УДК 517.977.56

В.В. Провоторов, Е.Н. Провоторова

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМОЙ НАВЬЕ—СТОКСА В СЕТЕПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

Для линеаризованной системы Навье—Стокса рассмотрена математическая модель (начально-краевая задача), описывающая нестационарное течение вязкой многофазной среды в сетеподобной гидросети (сетеподобной области). Методом Фаэдо—Галеркина с помощью специального базиса (множества обобщенных собственных функций специальной спектральной задачи) и априорных оценок нормы решения типа энергетических неравенств показана однозначная разрешимость рассматриваемой начально-краевой задачи в слабой постановке. Приведен анализ распространенных в приложениях задач распределенного и стартового управлений с финальным наблюдением, получены необходимые и достаточные условия существования оптимальных управлений в терминах сопряженных состояний соответствующих систем. Решена задача синтеза оптимального управления для случая отсутствия ограничений на управляющие воздействия, и получены аналоги известных для конечномерного случая результатов Калмана.

Ключевые слова: линеаризованная система Навье—Стокса, сетеподобная область, слабые решения, оптимальное управление, синтез управления.

Введение

В прикладных задачах гидродинамики система двух уравнений

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y + \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} + \nabla p = f, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} Y = 0 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right) \tag{2}$$

относительно пары функций $\{Y(x,t), p(x,t)\}$ (система Навье—Стокса в эволюционном случае [1, с. 77]; $Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ — вектор-функция, p — скалярная функция, $x \in \mathbb{R}^n$) описывает динамику несжимаемой вязкой среды (ν — коэффициент вязкости) с вектором скорости Y гидравлического потока и конвективной составляющей, определяемой слагаемым $\sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i}$ в соотношении (1). Во многих случаях, прежде всего при ламинарных процессах, конвективная составляющая в описании процесса отсутствует, и уравнение (1) становится линейным, а система (1), (2) — линеаризованной системой Навье—Стокса.

В работах [2—5] систематически изучались различного типа задачи оптимального управления эволюционными уравнениями с распределенными параметрами на геометрическом графе (сети). Настоящая работа является естественным продолжением упомянутого исследования в направлении увеличения размерности как пространственной переменной x ($x \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$), так и функций, описывающих состояние исследуемой системы. При этом изучается более простой случай отсутствия конвективного эффекта (ламинарное течение несжимаемой вязкой среды). Затронут довольно широкий круг вопросов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами на сетеподобных областях: однозначная разрешимость соответствующей начально-краевой задачи, анализ часто встречающихся на практике задач оптимального управления (распределенного и стартового). Достаточное внимание уделено вопросам синтеза оптимального управляющего воздействия.

1. Необходимые обозначения, понятия и определения

Рассмотрим открытую ограниченную область $\Im$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, имеющую сетеподобную структуру [3, 4]: $\Im = (\bigcup_k \Im_k) \bigcup (\bigcup_l S_l)$, где через S_l обозначена поверхность, разделяющая смежные области $\Im_k$, $\partial\Im$ — граница $\Im$ (гладкость границы $\partial\Im$ сначала не играет роли). Место сопряжения смежных областей $\Im_k$ назовем узловым местом (везде ниже обозначено через ξ). Оно представляет собой объединение поверхностей $S_l(\xi)$, число которых равно числу сопрягаемых областей: $\xi = \bigcup_l S_l(\xi)$. На протяжении всего исследования используются измеримые функции и интеграл Лебега. Последний по области $\Im$ понимается как сумма интегралов по областям $\Im_k$: $\int_{\Im} f dx = \sum_k \int_{\Im_k} f dx$.

Для вектор-функции $Y(x,t) = \{y_1(x,t), y_2(x,t), \dots, y_n(x,t)\}$ ($x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$), определенной в области $\Im_T = \Im \times (0,T)$ ($T < \infty$), рассмотрим линеаризованную систему Навье — Стокса:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu\Delta Y + \nabla p = f, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} Y = 0, \tag{4}$$

при этом в каждом узловом месте ξ справедливы соотношения

$$Y|_{S_l^-(\xi)} = Y|_{S_l^+(\xi)}, \tag{5}$$

$$\sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^-}\bigg|_{S_l^-(\xi)} + \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^+}\bigg|_{S_l^+(\xi)} = 0, \tag{6}$$

называемые в литературе условиями сопряжения (см., например, [3—5]); $S_l^-(\xi)$ и $S_l^+(\xi)$ — односторонние поверхности для $S_l(\xi)$, определяемые направлением нормалей n_l^-, n_l^+ к поверхностям $S_l^-(\xi)$, $S_l^+(\xi)$. Присоединяя к (3)—(6) начальные условия

$$Y(x,0) = Y_0(x), \quad x \in \Im \tag{7}$$

в момент времени $t = 0$ и краевые условия

$$Y|_{\partial\Im} = 0 \tag{8}$$

на границе объема сплошной среды, получаем начально-краевую задачу (3)—(8) для отыскания функций $Y(x,t)$ и $p(x,t)$ ($p(x,t)$ — скалярная функция) в замкнутой области $\Im_T$ ($\overline{\Im}_T = (\Im \cup \partial\Im) \times [0,T]$).

В прикладных задачах гидродинамики сетеподобная область $\Im$ суть гидросистема, обусловленная давлением p ($\nabla p = \operatorname{grad} p$ — градиент давления), распределяющая потоки жидкости (моногофазной среды), функция $Y(x,t)$ описывает вектор скорости гидравлического потока в области $\Im_T$, соотношения (3), (4) — динамику несжимаемой жидкости с вязкостью $\nu > 0$ в области $\bigcup_k \Im_k \times (0,T)$, балансные равенства (5), (6) определяют условия перетекания жидкости в узловых местах гидросистемы $\Im$, $f(x,t)$ — плотность внешних сил; процесс переноса многофазной среды является изотермическим.

Определим слабое решение начально-краевой задачи (3)—(8). Для этого введем необходимые пространства и проведем предварительные рассуждения.

