

DOI 10.15593/2409-5125/2017.03.06

УДК 656.1

**М.Г. Бояршинов, И.Н. Бояршинова,
И.А. Потапова, Т.Р. Исмагилов**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

ОПТИМИЗАЦИЯ ЦИКЛА РАБОТЫ СВЕТОФОРА НА РЕГУЛИРУЕМОМ ПЕРЕКРЕСТКЕ

Моделирование и оптимальное планирование дорожной сети – одна из актуальных задач, привлекающих внимание большого числа исследователей как в нашей стране, так и за рубежом, начиная с середины XX в. и до сегодняшнего дня.

Непрерывный рост числа автомобилей приводит к снижению пропускной способности транспортной сети, повышению загрузки дорог, образованию транспортных заторов. Перекрестки являются наиболее проблемными участками. Совершенствование методов расчета средств организации движения, определение оптимальных параметров функционирования регулируемых светофором перекрестков может улучшить работу транспортной сети, повысить пропускную способность перекрестков.

В работе представлено решение задачи оптимизации времени работы разрешающего сигнала светофора на регулируемом перекрестке с заданными значениями потоков автомобилей в каждом из направлений. В качестве целевой функции выбрано суммарное время ожидания для всех машин каждого из направлений регулируемого перекрестка. Параметрами оптимизации выступают длительности разрешающего сигнала светофора. В качестве ограничений в задаче оптимизации используются максимальная и минимальная длительности разрешающего и запрещающего сигналов. Для поиска условного экстремума использован метод множителей Лагранжа, позволяющий найти точное решение задачи, не являющееся целочисленным. Для поиска целочисленного решения применен численный метод прямого поиска. Поскольку поставленная задача относится к целочисленному программированию при наличии ограничений, выполнен перебор точек допустимой области с целыми значениями переменных, ближайших к точке оптимума, и среди них определена точка с наименьшим значением целевой функции. Сравнение численного и точного решений оптимизационной задачи показало удовлетворительную близость полученных результатов.

Ключевые слова: регулируемый перекресток, цикл работы светофора, оптимизация, целевая функция, ограничения.

Непрерывный рост числа автомобилей приводит к снижению пропускной способности транспортной сети, повышению загрузки дорог, образованию транспортных заторов. Самыми проблемными являются участки пере-

Бояршинов М.Г., Бояршинова И.Н., Потапова И.А., Исмагилов Т.Р. Оптимизация цикла работы светофора на регулируемом перекрестке // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная экология. Урбанистика. – 2017. – № 3. – С. 85–93. DOI: 10.15593/2409-5125/2017.03.06

Boyarshinov M., Boyarshinova I., Potapova I., Ismagilov T. Optimization of a traffic light working cycle at a controlled intersection. PNRPU. Applied ecology. Urban development. 2017. No. 3. Pp. 85-93. DOI: 10.15593/2409-5125/2017.03.06

сечения дорог, поэтому цель данной работы – определение оптимальных параметров функционирования регулируемых перекрестков. Актуальность этой темы подтверждается наличием множества исследований [1–9], рассматривающих задачу оптимизации работы светофора с различных позиций и использующих для ее решения разнообразные подходы.

В работе [10] рассматривается применимость симплекс-методов для решения транспортной задачи. Основой для вычислений в данной работе послужило среднее число автомобилей, накопившихся на перекрестке за определенный период времени, а средние значения длины очереди и задержки являются показателями эффективности. В работе [11] предлагается использование генетического алгоритма для расчета оптимального режима работы светофора. Авторы работы [12] используют теорию массового обслуживания для описания работы перекрестков, для уточнения математической модели применяют компьютерную программу имитационного моделирования. Оптимальные параметры цикла работы светофора выбираются после многократного использования модели с различными значениями входных параметров. Авторы методики [13] при оптимизации работы светофора в качестве целевой функции используют максимум суммарной интенсивности движения автомобилей в районе управления. В статье [14] рассматривается задача создания интеллектуальной сети «умных светофоров». Основным интерес здесь представляет автономность работы системы. Способ адаптивного управления дорожной сетью рассматривается в работе [15]. Данный подход основан на быстрой реакции светофоров на прогноз поведения потока автомобилей на перекрестке.

