УДК 517.922, 517.988.6

И.Д. Серова

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЯ НЕЯВНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Получены условия разрешимости и оценки решений неявного функционально-дифференциального уравнения. Используются результаты о накрывающих отображениях частично упорядоченных пространств.

Ключевые слова: упорядоченно накрывающее отображение, функционально-дифференциальное уравнение, задача Коши, неравенство типа Чаплыгина.

Введение

В теории дифференциальных уравнений важное значение имеют оценки решений. Для получения таких оценок часто применяют известную теорему Чаплыгина [1] о дифференциальном неравенстве. Эта теорема утверждает, что если функция v удовлетворяет неравенствам

$$\dot{v}(t) > f(t, v(t)) \ \ \forall t \geqslant t_0, \quad v(t_0) \geqslant x_0,$$

то для решения x задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x) \ \ \forall t \geqslant t_0, \quad x(t_0) = x_0,$$

справедлива оценка $x(t) < v(t)$ при $t > t_0$.

В данной работе предлагается оценка решений неявного функционально-дифференциального уравнения, аналогичная теореме Чаплыгина. Наше исследование основано на результатах об антитонном возмущении упорядоченно накрывающего отображения и условиях упорядоченного накрывания оператора Немыцкого. Отметим, что аналогичными методами в работе [2] получены оценки решений неявного дифференциального уравнения.

1. Накрывающие отображения упорядоченных пространств

Пусть заданы упорядоченные пространства $(X, \preceq)$, $(Y, \preceq)$. Для элемента $u \in X$ обозначим

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-680975р_а).

$$\mathcal{O}_X(u) \doteq \{x \in X : \ x \preceq u\}.$$

Отображение $G : X \to Y$ называют *изотонным на* множестве $V \subset X$, если для любых $x, u \in V$ из $x \preceq u$ следует $G(x) \preceq G(u)$, и *антитонным на* $V \subset X$, если для любых $x, u \in V$ из $x \preceq u$ следует $G(x) \succeq G(u)$.

Определение 1 [3]. Отображение $G : X \to Y$ называется *упорядоченно накрывающим множество* $V \subset Y$, если если для любого $u \in X$ выполнено включение

$$\mathcal{O}_Y\big(G(u)\big) \cap V \subset G\big(\mathcal{O}_X(u)\big).$$

Отметим, что отображение G упорядоченно накрывает множество V тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\forall\, u \in X \ \ \forall\, y \in V \ \ \ y \preceq G(u) \ \ \Rightarrow \ \ \exists x \in X \ \ \ G(x) = y \ \ \& \ \ x \preceq u. \tag{1}$$

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = y, \tag{2}$$

где $y \in Y$, а отображение $F : X \to Y$ представимо в виде

$$F(x) = \Upsilon(x, x), \quad \forall x \in X.$$

Здесь отображение $\Upsilon : X^2 \to Y$ по одному аргументу обладает свойством упорядоченного накрывания, а по другому — монотонности.

Следуя работам [2, 3], по отображению $\Upsilon : X^2 \to Y$, множеству $U \subset X$ и элементу $y \in Y$ определим множество $\mathcal{S}(\Upsilon, U, y)$ всех цепей $S \subset U$, таких что имеют место соотношения

$$\forall\, x \in S \ \ \Upsilon(x, x) \succeq y,$$
$$\forall\, x_1, x_2 \in S \ \ x_1 \prec x_2 \ \ \Rightarrow \ \ \Upsilon(x_1, x_2) \preceq y.$$

Утверждение о существовании и оценках решений уравнения (2) получено Е.С. Жуковским в статье [2]. Приведем несколько менее общее утверждение из работы [4].

Теорема 1. *Пусть существует такой элемент* $u_0 \in X$, *что*

$$\Upsilon(u_0, u_0) \succeq y, \tag{3}$$

и выполнены условия:

(a) *при любом $x \in \mathcal{O}_X(u_0)$ отображение $\Upsilon(\cdot, x) : X \to Y$ упорядоченно накрывает множество $V \doteq \{y\}$;*

(b) *при любом $x \in \mathcal{O}_X(u_0)$ отображение $\Upsilon(x, \cdot) : X \to Y$ является антитонным на $\mathcal{O}_X(u_0)$;*

(c) *любая цепь $S \in \mathcal{S}\big(\Upsilon, \mathcal{O}_X(u_0), y\big)$ ограничена снизу, и существует ее нижняя граница $\omega \in X$, удовлетворяющая неравенству $\Upsilon(\omega, \omega) \succeq y$.*

Тогда множество решений уравнения (2) не пусто, в нем существует минимальный элемент, который принадлежит $\mathcal{O}_X(u_0)$.