Обозначим через $L_2(\Im)^n$ пространство измеримых функций (классов) $\mu = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\}$, суммируемых с квадратом по области $\Im$. Скалярное произведение для $\mu, \rho \in L_2(\Im)^n$ определяется соотношением

$$(\mu, \rho) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Im} \mu_i(x)\rho_i(x)\,dx, \tag{9}$$

$\|\mu\| = (\mu,\mu)^{1/2}$. Пусть $D(\Im)^n$ — пространство функций, бесконечно дифференцируемых в области $\Im$ и имеющих в $\Im$ компактные носители. Положим $\mathfrak{D}(\Im)^n = \{\varphi : \varphi \in D(\Im)^n, \operatorname{div}\varphi = 0\}$, а $\mathfrak{D}'(\Im)^n$ — сопряженное к

$\mathfrak{D}(\Im)^n$ пространство (здесь и везде ниже символ «$'$» использован для обозначения сопряженного пространства). Определим пространство $\mathcal{H}(\Im)$ как замыкание $\mathfrak{D}(\Im)^n$ в норме $L_2(\Im)^n$ со скалярным произведением (9), $\|\mu\|_{\mathcal{H}(\Im)} = (\mu,\mu)^{1/2}$, $\mathcal{H}(\Im) = \mathcal{H}(\Im)'$.

Введем пространство $\mathcal{H}^1(\Im)$, элементами которого являются $\mu \in L_2(\Im)^n$, имеющие обобщенную производную $\frac{\partial\mu}{\partial x} \in L_2(\Im)^n$ ($\frac{\partial\mu}{\partial x_i} \in L_2(\Im)$, $i = \overline{1,n}$). Пространство $\mathcal{H}^1(\Im)$ снабжено нормой $\|\mu\|_{\mathcal{H}^1(\Im)} = (\|\mu\|^2_{L_2(\Im)} + \|\frac{\partial\mu}{\partial x}\|^2_{L_2(\Im)})^{1/2}$ и является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\mu,\rho)_{\mathcal{H}^1(\Im)} = (\mu,\rho) + (\frac{\partial\mu}{\partial x}, \frac{\partial\rho}{\partial x})$.

Далее определим пространство $V_0^1(\Im)$ как замыкание в норме $\mathcal{H}^1(\Im)$ множества элементов $\mu \in \mathfrak{D}(\Im)^n$, удовлетворяющих условиям сопряжения

$$\sum_l \frac{\partial\mu}{\partial n_l^-(\xi)}\bigg|_{S_l^-(\xi)} + \sum_l \frac{\partial\mu}{\partial n_l^+}\bigg|_{S_l^+(\xi)} = 0.$$

Здесь $V_0^1(\Im)$ — подпространство функций из $\mathcal{H}^1(\Im)$, «удовлетворяющих условиям сопряжения» во всех узловых местах ξ области $\Im$ и «равных нулю» на $\partial\Im$. Отметим, что пространство $V_0^1(\Im)$ можно определить эквивалентным образом как замыкание в норме $\mathcal{H}^1(\Im)$ множества элементов $\mu \in \mathfrak{D}_\circ(\Im)^n \subset \mathfrak{D}(\Im)^n$ (элементы множества $\mathfrak{D}_\circ(\Im)^n$, в отличие от элементов $\mathfrak{D}(\Im)^n$, удовлетворяют приведенным выше условиям сопряжения).

Рассмотрим билинейную форму

$$\rho(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx, \tag{10}$$

на функциях u, v, ω, таких, для которых сходятся интегралы в представлении данной формы.

Лемма. *Билинейная форма* (10) *непрерывна на* $V_0^1(\Im) \times V_0^1(\Im)$.

Доказательство. Применяя в правой части формы (10) неравенство Коши—Буняковского для функций $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, получим

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_{\Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int\limits_{\Im} (\frac{\partial u_j}{\partial x_i})^2\,dx}\sqrt{\int\limits_{\Im} (\frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2\,dx} \leqslant \\ \leqslant \|u_j\|_{V_0^1(\Im)}\|v_j\|_{V_0^1(\Im)}.\end{gathered} \tag{11}$$

Утверждения леммы следуют из неравенства (11). $\square$

Введем пространства функций $u(x,t)$ переменных $x, t \in \Im_T$ и будем рассматривать u как функцию от t со значениями в пространстве функций от x, а именно: если V — гильбертово пространство, то через $L_2(0,T;V)$ обозначим пространство функций (классов) $u : (0,T) \to V$, измеримых, принимающих значения из V и таких, что

$$\|u\|_{L_2(0,T;V)} = \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Очевидно равенство $L_2(\Im_T)^n = L_2(0,T;L_2(\Im)^n)$.

Далее введем пространства $W^{1,0}(\Im_T)$ и $W^1(\Im_T)$. Пусть $W^{1,0}(\Im_T)$ — пространство функций $u(x,t) \in L_2(\Im_T)^n$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по x, принадлежащую $L_2(\Im_T)^n$, норма в $W^{1,0}(\Im_T)$ определяется соотношением

$$\|u\|_{W^{1,0}(\Im_T)} = \left(\|u\|^2_{L_2(\Im_T)^n} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Im_T)^n}\right)^{1/2};$$

$W^1(\Im_T)$ — пространство функций из $L_2(\Im_T)^n$, имеющих обобщенные производные 1-го порядка также из $L_2(\Im_T)^n$,

$$\|u\|_{W^1(\Im_T)} = \left(\|u\|^2_{L_2(\Im_T)^n} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Im_T)^n} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Im_T)^n}\right)^{1/2}.$$

Исходя из свойства следов элементов $W^1(\Im_T)$ на каждом сечении $\Im_T$ плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0,T]$) как элементов $L_2(\Im)^n$, непрерывных по t в норме $L_2(\Im)^n$ [6, с. 70], определим $\Omega_0(\Im_T)$: $\Omega_0(\Im_T)$ — множество функций $u(x,t) \in W^1(\Im_T)$, которые при фиксированном $t \in [0,T]$ принадлежат классу $V_0^1(\Im)$. Замыкание множества $\Omega_0(\Im_T)$ в норме $W^1(\Im_T)$ обозначим через $W_0^1(\Im_T)$.

Пусть далее $\widehat{\Omega}_0(\Im_T)$ — множество всех функций $u(x,t) \in W^{1,0}(\Im_T)$, которые:

а) имеют конечную норму

$$\|u\|_{2,\Im_T} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Im)^n} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(\Im_T)^n}; \tag{12}$$

б) имеют след, который определен на сечениях области $\Im_T$ плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0,T]$) как функция класса $V_0^1(\Im)$, т. е. для каждого элемента $u \in \widehat{\Omega}_0(\Im_T)$ при фиксированном $t \in [0,T]$ существует последовательность $\{u_n\}$ функций $u_n(x,t) \in V_0^1(\Im)$, сходящаяся в норме $\mathcal{H}^1(\Im)$ к этому следу;

в) непрерывны по t в норме $\mathcal{H}^1(\Im)$ на $[0,T]$, т. е. для любого $t \in [0,T]$ $\|u(\cdot,t+\Delta t) - u(\cdot,t)\|_{\mathcal{H}^1(\Im)} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ равномерно на отрезке $[0,T]$.