Постановка задачи. Предполагается, что на рассматриваемом регулируемом перекрестке интенсивности потоков автомобильного транспорта в каждом направлении известны. Требуется определить оптимальную длительность разрешающего сигнала светофора в каждом из направлений.

В качестве целевой функции выбран минимум времени ожидания для всех машин, которые находятся на исследуемом перекрестке. Очевидно, для каждого перекрестка существует предел пропускной способности, поэтому вводится ограничение M на суммарное количество автомобилей, проезжающих через перекресток за один цикл работы светофора. Ограничения необходимо наложить также на максимальную и минимальную длительности каждой фазы цикла работы светофора. Нижняя граница должна обеспечить проезд через перекресток определенного минимального количества машин. Верхняя граница разрешающего сигнала может представлять собой время, которое необходимо потоку с максимальной интенсивностью для пересечения перекрестка.

Для формулировки задачи принимается, что q – средняя интенсивность потока автомобилей, c^{-1} ; τ – наибольшее возможное время ожидания автомобиля на перекрестке, или длительность запрещающего сигнала светофора, с; Δt – среднее время до подъезда очередной машины к перекрестку, с; m – количество машин, которые могут скопиться перед светофором на рассматриваемой полосе в ожидании разрешающего сигнала светофора:

$$q = 1/\Delta t, \quad (1)$$

$$m = \tau/\Delta t = q\tau. \quad (2)$$

Суммарное время ожидания для m машин одного направления (потока) определяется выражением

$$\begin{aligned} T &= \tau + (\tau - \Delta t) + (\tau - 2\Delta t) + \dots + (\tau - (m-1)\Delta t) = \\ &= m\tau - \Delta t [1 + 2 + \dots + (m-1)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая в полученном выражении значение суммы слагаемых арифметической прогрессии, предыдущую формулу (3) можно записать в виде

$$T = m\tau - \Delta t \frac{m}{2}(m-1) \quad (4)$$

или, в соответствии с (1) и (2),

$$T = q\tau^2 - \frac{\tau}{2}(q\tau - 1) = \frac{\tau}{2}(q\tau + 1). \quad (5)$$

Суммарное время ожидания на перекрестке за период $\tau_{12} + \tau_{34}$ для потоков всех направлений с учетом того, что один и тот же сигнал является разрешающим для одного направления и запрещающим для другого,

$$T_{\Sigma}(\tau_{12}, \tau_{34}) = \frac{\tau_{12}}{2} [(q_3 + q_4)\tau_{12} + 1] + \frac{\tau_{34}}{2} [(q_1 + q_2)\tau_{34} + 1], \quad (6)$$

где q_1, q_2, q_3, q_4 – интенсивности 1, 2, 3 и 4-го потока на перекрестке; τ_{12}, τ_{34} – длительности разрешающих сигналов светофора для соответствующих направлений 1-2 и 3-4 (рисунок), являющиеся параметрами оптимизации в рассматриваемой задаче.

Выражение (6) выбрано в качестве целевой функции в рассматриваемой задаче и подлежит минимизации,

$$T_{\Sigma}(\tau_{12}, \tau_{34}) \rightarrow \min. \quad (7)$$

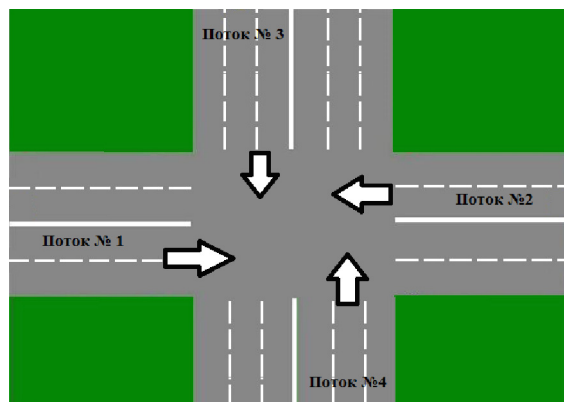


Рис. Схема регулируемого перекрестка

В качестве первого ограничения используется суммарное количество машин, проезжающих перекресток за полный цикл работы светофора,

$$(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)(\tau_{12} + \tau_{34}) \leq M, \quad (8)$$