Через $W \doteq W([a, b], \mathbb{R}^m)$ обозначим пространство всех измеримых функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^m$; через $L_\infty \doteq L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство существенно ограниченных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \text{vrai}\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|_{\mathbb{R}^n}$. Для множества $B \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $L_\infty(B) \doteq L_\infty([a, b], B)$ подмножество пространства L_∞, содержащее функции со значениями $x(t) \in B,\ t \in [a, b]$. В перечисленных множествах измеримых функций считаем, что задан «обычный» порядок, т. е. для функций x, u полагаем $x \leqslant u$, если $x(t) \leqslant u(t)$ при п. в. $t \in [a, b]$.

Пусть заданы число $r \geqslant 0$, удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и измеримая функция $y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. Обозначим через g_r сужение функции g на множество $[a, b] \times B_r$, где множество $B_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$ — шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в 0 и радиуса r. Определим соответствующий оператор Немыцкого

$$N_{g_r} : L_\infty(B_r) \to W, \quad (N_{g_r}x)(t) = g_r\big(t, x(t)\big),\ t \in [a, b].$$

Теорема 2. *Если при п. в. $t \in [a, b]$ функция $g_r\big(t, \cdot) : B_r \to \mathbb{R}^m$ упорядоченно накрывает одноточечное множество $\{y(t)\} \subset \mathbb{R}^m$, то соответствующий оператор Немыцкого $N_{g_r} : L_\infty(B_r) \to W$ упорядоченно накрывает множество $\{y(\cdot)\} \subset W$.*

Доказательство. Пусть для некоторой функции $u \in L_\infty(B_r)$ выполнено $N_{g_r}u \geqslant y$. Это неравенство означает, что $g_r\big(t, u(t)\big) \geqslant y(t)$ для п. в. $t \in [a, b]$. Так как $g_r\big(t, \cdot)$ упорядоченно накрывает одноточечное множество $\{y(t)\}$, то $y(t) \in g_r\big(t, U(t))$ для п. в. $t \in [a, b]$, где $U(t) = \mathcal{O}(u(t)) \bigcap B_r$.

По теореме Филиппова (см., напр., [5, п. 1.5.2]), существует измеримая функция $\bar{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, такая что $\bar{x}(t) \in U(t)$, $g_r\big(t, \bar{x}(t)\big) = y(t)$ при п. в. $t \in [a,b]$, т. е. имеют место соотношения $N_{g_r}\bar{x} = y$ и $\bar{x} \in L_\infty(B)$. Таким образом, оператор N_{g_r} упорядоченно накрывает множество $\{y(\cdot)\}$. $\square$

2. Неявные функционально-дифференциальные уравнения

Здесь на основании теорем 1 и 2 предлагается утверждение о существовании и оценках решений задачи Коши для неявного функционально-дифференциального уравнения.

Обозначим через $AC_\infty \doteq AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что $\dot{x} \in L_\infty$; через $AC_\infty\big(B_r\big) \doteq AC_\infty\big([a,b], B_r\big)$ — подмножество AC_∞, содержащее функции $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, производная которых $\dot{x} \in L_\infty(B_r)$, т. е. $|\dot{x}(t)| \leqslant r$ при п. в. $t \in [a,b]$.

Пусть заданы функции $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $K : \Delta \to \mathbb{R}^k \times$ $\times \mathbb{R}^n$, где $\Delta = \{(t,s) : a \leqslant s \leqslant t \leqslant b\}$, и вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения вида

$$f\left(t, x(a), \int_a^t K(t,s)\dot{x}(s)ds, \dot{x}(t)\right) = 0,\ t \in [a,b] \tag{4}$$

с начальным условием

$$x(a) = \gamma. \tag{5}$$

К уравнению (4) сводятся многие функционально-дифференциальные уравнения, в том числе обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнения с сосредоточенным и распределенным запаздыванием [6].

Уравнение (4) можно рассматривать не только на всем $[a,b]$, но и на любом отрезке $[a, a+\tau] \subset [a,b]$; таким образом, решением (4) будем считать функцию $x_\tau \in AC_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую этому уравнению при п. в. $t \in [a, a+\tau]$. Сформулируем утверждение о существовании и оценке таких решений, аналогичное теореме Чаплыгина.