Замыкание в норме (12) множества $\widehat{\Omega}_0(\Im_T)$ обозначим через $V_0^{1,0}(\Im_T)$, при этом $W_0^{1,0}(\Im_T)$ — замыкание в норме $W^{1,0}(\Im_T)$ множества $\widehat{\Omega}_0(\Im_T)$, элементы которого удовлетворяют только свойству *б*. Ясно, что $V_0^{1,0}(\Im_T) \subset W_0^{1,0}(\Im_T) \subset W^{1,0}(\Im_T)$. Пространство $V_0^{1,0}(\Im_T)$ используется при доказательстве разрешимости задачи (3)—(8), $W_0^{1,0}(\Im_T)$, $W^{1,0}(\Im_T)$ и $W_0^1(\Im_T)$ — вспомогательные.

Замечание 1. Если $Y \in V_0^{1,0}(\Im_T)$, то $Y = 0$ на $\partial\Im$, т. е. соотношения (5), (6), (8) следует понимать как условия принадлежности Y пространству $V_0^{1,0}(\Im_T)$. Равенство (7) понимается почти всюду на $\Im$.

Замечание 2. Утверждение леммы 1 остается справедливым и для функций, определенных в области $\Im_\tau = \Im \times (0,\tau)$ и имеющих следы для любого $t \in (0,\tau)$, где τ принимает любое фиксированное значение отрезка $[0,T]$. Доказательство этого дословно повторяет приведенное выше.

Данное замечание естественным образом приводит к следующему определению решения задачи (3)—(8), где исходные данные, т. е. функции f и Y_0, подчинены следующим условиям:

$$f(x,t) \in L_{2,1}(\Im_T), \quad Y_0(x) \in \mathcal{H}(\Im), \tag{13}$$

здесь $L_{2,1}(\Im_T)$ — пространство, элементы которого принадлежат $L_1(\Im_T)$ и имеют конечную норму $\|f\|_{L_{2,1}(\Im_T)} = \int_0^T \left(\int_\Im f^2 dx\right)^{1/2} dt$, $L_2(\Im_T) \subset L_{2,1}(\Im_T)$.

Определение. *Слабым решением начально-краевой задачи* (3)—(8) называется пара $\{Y, p\}$. При этом функция $Y(x,t) \in V_0^{1,0}(\Im_T)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$(Y(x,t),\eta(x,t)) - \int\limits_{\Im_t} Y(x,\tau)\frac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial\tau}\,dxd\tau + \nu\int\limits_0^t \rho(Y,\eta)\,d\tau =$$

$$= (Y_0(x),\eta(x,0)) + \int\limits_{\Im_t} f(x,\tau)\eta(x,\tau)\,dxd\tau \tag{14}$$

для любых $t \in [0, T]$ и любых $\eta(x, t) \in W_0^1(\Im_T)$, а функция $p(x, t)$ принадлежит классу $\mathfrak{D}'(\Im_T)^n$. Здесь $\mathfrak{D}'(\Im_T)^n$ — сопряженное пространство к пространству $\mathfrak{D}(\Im_T)^n$, элементы $\mathfrak{D}(\Im_T)^n$ суть бесконечно дифференцируемые в $\Im_T$ функции с компактным носителем из $\Im_T$ (см. аналогичные пространства $\mathfrak{D}(\Im)^n$ и $\mathfrak{D}'(\Im)^n$).

Замечание 3. Несмотря на кажущуюся точность, определение решения задачи (3)—(8), т. е. пары $\{Y, p\}$, содержит ярко выраженную особенность (неоднозначность), порожденную вариационной формулировкой (14) этой задачи, «исключающей» функцию $p(x, t)$: нет никаких сведений относительно функции $p(x, t)$, лишь только соотношение (14), поэтому отыскание функции $p(x, t)$ *достаточно с точностью до класса*, а именно, $p(x, t) \in \mathfrak{D}'(\Im_T)^n$. В приложениях последнее является вполне приемлемым условием, гарантирующим ненулевую динамику жидкости в области $\Im_T$ (во многих прикладных ситуациях $p(x, t)$ — априори заданная функция). В связи со сказанным в дальнейшем изложении будет говориться о функции $Y(x, t)$ как о «решении» задачи (3)—(8), существование же функции $p(x, t)$ и ее принадлежность классу $\mathfrak{D}'(\Im_T)^n$ будет прямым следствием существования $Y(x, t)$ класса $V_0^{1,0}(\Im_T)$.

Ниже рассматриваются вопросы однозначной слабой разрешимости начально-краевой задачи (3)—(8) и приводится последующий анализ задачи оптимального управления системой (3)—(6), при этом некоторые рассуждения аналогичны приведенным в работах [1, с. 77; 3—5].

2. Однозначная слабая разрешимость задачи (3)—(8)

Идея обоснования наличия единственного слабого решения задачи (3)—(8) остается той же, что и в работах [3—5] при анализе аналогичных задач с распределенными параметрами на геометрическом графе (сети), однако имеется существенное отличие (в этом и состоит основная сложность): областью изменения пространственной переменной задачи (3)—(8) является ограниченная область $\Im$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. пространственная переменная является *векторной*, функция $Y(x, t)$ также является *векторной*. Последнее привносит дополнительные сложности технического характера и прежде всего влияет на структуру и свойства пространств, выбираемых для описания слабых решений задачи (3)—(8).

Доказательство существования слабого решения начально-краевой задачи (3)—(8) предварим рассмотрением спектральной задачи в области $\Im$

$$-\nu\Delta U = \lambda U, \quad U|_{\partial\Im} = 0,$$

аналогичной таковой на графе [7], т. е. задачи определения множества таких чисел λ, каждому из которых соответствует по крайней мере одно нетривиальное решение $U(x) \in V_0^1(\Im)$, удовлетворяющее тождеству

$$\nu((U,\eta)) = \lambda(U,\eta)$$

при любой функции $\eta(x) \in V_0^1(\Im)$; здесь через $((\cdot,\cdot))$ обозначено скалярное произведение вида

$$((U,\eta)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Im)^n}.$$

Это означает тот факт, что $U(x)$ есть обобщенная собственная функция класса $V_0^1(\Im)$, а λ — соответствующее ей собственное значение. Остаются справедливыми следующие свойства собственных значений и обобщенных собственных функций, аналогичные представленным в работе [2].