где M – максимальное число машин, которые пересекут перекресток в течение времени $\tau_{12} + \tau_{34}$ работы разрешающего сигнала светофора. Удобно неравенство (8) преобразовать к виду

$$\tau_{12} + \tau_{34} \leq \frac{M}{q_1 + q_2 + q_3 + q_4} = \tau_{\max}. \quad (9)$$

Дополнительно устанавливается ограничение

$$\tau_{12} + \tau_{34} \geq \tau_{\min} \quad (10)$$

на минимальную суммарную продолжительность разрешающих сигналов в обоих направлениях величиной τ_{\min} .

Задача нелинейного программирования для оптимизации цикла работы светофора формулируется следующим образом: определить длительность каждой фазы цикла, обеспечивающую минимум целевой функции (6), при ограничениях (9) и (10).

Методика решения задачи. Целевая функция (6) является квадратичной относительно параметров оптимизации. Необходимые условия экстремума целевой функции $\partial T_{\Sigma} / \partial \tau_{12} = 0$ и $\partial T_{\Sigma} / \partial \tau_{34} = 0$ приводят к решению

$$\tau_{12} = -\frac{1}{2(q_3 + q_4)}, \quad \tau_{34} = -\frac{1}{2(q_1 + q_2)}, \quad (11)$$

т.е. минимум целевой функции лежит в области отрицательных значений переменных τ_{12} и τ_{34} , что нарушает ограничение (10) и противоречит содержанию задачи. Следовательно, для отыскания оптимальных длительностей работы разрешающих сигналов требуется исследовать границы области допустимых значений переменных.

Для решения задачи на условный экстремум используется метод множителей Лагранжа [16]. Целевая функция записывается в форме функции Лагранжа:

$$L = T_{\Sigma}(\tau_{12}, \tau_{34}) + \lambda_1(\tau_{12} + \tau_{34} - \tau_{\max} + u_1^2) + \lambda_2(\tau_{12} + \tau_{34} - \tau_{\min} + u_2^2), \quad (12)$$

где λ_1 и λ_2 – множители Лагранжа; u_1^2 , u_2^2 – вспомогательные переменные. Требование выполнения необходимых условий экстремума функции Лагранжа приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \tau_{12}(q_3 + q_4) + 0,5 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \tau_{34}(q_1 + q_2) + 0,5 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \tau_{12} + \tau_{34} - \tau_{\max} + u_1^2 = 0, \\ \tau_{12} + \tau_{34} - \tau_{\max} - u_2^2 = 0, \\ u_1\lambda_1 = 0, \quad u_2\lambda_2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Решение этой системы уравнений позволило определить значения параметров оптимизации – длительности разрешающих сигналов светофора τ_{12} и τ_{34} для каждого направления:

$$\tau_{12} = \tau_{\min}(q_1 + q_2)/(q_1 + q_2 + q_3 + q_4), \quad (14)$$

$$\tau_{34} = \tau_{\min} - \tau_{12}, \quad (15)$$

доставляющие минимум целевой функции Лагранжа (6).

Полученное решение не является целочисленным в силу произвольности транспортных потоков, тогда как длительность сигнала светофора целесообразно определять целым числом секунд. Для определения целочисленных значений τ_{12} и τ_{34} , с учетом небольшой размерности задачи и достаточно узкого интервала изменения параметров оптимизации, выполняется проверка всех целочисленных значений, принадлежащих границам области или ближайших к ним, с последующим отбором точек с учетом значения критерия оптимизации.

Результаты численного эксперимента. Для реализации вычислительного эксперимента использована компьютерная имитационная мо-

дель, разработанная авторами [17, 18]. В качестве исходных данных выбраны следующие интенсивности потоков: $q_1 = 689/3600$, $q_2 = 830/3600$, $q_3 = 1215/3600$, $q_4 = 1155/3600$, c^{-1} . Верхняя граница длительности цикла (9) определена величиной $\tau_{\max} = 90$ с; нижняя граница (10) определена значением $\tau_{\min} = 15$ с.

