УДК 330.42, 519.83

В.Д. Матвеенко, А.В. Королев, М.О. Жданова

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СЕТЯХ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучается игровое равновесие в модели с производством в сети с двумя типами агентов, обладающих разной продуктивностью. Каждый агент может инвестировать часть своего начального запаса в первом из двух временных периодов; потребление во втором периоде зависит от его инвестиций и продуктивности, так же как и от инвестиций его соседей в сети. Вводится формализация понятия динамики в терминах системы разностных уравнений, и изучаются вопросы устойчивости равновесий в полной сети, содержащей агентов с разной продуктивностью.

Ключевые слова: системы разностных уравнений, задача Коши, динамическая устойчивость, равновесие Нэша с экстерналиями, полная сеть.

Введение

В моделях экономики сетей и игр на сетях [1, 2] предполагается, что агенты в сети рациональны и решают свои оптимизационные задачи, а профиль действий агентов в сети образует игровое равновесие. При этом решение каждого агента подвержено влиянию поведения его соседей в сети. Наряду с учетом положения агентов в сети, важную проблему представляет также учет неоднородности агентов как фактор, определяющий различия в их поведении и благосостоянии.

В данной статье мы предполагаем, что есть два типа агентов с разными продуктивностями. Изучаемый в статье вопрос — это устойчивость равновесий в сетях с различными типами агентов. Вводится понятие динамики в терминах системы разностных уравнений, и изучается динамическая устойчивость состояний равновесия. Паттерны динамики и природа результирующего равновесия зависят от параметров, характеризующих неоднородность агентов.

1. Описание модели

Имеется сеть (неориентированный граф) с n вершинами $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть M — матрица смежности этой сети. В этой матрице $M_{ij} = M_{ji} = 1$, если в сети имеется ребро, соединяющее вершины i и

j, и $M_{ij} = M_{ji} = 0$ — в противном случае. При всех $i = 1, 2, \ldots, n$ полагаем $M_{ii} = 0$. В вершинах сети находятся агенты. В период 1 каждый агент наделен начальным запасом блага $e > 0$. Агент может использовать этот запас частично для потребления в первом периоде c_1^i, а частично для инвестиций в знания (k_i), которые используются при производстве блага для потребления во втором периоде (c_2^i). Инвестиции немедленно превращаются в запас знаний.

Предпочтения i-го агента описываются квадратичной функцией полезности

$$U_i(c_1^i, c_2^i) = c_1^i(e - ac_1^i) + d_i c_2^i,$$

где $d_i > 0$ и a — коэффициент насыщения. Предполагается, что при $c_1^i \in [0, e]$ полезность возрастает по c_1^i и что полезность имеет убывающую отдачу по c_1^i. Эти предположения эквивалентны условию $0 < a < 1/2$.

Производство в вершине i описывается производственной функцией

$$F(k_i, K_i) = g_i k_i K_i, \quad g_i > 0,$$

зависящей от состояния знаний k_i в данной вершине и от среды K_i, т.е. суммы инвестиций в знания самого агента и его соседей (агентов, находящихся в смежных вершинах сети). Произведение $d_i g_i$ для удобства обозначается как b_i, и всегда предполагается, что $a < b_i$. Поскольку увеличение каждого из параметров d_i, g_i способствует увеличению потребления второго периода, будем говорить о величине b_i как о «продуктивности».

Выделим три вида поведения агента:

- агент называется *пассивным*, если он делает нулевые инвестиции в знания $k_i = 0$;
- *активным* — если он делает инвестиции в знания $k_i \in (0, e)$;
- *гиперактивным* — если он делает максимально возможные инвестиции в знания $k_i = e$ (т. е. не потребляет в первом периоде).

Каждый агент решает следующую оптимизационную задачу:

$$U_i(c_1^i, c_2^i) \xrightarrow[c_1^i, c_2^i, k^i]{} \max,$$

$$\begin{cases} c_1^i \leqslant e - k^i, \\ c_2^i \leqslant F(k^i, K^i), \\ c_1^i \geqslant 0, c_2^i \geqslant 0, k^i \geqslant 0. \end{cases}$$

Первые два ограничения задачи в точке оптимума, очевидно, удовлетворяются как равенства. Подставляя эти ограничения в целевую функцию, мы можем определить новую функцию (платежную функцию):

$$\begin{aligned} V_i(k_i, K_i) &= U_i(e - k_i, F_i(k_i, K_i)) = \\ &= e^2(1-a) - k_i e(1-2a) - ak_i^2 + b_i k_i K_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Определение 1. Равновесием Нэша с экстерналиями назовем набор уровней знаний (инвестиций) $(k_1^*, k_2^*, ..., k_n^*)$, такой что каждое k_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n$, максимизирует платежную функцию $V_i\,(k_i, K_i^*)$ при соответствующей среде K_i^*, которая определяется этим же набором инвестиций.