1. Собственные значения вещественные и имеют конечную кратность, их можно занумеровать в порядке возрастания модулей с учетом кратностей: $\{\lambda_i\}_{i\geqslant 1}$; соответственно нумеруются и обобщенные собственные функции: $\{U_i(x)\}_{i\geqslant 1}$.
2. Система обобщенных собственных функций $\{U_i(x)\}_{i\geqslant 1}$ образует ортогональный базис в пространствах $V_0^1(\Im)$ и $L_2(\Im)^n$.

Замечание 4. Приведенные утверждения остаются справедливыми и для спектральной задачи, где краевое условие $U|_{\partial\Im} = 0$ заменено на более общее

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \sigma U|_{\partial\Im} = 0,$$

где постоянная σ своя для каждой области $\partial\Im_l \cap \partial\Im$; $\frac{\partial U}{\partial n}$ — производная по нормали, направленной внутрь области $\Im$. Обобщенная собственная функция в этом случае принадлежит пространству $V^1(\Im)$ (определение пространства $V^1(\Im)$ отличается от $V_0^1(\Im)$ заменой в описании множества Ω краевого условия $V|_{\partial\Im} = 0$ на вышеприведенное общее краевое условие) и удовлетворяет тождеству

$$\nu((U,\eta)) + \sigma(U,\eta)_{\partial\Im} = \lambda(U,\eta)$$

при любой функции $\eta(x) \in V^1(\Im)$; через $(\cdot,\cdot)_{\partial\Im}$ обозначено скалярное произведение (9) на $\partial\Im$, λ — собственное значение.

Теорема 1. *Существует по меньшей мере одно слабое решение начально-краевой задачи* (3)—(8) *при произвольном (конечном)* $T > 0$.

Доказательство. Воспользуемся системой собственных функций $\{U_i(x)\}_{i\geqslant 1}$ как базисом для представления приближения $Y_m(x,t)$ решения в виде

$$Y_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{i\,m}(t) U_i(x)$$

(скалярные функции $g_{i\,m}(t)$ абсолютно непрерывны на $[0,T]$), удовлетворяющего системе

$$\left(\frac{\partial Y_m}{\partial t}, U_i\right) + \nu\rho(Y_m, U_i) = (f, U_i), \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [0,T], \tag{15}$$

$$Y_m(x,0) = Y_{0\,m}(x), \tag{16}$$

где $Y_{0\,m}(x) = \sum_{i=1}^m g^0_{i\,m} U_i(x)$ ($g^0_{i\,m} = g_{i\,m}(0)$), $Y_{0\,m}(x) \to Y_0(x)$ в норме $\mathcal{H}(\Im)$.

Система (15), (16) является системой дифференциальных уравнений относительно функций $g_{i\,m}(t)$ и позволяет определить Y_m для любых $t \in [0,T]$. Покажем это, для чего получим априорные оценки норм Y_m в $V_0^{1,0}(\Im_T)$.

Умножая (15) на $g_{i\,m}(t)$ и суммируя по $i = \overline{1,m}$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|Y_m\|^2_{L_2(\Im)^n} + \nu\rho(Y_m, Y_m) = (f, Y_m). \tag{17}$$

Левая часть соотношения (17) равна

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|Y_m\|^2_{L_2(\Im)^n} + \nu\|(Y_m)_x\|^2_{L_2(\Im)^n},$$

для правой части имеет место оценка

$$(f, Y_m) \leqslant \|f\|_{L_2(\Im)^n}\|Y_m\|_{L_2(\Im)^n},$$

откуда с учетом формулы (17) вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|Y_m\|^2_{L_2(\Im)^n} + \nu\|(Y_m)_x\|^2_{L_2(\Im)^n} \leqslant \|f\|_{L_2(\Im)^n}\|Y_m\|_{L_2(\Im)^n},$$

после интегрирования которого по t от 0 до t приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\|Y_m\|^2_{L_2(\Im)^n} + \nu\int\limits_0^t \|(Y_m)_x\|^2_{L_2(\Im_t)^n} d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|Y_m(\cdot,0)\|^2_{L_2(\Im)^n} + \|f\|^2_{L_{2,1}(\Im_t)} \max_{\tau\in[0,t]} \|Y_m(\cdot,\tau)\|_{L_2(\Im)^n} \qquad (18)$$

для произвольного $t \in [0,T]$.

Обозначим через $z(t) = \max_{\tau\in[0,t]} \|Y_m(\cdot,\tau)\|_{L_2(\Im)}$ и, умножив обе части неравенства (18) на 2, получим в силу $\|Y_m(\cdot,0)\|^2_{L_2(\Im)^n} \leqslant z(t)$

$$z^2(t) + 2\nu\|(Y_m)_x\|^2_{L_2(\Im_t)} \leqslant \|Y_m(\cdot,0)\|_{L_2(\Im)^n} z(t) + 2\|f\|^2_{L_{2,1}(\Im_t)} z(t),$$

из которого вытекают два неравенства:

$$z^2(t) \leqslant J(t),$$
$$\|(Y_m)_x\|^2_{L_2(\Im_t)^n} \leqslant \frac{1}{2\nu} J(t)$$

(здесь $J(t) = \|Y_m(\cdot,0)\|_{L_2(\Im)^n} z(t) + 2\|f\|^2_{L_{2,1}(\Im_t)^n} z(t)$), из которых следует оценка

$$\|Y_m\|_{2,\Im_t} = z(t) + \|(Y_m)_x\|_{L_2(\Im_t)^n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\nu}}\right) J^{1/2}(t) \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\nu}}\right) \left(\|Y_m(\cdot,0)\|_{L_2(\Im)^n} + 2\|f\|_{L_{2,1}(\Im_t)}\right)^{1/2} \|Y_m\|^{1/2}_{2,\Im_t}$$

