаточно хорошо изучен [2] и носит название оператора Чезаро. Будем использовать оценки коэффициента сюръективности оператора $I + \gamma C: L_2 \to L_2$ [3], где I – тождественный оператор, C – оператор Чезаро, определенный равенством (2).

Лемма 2 [3]. $q(I + \gamma C) = 1$ при $\gamma \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$;

$$q(I + \gamma C) \geq (1 + 2\gamma)^2 \text{ при } \gamma \in (-1; -1/2);$$

$$q(I + \gamma C) \geq 1 + 2\gamma \text{ при } \gamma \in (-1/2; 0).$$

В следующем утверждении получено точное значение нормы оператора (3).

Лемма 3. Оператор $A: L_2 \to L_2$ ограничен и

$$\|A\|_{L_2 \to L_2} = \frac{2}{3}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $y \in L_2$ – произвольный элемент и $\varepsilon \in (0,1)$. Положим

$$M_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{t^2} \int_0^t s |y(s)| ds \right)^2 dt.$$

Отметим, что для любой последовательности $\varepsilon_n \to 0$ последовательность M_{ε_n} монотонно возрастает. Кроме того, справедлива оценка

$$M_\varepsilon = -\frac{1}{3}\left(1-\varepsilon^{-3}\right)\left(\int_0^\varepsilon s|y(s)|ds\right)^2 + \frac{2}{3}\int_\varepsilon^1 \left(\int_0^t s|y(s)|ds\right) t\left(t^{-3}-1\right)|y(t)| \cdot dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{3}\left|\varepsilon^{-3}-1\right| \int_0^\varepsilon s^2 ds \cdot \int_0^\varepsilon |y(s)|^2 ds + \frac{2}{3}\left(\int_\varepsilon^1 \left(t^{-2}\int_0^t s|y(s)|ds\right)^2 dt\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int_\varepsilon^1 \left(t^3-1\right)^2 |y(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \frac{1}{3^2}\left(1-\varepsilon^3\right)\int_0^\varepsilon |y(s)|^2 ds + \frac{2}{3} M_\varepsilon^{1/2} \|y\|.$$

Полученное неравенство запишем в эквивалентном виде:

$$M_\varepsilon^{1/2} \leq \frac{1}{3}\left(1-\varepsilon^3\right)\int_0^\varepsilon |y(s)|^2 ds \cdot M_\varepsilon^{-1/2} + \frac{2}{3}\|y\|. \tag{5}$$

Предположение $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon = \infty$ противоречит неравенству (5), следовательно, $M_\varepsilon < \infty$.

Таким образом, существует конечный предел M_ε при $\varepsilon \to 0$.

Переходя в неравенстве (5) к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к оценке

$$\|Ay\| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon^{1/2} \leq \frac{2}{3}\|y\|. \tag{6}$$

Для доказательства равенства (4) рассмотрим последовательность

$$y_n(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1/n^2, \\ 1/\sqrt{2t\ln n}, & t > 1/n^2. \end{cases}$$

Отметим, что $y_n \in L_2$ и $\|y_n\| = 1$.

Так как $\|Ay_n\|^2 = \frac{2}{9\ln n}\left(\frac{4}{3}n^{-3} - \frac{1}{3}n^{-6} + 2\ln n + 1\right)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\|Ay_n\| = \frac{2}{3}$ и, следовательно, $\|A\|_{L_2\to L_2} = \frac{2}{3}$.

Лемма доказана.

Перейдем к формулировке условий существования решений задачи Коши (1).

Теорема. Пусть функция $f(t,u,v)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|f(t,u,v)\right| \le a(t) + b_1|u| + b_2|v|, \quad a \in L_2, b_i \ge 0, i = 1,2,$$

для любого $t \in [0;1]$ и произвольных $u, v \in R$, и константы $b_i, i = 1,2$ таковы, что выполнено неравенство

$$\max\left\{\frac{b_1}{2\sqrt{3}}, b_2\right\} < \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{2}{3}\gamma \ \text{ при } \gamma \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right]; \\ (2\gamma+1)^2 + \frac{2}{3}\gamma \ \text{ при } \gamma \in \left(-1; -\frac{7}{12} - \frac{\sqrt{13}}{12}\right]; \\ 1 + \frac{8}{3}\gamma \ \text{ при } \gamma \in \left(-\frac{3}{8}; 0\right]; \\ 1 - \frac{2}{3}\gamma \ \text{ при } \gamma \in \left(0; \frac{3}{2}\right). \end{array}\right. \tag{7}$$

Тогда задача Коши (1) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Подстановка $y(t) = x''(t)$ позволяет перейти от задачи (1) к эквивалентному интегральному уравнению

$$y(t) + \frac{\gamma}{t^2}\int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds = f\left(t, \int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds, \int_0^t y(s)\,ds\right) \tag{8}$$

в пространстве L_2.