В ходе вычислительного эксперимента выполнен поиск ближайших к границе целочисленных значений, удовлетворяющих условиям задачи, при этом получены следующие результаты:

- для направлений 1 и 2 длительность τ_{12} разрешающего сигнала составила 15 с;
- для направлений 3 и 4 время работы τ_{34} разрешающего сигнала светофора равно 36 с;
- значение целевой функции T_{Σ} составило 398,5 с.

Решение, полученное методом множителей Лагранжа при тех же исходных данных, имеет следующие значения параметров, которые не являются целочисленными:

$$\tau_{12} = 19,53 \text{ с}, \tau_{34} = 30,47 \text{ с}, T_{\Sigma} = 385,44 \text{ с}.$$

Сравнение результатов численного эксперимента с точным решением позволяет сделать следующие выводы: численные результаты близки к точному решению, а предложенный алгоритм решения задачи целочисленного программирования для поставленной задачи является достаточно точным, экономичным и удобным в использовании.

Библиографический список

1. Пристипа А.В. Имитационная модель перекрестка с двухфазным светофорным регулированием // Вестник Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 3(24). – С. 138–142.
2. Кретов А.Ю. Обзор некоторых адаптивных алгоритмов светофорного регулирования перекрестков // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2013. – № 7(2). – С. 61–67.
3. Параскевов А.В. Совершенствование управления дорожным движением (обзор) // Научный журнал КубГАУ. Scientific Journal of KubSAU. – 2008. – № 37. – С. 93–103.
4. Тарасов О.В., Корнилов С.Н. Оптимизация режимов работы объектов светофорного регулирования методами нечеткой логики // СПТКР. – 2012. – № 2. – С. 139–143.
5. Кремец Ю.А., Печерский М.П., Афанасьев М.Б. Технические средства организации дорожного движения: учеб. для вузов. – М.: Академкнига, 2005. – 279 с.
6. Михеева Т.И. Моделирование движения в интеллектуальной транспортной системе // Вестник СГАУ. – 2004. – № 2. – С. 118–126.
7. Гелдиев Х.А., Худайбердиев Б.Р. Об оптимизации управления сигнализацией светофоров // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2012. – № 2. – С. 13–20.
8. Бояршинова И.Н., Исмагилов Т.Р., Потапова И.А. Моделирование и оптимизация работы системы массового обслуживания // Фундаментальные исследования. Технические науки. – 2015. – № 9, ч. 1. – С. 9–13.

9. Бояршинов М.Г. Распределение концентрации выхлопных газов вблизи автотрассы со случайным потоком транспорта // Инженерно-физический журнал. – 2006. – Т. 79, № 6. – С. 128–140.
10. Рейцен Е.А., Богданов А.Г. Оптимизация цикла работы светофора с использованием методов линейного программирования // Містобудування та терит. планування. – 2003. – № 14. – С. 143–151.
11. Расчет режимов работы светофорного объекта в условиях насыщенного движения / А.А. Власов, Н.А. Орлов, Д.В. Портов, П.Б. Скрипкин // Научное обозрение. Технические науки. – 2015. – № 1. – С. 112–113.
12. Ахмадинуров М.М., Тимофеева Г.А. Модели массового обслуживания в задаче оптимизации работы светофора // Вестник СГТУ. – 2011. – № 1. – С. 217–227.
13. Власов А.А., Орлов Н.А., Чушкина К.А. Методика расчета режимов работы светофорных объектов в условиях насыщенного движения // Науковедение: интернет-журнал. – 2014. – № 2 (21). – С. 99.
14. Тимофеева О.П., Малышева Е.М., Соколова Ю.В. Проектирование интеллектуальной системы управления светофорами на основе нейронной сети // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6. – URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=16496> (дата обращения: 30.06.2016).
15. Голубков А.С., Царев В.А. Адаптивное управление дорожным движением на базе системы микроскопического моделирования транспортных потоков // Информационно-управляющие системы. – 2010. – № 5. – С. 15–19.
16. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.
17. Исмагилов Т.Р., Бояршинова И.Н., Потапова И.А. Разработка компьютерной имитационной модели автомобильного движения через серию перекрестков // Фундаментальные исследования. Технические науки. – 2016. – № 10, ч. 2. – С. 291–295.
18. Потапова И.А., Бояршинова И.Н., Исмагилов Т.Р. Методы моделирования транспортного потока // Фундаментальные исследования. Технические науки. – 2016. – № 10, ч. 2. – С. 338–342.