или для любых $t \in [0,T]$

$$\|Y_m\|_{2,\Im_t} \leqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\nu}}\right)^2 \left(\|Y_m(\cdot,0)\|_{L_2(\Im)^n} + 2\|f\|_{L_{2,1}(\Im_t)}\right). \qquad (19)$$

Учитывая соотношение (19) и разложение $Y_{0\,m}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} g^0_{i\,m} U_i(x)$, $Y_{0\,m}(x) \to Y_0(x)$ в норме $\mathcal{H}(\Im)$, имеем $\|Y_m(\cdot,0)\|_{L_2(\Im)^n} \leqslant c\|Y_0\|_{L_2(\Im)^n}$ ($c > 0$ — постоянная, не зависящая от m) и вытекающую из (19) оценку

$$\|Y_m\|_{2,\Im_t} \leqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt{2\nu}}\right)^2 \left(c\|Y_0\|_{L_2(\Im)^n}+2\|f\|_{L_{2,1}(\Im_t)}\right) \leqslant \\ \leqslant C^*\left(\|Y_0\|_{L_2(\Im)^n}+2\|f\|_{L_{2,1}(\Im_t)}\right), \tag{20}$$

где $C^* > 0$ — постоянная, не зависящая от m. Полученная оценка (20) преследует двоякую цель:

1) для любого номера m нормы приближений $Y_m(x,t)$ и их обобщенных производных $\frac{\partial Y_m(x,t)}{\partial x}$ в пространстве $\mathcal{H}(\Im)$ ограничены одной постоянной C, не зависящей от m:

$$\|Y_m\|_{L_2(\Im)^n} \leqslant C, \quad \left\|\frac{\partial Y_m(\cdot,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(\Im)^n} \leqslant C; \tag{21}$$

2) для любого номера m нормы приближений $Y_m(x,t)$ оцениваются нормами исходных данных $Y_0(x)$, $f(x,t)$ начально-краевой задачи (3)—(8).

Исходя из этого, воспользуемся известным утверждением для последовательности $\{Y_m\}_{m\geqslant 1}$ с ограниченными в совокупности нормами элементов [7, с. 31]: из последовательности $\{Y_m\}_{m\geqslant 1}$ можно выделить подпоследовательность $\{Y_{m_k}\}_{k\geqslant 1}$, слабо сходящуюся по норме (12) к некоторому элементу $Y \in V_0^{1,0}(\Im_T)$ ($\{Y_{m_k}\}_{k\geqslant 1}$ слабо сходится к Y в $L_2(\Im_T)^n$ вместе с $\frac{\partial Y_{m_k}}{\partial x}$). Покажем, что элемент $Y(x,t)$ является решением задачи (3)—(8).

Умножим соотношение (15) на абсолютно непрерывную на $[0,T]$ функцию $d_i(t)$, просуммируем по $i=\overline{1,m}$, результат проинтегрируем по t от 0 до t:

$$(Y_m(x,t),\Phi_m(x,t)) - \int\limits_{\Im_t} Y_m(x,\tau)\frac{\partial \Phi_m(x,\tau)}{\partial \tau}\,dxd\tau + \\ +\nu\int\limits_0^t \rho(Y_m,\Phi_m)\,d\tau = (Y_0(x),\Phi_m(x,0)) + \int\limits_{\Im_t} f(x,\tau)\Phi_m(x,\tau)\,dxd\tau, \tag{22}$$

где $\Phi_m(x,t)=\sum_{i=1}^m d_i(t)U_i(x)$.

Обозначим через Σ множество всех функций $\Phi_m(x,t)$ с произвольными $d_i(t)$, обладающими указанными выше свойствами, и произвольными натуральными m. Множество Σ плотно в $W_0^1(\Im_T)$. Это следует из плотности множества $\{U_i(x)\}_{i\geqslant 1}$ в $V_0^1(\Im)$, непрерывности $\Phi_m(x,t)$ по t в норме $\mathcal{H}^1(\Im)$ на $[0, T]$, принадлежности $\Phi_m(x,t) \in V_0^1(\Im)$ для каждого фиксированного $t \in [0, T]$ и определении пространства $W_0^1(\Im_T)$.

Зафиксируем в (22) функцию $\Phi_m(x,t) = \Phi^*_{m^*}(x,t) \in \Sigma$:

$$\Phi^*_{m^*}(x,t) = \sum_{i=1}^{m^*} d_i^*(t) U_i(x),$$

по выбранной выше подпоследовательности $\{Y_{m_k}\}_{k \geqslant 1}$ перейдем к пределу, начиная с номера $m_k \geqslant m^*$, прежде всего заметив, что интеграл $\int_0^t \rho(Y_{m_k}, \Phi^*_{m^*})\, d\tau$ в силу утверждения леммы 1 сходится к $\int_0^t \rho(Y, \Phi^*_{m^*})\, d\tau$. В результате предельного перехода получим соотношение (22) для предельной функции $Y(x,t)$. Следовательно, при $\eta(x,t) = \Phi^*_{m^*}(x,t)$ в силу плотности множества Σ в $W_0^1(\Im_T)$ функция $Y(x,t)$ — слабое решение из $V_0^{1,0}(\Im_T)$ начально-краевой задачи (3)—(8).

Для завершения доказательства остается показать существование функции $p(x,t) \in \mathfrak{D}'(\Im_T)^n$. Это вытекает из следующих соображений. Найденная функция $Y(x,t)$ как слабое решение задачи (3)—(8) удовлетворяет тождеству (14) при $t = T$, а значит, формально положив

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y + \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} - f = F,$$

получим в силу (13) и (14) $(F, \eta) = 0$ для любого элемента $\eta \in \mathfrak{D}(\Im_T)^n$ ($\mathfrak{D}(\Im_T)^n$ плотно в $W_0^1(\Im_T)$, что означает принадлежность элемента F пространству $\mathfrak{D}'(\Im_T)^n$) и представление его в виде $F = -\nabla p$, где функция $p(x,t)$ — некоторый элемент пространства $\mathfrak{D}'(\Im_T)^n$. $\square$

Замечание 5. Доказательство теоремы содержит более глубокое утверждение относительно слабого решения $Y(x,t)$: функция $Y(x,t)$ обладает производной $\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t}$ класса $L_2(0, T; V_0^1(\Im))$ по переменной t, что обусловлено представлением элементов $Y_{m_k}(x,t)$ подпоследовательности $\{Y_{m_k}\}_{k \geqslant 1}$ для предельной функции $Y(x,t)$.