Теорема 3. *Пусть для некоторой функции $v_0 \in AC_\infty$, удовлетворяющей начальному условию $v_0(a) = \gamma$, справедливо неравенство*

$$f\left(t, v_0(a), \int_a^t K(t,s)\dot{v}_0(s)ds, \dot{v}_0(t)\right) \geqslant 0 \quad \textit{при п. в.} \quad t \in [a,b]. \tag{6}$$

Пусть выполнены условия:

(d) *функция* $f(\cdot, \gamma, v, u) : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ *измерима при любых* $v \in \mathbb{R}^k$, $u \in \mathbb{R}^n$;

(e) *при п. в.* $t \in [a, b]$ *и любых* $v \in \mathbb{R}^k$ *функция* $f(t, \gamma, v, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *непрерывна и ее сужение* $f_{r_0}(t, \gamma, v, \cdot) : B_{r_0} \to \mathbb{R}^m$ *на шар* $B_{r_0} \subset \mathbb{R}^n$ *с центром в* 0, *некоторого радиуса* $r_0 \geqslant \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|\dot{v}_0(t)|_{\mathbb{R}^n}$ *упорядоченно накрывает одноточечное множество* $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$.

(f) *существует такое* $\delta > 0$, *что при п. в.* $t \in [a, b]$ *и любых* $u \in \mathbb{R}^n$ *функция* $f(t, \gamma, \cdot, u) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *по каждому аргументу* $v_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, *не возрастает на отрезке* $[-\delta, \delta]$ *и непрерывна справа;*

(g) *матрица-функция* $K : \Delta \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ *измерима, имеет неотрицательные компоненты, и существует такая неотрицательная суммируемая на* $[a, b]$ *функция* $\mathcal{K} : [a, b] \to \mathbb{R}$, *что при п. в.* $(t, s) \in \Delta$ *имеет место неравенство* $|K(t, s)|_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n} \leqslant \mathcal{K}(s)$.

Тогда существует $\tau_0 \in (0, b - a]$ *и решение* $x_{\tau_0} \in AC_\infty([a, a + \tau_0], B_{r_0})$ *задачи* (4), (5), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\dot{x}_{\tau_0}(t) \leqslant \dot{v}_0(t), \quad |\dot{x}_{\tau_0}(t)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant r_0 \text{ при п. в. } t \in [a, a + \tau_0]. \tag{7}$$

Доказательство. Запишем задачу (4), (5) в виде операторного уравнения (2) относительно производной решения рассматриваемой задачи (4), (5). Такое представление позволит воспользоваться теоремой 1 для доказательства данного утверждения.

Определим функции

$$\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Pi(x) \doteq \begin{cases} x, & \text{если } x \in [-\delta, \delta], \\ \delta, & \text{если } x > \delta, \\ -\delta, & \text{если } x < -\delta; \end{cases}$$
$$\Pi^k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \quad \Pi^k(x_1, \ldots, x_k) \doteq \big(\Pi(x_1), \ldots, \Pi(x_k)\big);$$
$$\varphi_{r_0} : [a, b] \times \mathbb{R}^k \times B_{r_0} \to \mathbb{R}^m, \quad \varphi_{r_0}(t, v, u) \doteq f_{r_0}\big(t, \gamma, \Pi^k(v), u\big).$$

Функция φ_{r_0} по первому аргументу $t \in [a, b]$ измерима, по третьему аргументу $u \in B_{r_0}$ непрерывна и накрывает $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$, по каждой компоненте $v_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, второго аргумента $v \in \mathbb{R}^k$ не возрастает на всем $\mathbb{R}$ и непрерывна справа. Определим соответствующий функции φ_{r_0} оператор Немыцкого:

$$N_{\varphi_{r_0}} : L_\infty(B_{r_0}) \times L_\infty \to W, \ \big(N_{\varphi_{r_0}}(u, v)\big)(t) \doteq \varphi_{r_0}\big(t, v(t), u(t)\big), \ t \in [a, b].$$

Из предположения (e) согласно теореме 2 получаем, что при любом $x \in L_\infty$ отображение $N_{\varphi_{r_0}}(\cdot, x)$ упорядоченно накрывает $\{0\} \subset W$. В силу предположения (f) отображение $N_{\varphi_{r_0}}(u, \cdot)$ является антитонным.