References

1. Pristupa A.V. Imitacionnaya model' perekrestka s dvuhfaznym svetofornym regulirovaniem [The simulation model of the intersection with the two-phase signalized]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*, 2014, no. 3(44), pp. 133-137.
2. Kretov A.Yu. Obzor nekotorykh adaptivnykh algoritmov svetofornogo regulirovaniya perekrestkov [A review of some adaptive algorithms intersections traffic signalization]. *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki*, 2013, no. 7(2), pp. 61-67.
3. Paraskevov A.V. Sovershenstvovanie upravleniya dorozhnym dvizheniem (obzor) [Improving traffic management (review)]. *Scientific Journal of KubSAU*, 2008, no. 37, pp. 93-103.
4. Tarasov O.V., Kornilov S.N. Optimizatsiya rezhimov raboty ob"ektov svetofornogo regulirovaniya metodami nechetkoj logiki [Optimization of operating modes traffic light object regulate methods of fuzzy logic]. *SPTKR*, 2012, no. 2, pp. 139-143.
5. Kremec U.A., Pecherskij M.P., Afanas'ev M.B. Tekhnicheskie sredstva organizatsii dorozhnogo dvizheniya [Technical means of traffic management]. Moscow, Akademkniga, 2005, 279 p.
6. Miheeva T.I. Modelirovanie dvizheniya v intellektual'noj transportnoj sisteme [Simulation of the motion in the Intelligent Transportation System]. *Vestnik SGAU*, 2004, no. 2, pp. 118-126.
7. Geldiev H.A., Hudajberdiev B.R. Ob optimizatsii upravleniya signalizatsiej svetoforov [On the optimization of signaling traffic management]. *Aktual'nye problem gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 2012, no. 2, pp. 13-20.
8. Boyarshinova I.N., Ismagilov T.R., Potapova I.A., Modelirovanie i optimizatsiya raboty sistemy massovogo obsluzhivaniya [The modeling and optimization of the queuing system]. *Fundamental'nye issledovaniya. Tekhnicheskie nauki*, 2015, no. 9 (1), pp. 9-13.
9. Boyarshinov M.G. Concentration distribution of the exhaust gas near a roadway with a stochastic traffic flow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2006, vol. 79, no. 6, pp. 1179-1192.
10. Rejcen E.A. Optimizatsiya cikla raboty svetofora s ispol'zovaniem metodov linejnogo programmirovaniya [Optimizing cycle of traffic lights using linear programming methods]. *Mistobuduvannya ta terit. planuv.ya*, 2003, no. 14, pp. 143-151.

11. Vlasov A.A., Orlov N.A., Portov D.V., Skripkin P.B. Raschet rezhimov raboty svetofornogo ob"ekta v usloviyah nasyshchennogo dvizheniya [The calculation of operating modes traffic light object in a saturated movement]. *Nauchnoe obozrenie. Tekhnicheskie nauki*, 2015, no. 1, pp. 112-113.

12. Ahmadinurov M.M., Timofeeva G.A. Modeli massovogo obsluzhivaniya v zadache optimizacii raboty svetofora [Queuing Models to optimize the traffic problem]. *Vestnik SGTU*, 2011, no. 1, pp. 217-227.

13. Vlasov A.A., Orlov N.A., CHushkina K.A. Metodika rascheta rezhimov raboty svetofornyh ob"ektov v usloviyah nasyshchennogo dvizheniya [The methodology of calculation of modes of traffic lights in a busy movement]. *Internet-zhurnal Naukovedenie*, 2014, no. 2(21), pp. 99.

14. Timofeeva O.P., Malysheva E.M., Sokolova Yu.V. Proektirovanie intellektual'noj sistemy upravleniya svetoforami na osnove nejronnoj seti [Designing intelligent traffic light control system based on neural network]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 2014, no. 6, available at: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=16496> (accessed 30 June 2016).