Покажем, что задача (3)—(8) не может иметь двух различных решений класса $V_0^{1,0}(\Im_T)$. Если бы существовало два таких решения $Y_1(x,t)$ и $Y_2(x,t)$, то их разность $Y(x,t) = Y_1(x,t) - Y_2(x,t)$ была бы слабым решением задачи (3)—(8) ($f(x,t) = 0$, $Y_0(x) = 0$) из класса $V_0^{1,0}(\Im_T)$. Для решения $Y(x,t)$ как предельного элемента последовательности $Y_m(x,t)$ будет справедлива аналогичная (20) оценка с правой частью, равной нулю (см. доказательство теоремы 1). Следовательно, $Y(x,t) = 0$, решения $Y_1(x,t)$ и $Y_2(x,t)$ совпадают. Таким образом, доказано следующее.

Теорема 2. *Начально-краевая задача* (3)—(8) *имеет единственное слабое решение в пространстве* $V_0^{1,0}(\Im_T)$.

Следствие. *Слабое решение начально-краевой задачи* (3)—(8) *непрерывно зависит от исходных данных* $f(x,t)$ *и* $Y_0(x)$, *что вытекает из упомянутой оценки* (20). *Отсюда и из утверждений теорем 1 и 2 следует корректность по Адамару задачи* (3)—(8).

3. Задача оптимального управления

Далее рассматриваются два типа задач оптимального управления, достаточно часто встречающиеся на практике — распределенное и стартовое, наблюдение при этом финальное. В первом случае управляющее воздействие присутствует в правой части системы Навье — Стокса (т. е. определяет плотность внешних сил), во втором — определяет начальное условие системы при $t = 0$; в обоих случаях физическая задача состоит в том, чтобы к заданному (финальному) моменту времени $t = T$ разогнать несжимаемую вязкую многофазную среду до заданного векторного поля скорости.

Пусть задано пространство управлений $\mathfrak{v}(x,t)$ — гильбертово пространство $\mathbb{U}$, $V_0^{1,0}(\Im_T)$ — пространство состояний $Y(\mathfrak{v})$ системы Навье — Стокса. Отметим, что выбор пространства состояний системы влияет на выбор пространства управлений (и наоборот), в связи с чем для задач оптимального распределенного и стартового управлений считаем $\mathbb{U}$ подпространством $L_2(\Im_T)^n$ и $L_2(\Im)^n$ соответственно. В обоих случаях наблюдение системы осуществляется на области $\Im_T$ в финальный момент времени $t = T$ (возможны и другие типы наблюдений, например граничное). Пусть $C : L_2(\Im_T)^n \to H$ — линейный непрерывный оператор (оператор наблюдения, H — пространство наблюдений (здесь и ниже $H = L_2(\Im)^n$); случай наличия шума не рассматривается), $CY(\mathfrak{v}) = DY(\mathfrak{v})(x,T)$, $D : H \to H$ — линейный ограниченный оператор. На замкнутом выпуклом множестве $\mathbb{U}_\partial$ пространства $\mathbb{U}$ задается требующий минимизации функционал $J(\mathfrak{v})$, определяемый с помощью двух операторов — оператора перехода от управления $\mathfrak{v}$ к состоянию $Y(\mathfrak{v})$ и оператора перехода от состояния $Y(\mathfrak{v})$ к наблюдению $CY(\mathfrak{v})$:

$$\begin{aligned} J(\mathfrak{v}) = \|CY(\mathfrak{v}) - z_0\|_H^2 + (N\mathfrak{v}, \mathfrak{v})_{\mathbb{U}} = \\ = \|DY(\mathfrak{v})(x,T) - z_0\|_H^2 + (N\mathfrak{v}, \mathfrak{v})_{\mathbb{U}}, \end{aligned} \tag{23}$$

где $z_0(x,t) \in L_2(\Im_T)^n$ — заданное наблюдение, $N : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ — линейный непрерывный эрмитов оператор, $(N\upsilon, \upsilon)_{\mathbb{U}} \geqslant \sigma\|\upsilon\|_{\mathbb{U}}$ ($\sigma > 0$ — фиксированная постоянная). Присутствие слагаемого $(N\upsilon, \upsilon)_{\mathbb{U}}$ в представлении функционала $J(\upsilon)$ гарантирует коэрцитивность квадратичной компоненты функционала $J(v)$ [1, с. 13].

Задача оптимального распределенного (или стартового) управления системой Навье — Стокса состоит в отыскании $\min_{v \in \mathbb{U}_\partial} J(v)$. *Элемент* $u \in \mathbb{U}_\partial$ *назовем оптимальным управлением системы, если он доставляет минимум функционалу* $J(v)$ *на множестве* $\mathbb{U}_\partial$.

Распределенное управление. Пусть задан линейный ограниченный оператор $B : \mathbb{U} \to L_{2,1}(\Im_T)$, уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y + \nabla p = f + B\upsilon; \tag{24}$$

состояние $\{Y(\upsilon)(x,t), p(\upsilon)(x,t)\}$ системы (23), (4)—(6) определяется слабым решением начально-краевой задачи (23), (4)—(8), корректность по Адамару последней вытекает из результатов пункта 2. Имеет место непрерывная зависимость состояния $Y(\upsilon)$ от управления υ (отображение $\upsilon \to Y(\upsilon)$ — непрерывное), поэтому применимы результаты теории минимизации положительно определенных квадратичных форм, заданных на замкнутом выпуклом множестве гильбертова пространства [1, гл. I], см. также [3; 4; 8, гл. I]. Дальнейший анализ аналогичен представленному в работах [3, 4], где осуществлено изучение вопросов оптимального управления системами с распределенными параметрами на графе (сети).

Для системы (24), (4)—(6) определим сопряженное состояние $\omega(\upsilon)(x,t) \in W_0^1(\Im_T)$, $\omega(\upsilon)(x,T) = D^*(DY(T;\upsilon) - z_0)$, ($D^*$ — оператор, сопряженный к D) как функцию, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\Im_T} \frac{\partial \omega(\upsilon)(x,\tau)}{\partial \tau} \eta(x,\tau)\, dx d\tau + \nu \int\limits_0^T \rho(\omega(\upsilon), \eta)\, d\tau = 0 \tag{25}$$

для любых функций $\eta(x,t) \in W_0^{1,0}(\Im_T)$ (вариационная формулировка, аналогична (14) и «исключает» функцию $p(x,t)$). Для доказательства существования единственного слабого решения $\omega(\upsilon)$ достаточно применить теорему 1, заменив t на $T - t$.