Из условия (g) следует, что для любой функции $v \in L_\infty(B_{r_0})$ функция $\int_a^{(\cdot)} K(\cdot, s)\, v(s)\, ds$ измерима и ограничена непрерывной функцией, а именно, выполнено неравенство $\left|\int_a^t K(t,s)\, v(s)\, ds\right|_{\mathbb{R}^k} \leqslant r_0 \int_a^t \mathcal{K}(s)\, ds$. Отсюда в силу непрерывности интеграла $\int_a^{(\cdot)} \mathcal{K}(s)\, ds$ следует соотношение

$$\exists \tau_0 > 0\, \forall v \in L_\infty(B_{r_0}) \ \left|\int_a^t K(t,s)\, v(s)\, ds\right|_{\mathbb{R}^k} \leqslant \delta \quad \text{при п. в. } t \in [a, a+\tau_0]. \tag{8}$$

Условие (g) обеспечивает изотонность интегрального оператора Вольтерры

$$H : L_\infty(B_{r_0}) \to L_\infty, \quad (Hv)(t) \doteq \int_a^t K(t,s)\, v(s)\, ds, \ t \in [a,b].$$

Рассмотрим уравнение

$$N_{\varphi_{r_0}}(u, Hu) = 0. \tag{9}$$

Для доказательства разрешимости уравнения (9) определим отображение

$$\Upsilon : L_\infty(B_{r_0}) \times L_\infty(B_{r_0}) \to W, \quad \Upsilon(u_1, u_2) \doteq N_{\varphi_{r_0}}(u_1, Hu_2)$$

и покажем, что это отображение удовлетворяет условиям теоремы 1.

Из предположения (6) следует неравенство $\Upsilon(\dot{v}_0, \dot{v}_0) \geqslant 0$, т. е. выполнено условие (3), где $u_0 = \dot{v}_0 \in L_\infty(B_{r_0})$. Из установленных выше свойств операторов $N_{\varphi_{r_0}}$, H прямо следует, что для отображения Υ выполнены условия (a) и (b) теоремы 1.

Зададим цепь $S \subset L_\infty(B_{r_0})$, такую, что для любого $u \in S$ выполнено $\Upsilon(u,u) = N_{\varphi_{r_0}}(u, Hu) \geqslant 0$. Любая ограниченная в L_∞ цепь обладает точной нижней границей, поэтому существует $\omega \doteq \inf S$. Выделим убывающую последовательность $\{u_i\} \subset S$ такую, что $\inf\{u_i\} = \inf S = \omega$ [7, гл. IV, §11, следствие 7]. Следовательно, при п. в. $t \in [a,b]$ справедливо $\omega(t) = \inf\{u_i(t)\} = \lim_{i\to\infty} u_i(t)$. В силу невозрастания функции $\varphi_{r_0}(t, \cdot, u)$ и неотрицательности компонент функции K получаем

$$N_{\varphi_{r_0}}(u_i, H\omega) \geqslant N_{\varphi_{r_0}}(u_i, Hu_i) \geqslant 0.$$

Поскольку функция $\varphi_{r_0}(t, v, \cdot)$ непрерывна, при п. в. $t \in [a,b]$ выполнено соотношение

$$\big(N_{\varphi_{r_0}}(\omega, H\omega)\big)(t) = \varphi_{r_0}\big(t, (H\omega)(t), \omega(t)\big) = \lim_{i\to\infty} \varphi_{r_0}\big(t, (H\omega)(t), u_i(t)\big) \geqslant 0.$$

Итак, условие (c) теоремы 1 также выполнено.

Из теоремы 1 следует, что существует решение $z \in L_\infty([a,b], B_{r_0})$ уравнения (9), удовлетворяющее неравенству $z(t) \leqslant \dot v_0(t)$ для п. в. $t \in [a,b]$. Согласно (8) при $t \in [a, a+\tau_0]$ выполнено

$$(Hz)(t) = \left|\int_a^t K(t,s)\, z(s)\, ds\right|_{\mathbb{R}^k} \leqslant \delta$$

и, следовательно, $\Pi^k\big((Hz)(t)\big) = (Hz)(t)$. Поэтому при п. в. $t \in [a, a+\tau_0]$

$$f\left(t, \gamma, \int_a^t K(t,s)z(s)ds, z(t)\right) =$$
$$= \varphi_{r_0}\left(t, \Pi^k\left(\int_a^t K(t,s)z(s)ds\right), z(t)\right) = 0.$$