15. Golubkov A.S., Carev V.A. Adaptivnoe upravlenie dorozhnym dvizheniem na baze sistemy mikroskopicheskogo modelirovaniya transportnyh potokov [Adaptive traffic control system based on microscopic simulation of traffic flows]. *Informacionno-upravlyayushchie sistemy*, 2010, no. 5, pp. 15-19.

16. Alekseev V.M., Galeev E.M., Tihomirov V.M. Sbornik zadach po optimizacii [Collection of tasks of optimization]. Moscow, Fizmatlit, 2005, 256 p.

17. Ismagilov T.R., Boyarshinova I.N., Potapova I.A. Razrabotka komp'yuternoj imitacionnoj modeli avtomobil'nogo dvizheniya cherez seriyu perekryostkov [Developing a computer imitacional model of vehicular traffic through a series of intersections]. *Fundamental'nye issledovaniya – Tekhnicheskie nauki*, 2016, no. 10 (chast' 2), pp. 291-295.

18. Potapova I.A., Boyarshinova I.N., Ismagilov T.R. Metody modelirovaniya transportnogo potoka [Methods of modeling of traffic flows]. *Fundamental'nye issledovaniya – Tekhnicheskie nauki*, 2016, no. 10 (chast' 2), pp. 338-342.

Получено 19.07.2017

**M. Boyarshinov, I. Boyarshinova,
I. Potapova, T. Ismagilov**

OPTIMIZATION OF A TRAFFIC LIGHT WORKING CYCLE AT A CONTROLLED INTERSECTION

Modeling and optimal planning of the road network is one of the urgent tasks that attract the attention of a large number of researchers both in our country and abroad, since the mid-twentieth century to the present day.

Improvement of methods of calculation of means of traffic management, determining the optimal parameters of functioning of a traffic light controlled intersections can improve the performance of the transport network, to increase the throughput of intersections. This paper presents are search on enhancing of functioning of a controlled intersection and solving an optimization problem of a traffic light working cycle. The minimization function was chosen as the total waiting time of all vehicles from all directions of the observed intersection. The control parameters were selected to be durations of green signals of the traffic light at the observed intersection. The constraint was set as the total number of vehicles passing through the intersection within one full cycle of the traffic light. Constraints were also set for minimum and maximum duration of each green signal phase. Preliminary research of the target function for an unconditional extremum has shown that it lies beyond the permissible values range. Consequently, the solution must lie on the range boundary.

One of the proposed approaches utilized Lagrange Multipliers method which allowed to obtain an exact solution. Since the problem can be classified as an integer programming problem with constraints, the second proposed method was direct search for all points in the permissible area having integer values of variables near the boundary, then searching for the point with the minimum value of the target function. Target of the numerical experiment was a controlled intersection with three lanes in every direction. Source data for the numerical solution were obtained with help of a computer imitational model. Proposed solving algorithm for a numerical programming problem is sufficiently precise – which was confirmed by checking the result against the one obtained with a Lagrange multiplier method, – economical and easy to use.

Keywords: controlled intersection, traffic light working cycle, optimization, target function, constraints.

Бояршинов Михаил Геннадьевич (Пермь, Россия) – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Автомобили и технологические машины», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: 9128841776@mail.ru).

Бояршинова Ирина Николаевна (Пермь, Россия) – канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и механика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: irina.boyarshinova@gmail.com).

Потапова Ирина Александровна (Пермь, Россия) – бакалавр информационных систем и технологий, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: ira_8_pot@mail.ru).

Исмагилов Тимур Ринатович (Пермь, Россия) – бакалавр информационных систем и технологий, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: 7118tim7118@mail.ru).

Boyarshinov Michail (Perm, Russian Federation) – Doctor in Technical Sciences, professor, Chair of Department «Avtomobili i tehnologicheskie mashiny», Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky av., 29, e-mail: 9128841776@mail.ru).

Boyarshinova Irina (Perm, Russian Federation) – Ph.D. of Technical Sciences «Vychislitel'noj matematiki i mekhaniki», Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky av., 29, e-mail: irina.boyarshinova@gmail.com).

Potapova Irina (Perm, Russian Federation) – Student, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky av., 29, e-mail: ira_8_pot@mail.ru).

Ismagilov Timur (Perm, Russian Federation) – Student, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky av., 29, e-mail: 7118tim7118@mail.ru).