Уравнение (8) запишем в операторном виде:

$$(I + \gamma C - \gamma A)\,y = Fy,$$

где $I: L_2 \to L_2$ – тождественный оператор, операторы C и A – сингулярные операторы, определенные равенствами (2) и (3) соответственно, оператор $F: L_2 \to L_2$ $(Fy)(t) = f\left(t, \int_0^t (t-s)y(s)ds, \int_0^t y(s)ds\right)$.

Согласно лемме 3 для нормы оператора γA справедливо равенство $\|\gamma A\|_{L_2 \to L_2} = \frac{2}{3}|\gamma|$. Для каждого из перечисленных интервалов значений параметра γ оценим снизу $q(I + \gamma C - \gamma A)$. При этом воспользуемся утверждениями лемм 1 и 2.

$$q(I + \gamma C - \gamma A) \geq \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{2}{3}\gamma \text{ при } \gamma \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right); \\ (2\gamma+1)^2 + \frac{2}{3}\gamma \text{ при } \gamma \in \left(-1; -\frac{7}{12} - \frac{\sqrt{13}}{12}\right); \\ 1 + \frac{8}{3}\gamma \text{ при } \gamma \in \left(-\frac{3}{8}; 0\right); \\ 1 - \frac{2}{3}\gamma \text{ при } \gamma \in \left(0; \frac{3}{2}\right). \end{array}\right.$$

Так как для произвольного $y \in L_2$ справедливы неравенства

$$\left|\int_0^t y(s)ds\right| \leq \sqrt{t}\|y\|_{L_2}, \quad \left|\int_0^t (t-s)y(s)ds\right| \leq \frac{t^{3/2}}{\sqrt{3}}\|y\|_{L_2},$$

то для вполне непрерывного оператора F справедлива оценка

$$\|Fy\| \leq |a| + b_1\left\|\frac{t^{3/2}}{\sqrt{3}}\right\|\|y\| + b_2\left\|t^{1/2}\right\|\|y\| \leq |a| + \max\left\{\frac{b_1}{2\sqrt{3}}, b_2\right\}\|y\|.$$

Из условий теоремы следует, что $q(I + \gamma C - \gamma A) > b$, где $b = \max\left\{\frac{b_1}{2\sqrt{3}}, b_2\right\}$.

Применение теоремы 2 работы [4] завершает доказательство.

Подчеркнем, что множество значений параметра γ, при которых доказана разрешимость задачи (1), частично включает такие γ, при которых соответствующая линейная краевая задача разрешима неоднозначно.

Библиографический список

1. Пич А. Операторные идеалы. – М.: Мир, 1982. – 536 с.

2. Muntean I. The spectrum of the Cesaro orepator // Mathematica. – 1980. – Vol. 22. – P. 97–105.

3. Абдуллаев А.Р. О разрешимости задачи Коши для сингулярного уравнения второго порядка в критическом случае // Труды Института прикладной математики им. И.Н. Векуа. Некоторые вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси, 1990. – № 37. – С. 5–11.

4. Абдуллаев А.Р. Нелинейные возмущения линейного сюръективного оператора // Краевые задачи/ Перм. политехн. ин-т. – Пермь, 1986. – с. 41–44.

Получено 2.07.2011

E.V. Plekhova

The perm national research polytechnic university

SOLVABILITY OF CASCHY PROBLEM FOR SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATION

In the paper a sufficient conditions of the solvability of a Caschy problem for the differential equation $x''(t)+\frac{\gamma}{t^2}x(t)=f\left(t,x(t),x'(t)\right),\quad t\in[0;1]$ are proposed.

Keywords: solvability, Caschy problem, surjectivity coefficient.