Полученное соотношение означает, что функция $x_{\tau_0}(t) \doteq \gamma + \int_a^t z(s)ds$, определенная на $[a, a+\tau_0]$, является решением задачи (4), (5), и это решение удовлетворяет неравенствам (7). □

Следствие 1. *Пусть выполнены все условия теоремы 3, и, кроме того, функция $f(t,\gamma,\cdot,u) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ по каждому аргументу $v_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,k}$, не возрастает на всем $\mathbb{R}$. Тогда существует определенное на всем $[a,b]$ решение $x \in AC_\infty([a,b], B_{r_0})$ задачи (4), (5), удовлетворяющее неравенствам*

$$\dot x(t) \leqslant \dot v_0(t), \ \ |\dot x(t)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant r_0 \ \textit{при п. в.}\ t \in [a,b].$$

Приведем пример, иллюстрирующий применение теоремы 3 и ее следствия к исследованию конкретных уравнений.

Пример 1. Обозначим

$$\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \chi(v) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad v \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad v < 0. \end{cases}$$

Пусть заданы $\tau > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}, y \in L_\infty([0,T], \mathbb{R})$. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot x^2 + \chi\left(x\left(\frac{t}{2}\right)\right) = y(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = \gamma. \tag{10}$$

Докажем, что если для некоторой функции $v_0 \in AC_\infty([0,T], \mathbb{R})$ выполнены условия

$$\dot{v_0}^2 + \chi\left(v_0\Big(\frac{t}{2}\Big)\right) \leqslant y(t), \quad t \in [0,T], \quad v_0(0) = \gamma, \tag{11}$$

то существует такое решение $x \in AC_\infty([0,T],\mathbb{R})$ задачи (10), что

$$|\dot{x}(t)| \leqslant r_0 \doteq \mathrm{vrai\ sup}_{s\in[0,T]} \max\{y(s), \sqrt{y(s)}\}, \quad \dot{x}(t) \leqslant \dot{v}_0(t), \ \ t \in [0,T].$$

Отметим, что из (11) следует неотрицательность функции y.

Перепишем задачу (10) в виде

$$-\dot{x}^2 - \chi\left(\gamma + \int_0^{\frac{t}{2}} \dot{x}(s)\,ds\right) + y(t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{12}$$

Зададим функцию

$$f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t,u,v) = -u^2 - \chi(v) + y(t)$$

и проверим выполнение условий теоремы 3 и следствия 1.

Очевидно, функция $f(\cdot,u,v)$ измерима, так как $y(\cdot)$ — измеримая функция. Функция $f(t,\cdot,v)$ не возрастает и непрерывна справа.

Проверим, что сужение $f_{r_0}(t,x,\cdot)$ функции $f(t,x,\cdot)$ на отрезок $[-r_0,r_0]$ упорядоченно накрывает множество $\{0\}$. Если для некоторого $u_0 \in [-r_0,r_0]$ имеет место неравенство $-u_0^2 - \chi(v) + y(t) \geqslant 0$, то $y(t) - \chi(v) \geqslant 0$ и

$$-\sqrt{y(t) - \chi(v)} \leqslant u_0 \leqslant \sqrt{y(t) - \chi(v)}.$$

Для $u = -\sqrt{y(t) - \chi(v)}$ получаем

$$-u^2 - \chi(v) + y(t) = 0, \quad u \in [-r_0,r_0], \quad u \leqslant u_0.$$

Таким образом, соотношение (1) выполнено.

Условие (6) прямо следует из (11).

Последнее условие (g) теоремы 3 также, очевидно, выполнено, так как в данном случае функция

$$K(t,s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in [0, \frac{t}{2}], \\ 0, & \text{если } s \in [\frac{t}{2}, t], \end{cases}$$

при всех t, s удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant K(t,s) \leqslant \mathcal{K}(s)$, где $\mathcal{K}(s) \equiv 1$.

Список литературы

1. *Чаплыгин С.А.* Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. — М., 1919.

2. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 12. — С. 1605—1621.

3. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. — 2016. — Vol. 201. — P. 330—343.

4. *Серова И.Д.* О неявных дифференциальных неравенствах с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбов. ун-та. Естественные и технические науки. — 2017. — Т. 21, вып. 3.

5. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / *Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский.* — М.: ЛИБРОКОМ, 2011.

6. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.

7. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.

Серова Ирина Дмитриевна
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, Тамбов, Россия
E-mail: `irinka_36@mail.ru`