При высказанных условиях справедливо приведенное ниже утверждение, аналогичное представленному в теореме 5 из работы [3].

Теорема 3. *Для того чтобы элемент* $u(x,t) \in \mathbb{U}_\partial$ *был оптимальным распределенным управлением системы* (24), (4)—(6), *необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения:*

$$(Y(u)(x,t), \eta(x,t)) - \int\limits_{\Im_t} Y(u)(x,\tau)\frac{\partial \eta(x,\tau)}{\partial \tau} dx d\tau + \nu \int\limits_0^t \rho(Y(u),\eta) d\tau =$$

$$= (Y_0(x), \eta(x,0)) + \int\limits_{\Im_t} (f(x,\tau) + Bu(x,\tau))\eta(x,\tau) dx d\tau$$

для любых $t \in [0,T]$ *и любых* $\eta(x,t) \in W_0^1(\Im_T)$*;*

$$-\int\limits_{\Im_T} \frac{\partial \omega(u)(x,\tau)}{\partial \tau}\eta(x,\tau) dx d\tau + \nu \int\limits_0^T \rho(\omega(u),\eta) d\tau = 0$$

для любых $\eta(x,t) \in W_0^{1,0}(\Im_T)$*;*

$$\int\limits_{\Im_T} (\omega(u)(x,t) + Nu(x,t))\,(v(x,t) - u(x,t))\, dx dt \geqslant 0 \qquad (26)$$

для любых $v \in \mathbb{U}_\partial$*.*

Здесь $Y(u) \in V_0^{1,0}(\Im_T)$, $\omega(u) \in W_0^1(\Im_T)$ *и* $\omega(u)(x,T) = D^*[DY(T;u) - z_0]$, $x \in \Im$.

Замечание 6. Вариантом распределенного управления является случай точечного управления системой (3)—(6), имеющий важное значение для приложений. Правая часть f в (3) заменяется на $\sum_{j=1}^m \upsilon_j(t) \otimes \otimes \delta(x - x_j)$, $\upsilon(t) = \{\upsilon_1(t), \upsilon_2(t), \dots, \upsilon_m(t)\} \in L_2(0,T)^m$, $x_j \in \bigcup_k \Im_k$. Описанная таким образом ситуация означает приложение точечных управляющих воздействий в фиксированных точках области $\Im$.

Состояние $Y(\upsilon)$ определяется в вариационной формулировке как элемент пространства $V_0^{1,0}(\Im_T)$, для которого справедливо интегральное тождество

$$(Y(\upsilon)(x,t), \zeta(x,t)) - \int\limits_{\Im_t} Y(\upsilon)(x,\tau)\frac{\partial \zeta(x,\tau)}{\partial \tau} dx d\tau + \nu \int\limits_0^t \rho(Y(\upsilon),\zeta) d\tau =$$

$$= (Y_0(x), \zeta(x,0)) + \int\limits_{\Im_t} f(x,\tau)\zeta(x,\tau)dxd\tau + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_0^t \upsilon_j(\tau)\zeta(x_j,\tau)d\tau$$

при любых $t \in [0,T]$ и любых $\zeta(x,t) \in W_0^{2,1}(\Im_T)$. Здесь $W_0^{2,1}(\Im_T)$ — замыкание элементов $\widetilde{\mathfrak{D}}(\Im_T)^n$ в норме пространства

$$H^{2,1}(\Im_T) = \left\{ g : g, \frac{\partial g}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial g}{\partial t} \in L_2(\Im_T)^n \right\}$$

(свойства $H^{2,1}(\Im_T)$ см. в [1, с. 126]). Если граница $\partial\Im_T$ области $\Im_T$ достаточно гладкая, сопряженное состояние $\omega(\upsilon)$ является элементом пространства $W_0^{2,1}(\Im_T)$, причем $\omega(\upsilon)(x,T) = 0$.

Стартовое управление. Приведем другой пример управления системой (3)–(6), актуальный на практике при анализе динамики переноса многофазных сред. Управляющее воздействие $\upsilon(x) \in \mathbb{U}$ осуществляется в начальный момент времени и определяет начальное условие (7) ($Y_0(x) = \upsilon(x)$):

$$Y(x,0) = \upsilon(x), \quad x \in \Im. \tag{27}$$

Состояние $\{Y(\upsilon)(x,t), p(\upsilon)(x,t)\}$ системы (3)—(6) определяется слабым решением $Y(\upsilon)(x,t)$ начально-краевой задачи (3)—(6), (8), (26) (в интегральном тождестве (14) функция $Y_0(x)$ заменяется на $\upsilon(x)$) и произвольной функцией $p(x,t)$, принадлежащей классу $\mathfrak{D}'(\Im_T)^n$. Корректность по Адамару задачи (3)—(6), (8), (26), как и в случае распределенного управления, есть следствие результатов раздела 2. Сопряженное состояние $\omega(\upsilon)(x,t)$ системы (3)—(6) определяется интегральным тождеством (26), при этом $\omega(\upsilon)(x,T) = D^*(DY(T;\upsilon) - z_0)$, $x \in \Im$ (последнее равенство понимается почти всюду на $\Im$).

Имеет место утверждение, аналогичное приведенному в теореме 7 из работы [4].

Теорема 4. *Для того чтобы элемент $u(x) \in \mathbb{U}_\partial$ был оптимальным стартовым управлением системы* (3)—(6)*, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения:*

$$(Y(u)(x,t), \eta(x,t)) - \int\limits_{\Im_t} Y(u)(x,\tau)\frac{\partial \eta(x,\tau)}{\partial \tau}\, dxd\tau + \nu \int\limits_0^t \rho(Y(u), \eta)\, d\tau =$$

$$= (u(x), \eta(x,0)) + \int\limits_{\Im_t} f(x,\tau)\eta(x,\tau)\,dxd\tau$$

для любых $t \in [0,T]$ *и любых* $\eta(x,t) \in W_0^1(\Im_T)$*;*

$$-\int\limits_{\Im_T} \frac{\partial\omega(u)(x,\tau)}{\partial\tau}\eta(x,\tau)\,dxd\tau + \nu\int\limits_0^T \rho(\omega(u),\eta)\,d\tau = 0$$

для любых функций $\eta(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_0^{1,0}(\Im_T)$*;*

$$\int\limits_{\Im} (\omega(u)(x,0) + Nu(x))\,(v(x) - u(x))\;dxdt \geqslant 0 \qquad (28)$$

для любых $v \in \mathbb{U}_\partial$*.*

Здесь $Y(u) \in \overset{\circ}{V}{}_0^{1,0}(\Im_T)$*,* $\omega(u) \in W_0^1(\Im_T)$ *и* $\omega(u)(x,T) = D^*[DY(T;u) - -z_0]$*,* $x \in \Im$*.*

4. Синтез оптимальных управлений (обратная связь)

Задачу синтеза оптимальных управлений рассмотрим для случая отсутствия ограничений на управление: $\mathbb{U}_\partial$ совпадает с $\mathbb{U}$. Тогда в соотношениях (26), (28) можно положить $v = u \pm \nu$, и в силу произвольности $v \in \mathbb{U}$ они трансформируются в равенства, а значит, для оптимальных распределенного и стартового управлений справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\omega(u)(x,t) + Nu(x,t) = 0, \quad \omega(u)(x,0) + Nu(x) = 0,\\ &u(x,t) = -N^{-1}\omega(u)(x,t), \quad u(x) = -N^{-1}\omega(u)(x,0). \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к выводу, что оптимальное распределенное управление определяется из решения системы двух интегральных тождеств (вариационных соотношений) вида

$$\int\limits_{\Gamma} Y(x,t)\eta(x,t)\,dx - \int\limits_{\Gamma_t} Y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\,dxdt + \ell_t(Y,\eta) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} Y_0(x)\eta(x,h)\,dx + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)\,dxdt -$$

$$-\int\limits_{\partial\Gamma_t} N^{-1}\omega(x,t)\eta(x,t)\,dxdt \tag{29}$$

при любом $t \in [0,T]$ и для любой функции $\eta(x,t) \in W_0^1(\Gamma_t)$;

$$-\int\limits_{\Im_T} \frac{\partial\omega(u)(x,\tau)}{\partial\tau}\zeta(x,\tau)dxd\tau + \nu\int\limits_0^T \rho(\omega(u),\zeta)d\tau = 0 \tag{30}$$

для любых функций $\zeta(x,t) \in W_0^{1,0}(\Im_T)$. Оптимальное распределенное управление имеет вид

$$u(x,t) = -N^{-1}\omega(x,t). \tag{31}$$

Для определения оптимального стартового управления имеет место система интегральных тождеств, аналогичная (29), (30), причем

$$u(x) = -N^{-1}\omega(x,0). \tag{32}$$

Соотношения (31) и (32) осуществляют синтез оптимального распределенного и стартового управлений системами (24), (4)—(6) и (3)—(6) соответственно. Оптимальные управления определяются через сопряженные состояния, тем самым осуществляется обратная связь через состояния каждой из систем.

Замечание 7. В принятых допущениях возможно установить более глубокие результаты синтеза оптимального управления, обобщающие известные результаты Калмана для ограниченных операторов.

Заключение

Для линеаризованной системы Навье — Стокса рассмотрены достаточно распространенные в приложениях задачи распределенного и стартового управлений, получены условия синтеза оптимальных управлений в терминах сопряженных состояний систем (24), (4)—(6) и (3)—(6) и аналоги (формулы (31) и (32)) известных для конечномерного случая результатов Калмана. Описанный метод применим и ко многим задачам оптимизации дифференциальных систем, состояния которых определяются слабыми решениями эволюционных уравнений на сетях типа изученных в работах [3—5]. В работах [9—11] рассмотрены другие подходы при анализе прикладных задач устойчивости решений некоторых классов сложных систем, стабилизации решений [12, 13], имеющие, однако, аналогичную трактовку условий существования оптимального управления. Отметим также, что изучаемая задача допускает в представлении эволюционных систем (3) и (23) особенности в виде стохастической компоненты [14] и разрывной нелинейности [15].

Список литературы

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / пер. с фр. Л.Н. Волевича; под ред. О.А. Олейник. — М.: Мир, 1972.— 587 с.

2. *Провоторов В.В., Гнилицкая Ю.А.* Граничное управление волновой системой в пространстве обобщенных решений на графе // Вестник С.-Петерб. ун-та. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2013. — № 3. — С. 112—120.

3. *Провоторов В.В.* Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник С.-Петерб. ун-та. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 3. — С. 154—163.

4. *Подвальный С.Л., Провоторов В.В.* Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе / Вестник С.-Петерб. ун-та. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 3. — С. 126—142.

5. *Podvalny S.L., Provotorov V.V.* The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph // Stability and Control Processes: 2015 International Conference in Memory of V.I. Zubov (SCP). — 2015. — P. 117—119.

6. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 407 с.

7. *Волкова А.С., Провоторов В.В.* Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Изв. вузов. Математика. — 2014. — № 3. — С. 3—18.

8. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 1999. — Т. 5. — 352 с.

9. *Александров А.Ю., Жабко А.П.* Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сиб. матем. журнал. — 2012. — Т. 53, № 3. — С. 495—508.

10. *Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A.* Asymptotic stability conditions for certain classes of mechanical systems with time deley // WSEAS Transactions on Systems end Control. — 2014. — Т. 9. — P. 388—397.

11. *Александров А.Ю., Жабко А.П.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 9. — С. 3 — 14.

12. *Веремей Е.И., Корчанов В.М.* Многоцелевая стабилизация динамических систем одного класса // Автоматика и телемеханика. — 1988. — № 9. — С. 126—137.

13. *Веремей Е.И., Сотникова М.В.* Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестник С.-Петерб. ун-та. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2011. — № 1. — С. 116—133.

14. *Карелин В.В.* Штрафные функции в задаче управления процессом наблюдения // Вестник С.-Петерб. ун-та. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2010. — № 4. — С. 109—114.

15. *Kamachkin A.M., Yevstafyeva V.V.* Oscillations in a relay control system at an external disturbance // Control Applications of Optimization 2000: Proceedings of the 11th IFAC Workshop. — 2000. — № 2. — P. 459—462.

Провоторов Вячеслав Васильевич
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: `wwprov@mail.ru`

Провоторова Елена Николаевна
Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия
E-mail: `enprov@mail.ru`