Если все $k_i \in (0, e)$, т. е. все агенты являются активными, то равновесие будем называть внутренним. Ясно, что внутреннее равновесие Нэша с экстерналиями (если оно существует при данных значениях параметров) определяется системой уравнений

$$D_1 V_i(k_i, K_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где D_1 — частная производная по первому аргументу. Из формулы (1) следует, что (2) эквивалентно системе уравнений

$$-2ak_i + b_i K_i = e(1-2a), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Введем обозначения: I — единичная матрица порядка n, $B = \mathrm{diag}\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ — диагональная матрица, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T$, $h = e(1-2a)(1, 1, \ldots, 1)^T$. Поскольку $K_i = k_i + \sum_{j=1}^n M_{ij} k_j$, уравнение (3) легко переписать в векторной форме

$$(B - 2aI)k + BMk = h. \tag{4}$$

Можно доказать, что система уравнений (4) для полной сети имеет единственное решение. Следовательно, платежная функция $V_i\,(k_i, K_i)$ для i-й вершины, рассматриваемая при данном значении продуктивности агента в i-й вершине и при данной среде K_i как функция от k_i на всей вещественной оси, имеет единственный строгий глобальный максимум.

2. Характеризация видов поведения агента

Центральную роль при анализе равновесий играет следующее утверждение, доказанное в работе [3]. В его формулировке оказывается полезным использовать понятие чистых экстерналий $\tilde{K}_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} k_j$ — суммарных инвестиций в знания всех соседей i-го агента.

Лемма 1. *При $b_i < 2a$ необходимые и достаточные условия различных типов поведения агента следующие:*

а) агент пассивен, если и только если $\tilde{K}_i b_i \leqslant e\,(1-2a)$;

б) агент активен, если и только если $e\,(1-2a) < \tilde{K}_i b_i < e\,(1-b_i)$;

в) агент гиперактивен, если и только если $\tilde{K} b_i \geqslant e\,(1-b_i)$.

При $b_i > 2a$ необходимые условия различных типов поведения агента следующие:

а) если агент пассивен, то $\tilde{K}_i b_i \leqslant e\,(1-2a)$;

б) если агент активен, то $e\,(1-b_i) < \tilde{K}_i b_i < e\;(1-\;2a)$;

в) если агент гиперактивен, то $\tilde{K}_i b_i \geqslant e\,(1-b_i)$.

Говоря о полной сети, будем опускать индекс i в обозначении среды i-го агента, поскольку в полной сети среда у всех агентов одинакова. Таким образом, через K обозначается сумма инвестиций всех агентов полной сети.

3. Равновесия в полной сети с двумя типами агентов

Рассмотрим полную сеть, состоящую из p агентов с продуктивностью b_1 (этих агентов мы будем называть агентами первой группы) и q агентов с продуктивностью b_2 (их мы будем называть агентами второй группы), причем $b_1 > b_2$. Перечислим возможные в такой сети равновесия и соотношения параметров, при которых данные равновесия существуют.

- Агенты обеих групп гиперактивны:

$$b_1 > b_2 \geqslant \frac{1}{p+q}.$$

- Агенты первой группы гиперактивны, агенты второй группы активны:

$$0 < \frac{1-2a-pb_2}{qb_2-2a} < 1,$$
$$p + \frac{q\,(1-2a-pb_2)}{qb_2-2a} \geqslant \frac{1}{b_1}. \tag{5}$$

- Агенты первой группы гиперактивны, второй группы – пассивны:

$$b_1 \geqslant \frac{1}{p}, \quad b_2 \leqslant \frac{1-2a}{p}. \tag{6}$$

- Агенты первой группы активны, второй — пассивны:

$$b_1 > \frac{1}{p}, \quad b_2 \leqslant \frac{pb_1 - 2a}{p}. \tag{7}$$

- Равновесие, при котором агенты обеих групп пассивны, возможно всегда.
- Агенты обеих групп активны:

$$p(b_1 - b_2) < 2a, \quad 2ab_1(p+q) > 2a + q(b_1 - b_2). \tag{8}$$

4. Динамика и динамическая устойчивость равновесия

Введем понятие динамики приспособления, которая может начинаться после малого отклонения от положения равновесия или после объединения сетей, каждая из которых изначально находилась в положении равновесия. Каждый агент максимизирует свою полезность путем выбора уровня своих инвестиций; в момент принятия решения он рассматривает свою среду как экзогенно заданную. Примем следующие договоренности:

- если $k_i^n = 0$ и $D_1 V_i(k_i, K_i)|_{k_i=0} \leqslant 0$, то $k_i^{n+1} = 0$;
- если $k_i^n = e$ и $D_1 V_i(k_i, K_i)|_{k_i=e} \geqslant 0$, то $k_i^{n+1} = e$;
- во всех остальных случаях является решением системы разностных уравнений:

$$-2ak_i^{n+1} + b_i K_i^n - e(1-2a) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Как и прежде, рассмотрим полную сеть, состоящую из p агентов с продуктивностью b_1 (тип 1) и q агентов с продуктивностью b_2 (тип 2). В начальный период времени каждый агент типа 1 инвестирует k_{01} и каждый агент типа 2 инвестирует k_{02} . Соответственно, среда (общая для всех агентов) в начальный период равна $K = pk_{01} + qk_{02}$. Перечислим все ситуации, когда k_1^n, k_2^n определяются системой разностных уравнений:

1) $k_{01} = 0$ и $D_1 V_1(k_1, K)|_{k_1=0} > 0$;

2) $k_{01} = e$ и $D_1 V_1 (k_1, K)|_{k_1 = e} < 0$;

3) $k_{01} \in (0,\ e)$;

4) $k_{02} = 0$ и $D_1 V_2 (k_2, K)|_{k_2 = 0} > 0$;

5) $k_{02} = e$ и $D_1 V_2 (k_2, K)|_{k_2 = e} < 0$;

6) $k_{02} \in (0,\ e)$.

Обозначим $k^n = (k_1^n,\ k_2^n)^T$, $h = e(1 - 1/2a)(1,1)^T$, $P = \frac{1}{2a}\begin{bmatrix} pb_1 & qb_1 \\ pb_2 & qb_2 \end{bmatrix}$ и запишем систему (9) для рассматриваемого случая в векторной форме

$$k^{n+1} = Pk^n + h, \tag{10}$$

дополнив ее начальными условиями

$$k_1^0 = k_{01}, \quad k_2^0 = k_{02}. \tag{11}$$

Решение задачи (10), (11) может быть найдено в явной аналитической форме.

Предложение 1. *Решение разностной задачи Коши* (10), (11) имеет вид

$$k^n = (pk_{01} + qk_{02} - c_0)\frac{\lambda^{n-1}}{2a}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где

$$c_0 = \frac{e(1-2a)\,(p+q)}{pb_1 + qb_2 - 2a}, \quad \lambda = \frac{pb_1 + qb_2}{2a},$$
$$c_1 = \frac{e(1-2a)\,(qb_2 - qb_1 - 2a)}{2a\,(2a - pb_1 - qb_2)}, \quad c_2 = \frac{e(1-2a)\,(pb_1 - pb_2 - 2a)}{2a\,(2a - pb_1 - qb_2)}. \tag{13}$$

Доказательство. Найдем частное решение $\tilde{k}^n$ неоднородной системы (10). Пусть $\tilde{k}^n = (c_1, c_2)^T$. Числа c_1, c_2 найдем, подставляя их вместо k_1^n, k_2^n в систему (10):

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{pb_1}{2a}c_1 + \dfrac{qb_1}{2a}c_2 + \dfrac{e(2a-1)}{2a}, \\ c_2 = \dfrac{pb_2}{2a}c_1 + \dfrac{qb_2}{2a}c_2 + \dfrac{e(2a-1)}{2a}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что решением этой системы являются числа, определенные равенствами (13).

Заменой переменных $x^n = k^n - \tilde{k}^n$ сводим задачу (10), (11) к более простой:

$$x^{n+1} = Px^n, \tag{14}$$
$$x_1^0 = k_{01} - c_1, \quad x_2^0 = k_{02} - c_2.$$

Матрица P имеет два различных собственных числа: 0 и $\lambda = \frac{pb_1+qb_2}{2a}$, которым соответствуют собственные векторы $e_0 = (q, -p)^T$ и $e_\lambda = (b_1, b_2)^T$. Следовательно, матрица $T = \begin{bmatrix} q & b_1 \\ -p & b_2 \end{bmatrix}$ задает невырожденное преобразование, приводящее матрицу P к диагональной форме: $T^{-1}PT = P_0 = \mathrm{diag}\{0, \lambda\}$. Значит, уравнение (14) эквивалентно уравнению $T^{-1}x^{n+1} = (T^{-1}PT)T^{-1}x^n$. Обозначив $y^n = T^{-1}x^n$, сведем систему (14) к системе $y^{n+1} = P_0 y^n$, решение которой $y^n = P_0^n y^0$. Однако $P_0^n = \mathrm{diag}\{0, \lambda^n\}$, а $y^0 = T^{-1}x^0$, следовательно,

$$y^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2a\lambda} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ p & q \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{01} - c_1 \\ k_{02} - c_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{\lambda^{n-1}}{2a} \begin{pmatrix} 0 \\ p(k_{01} - c_1) + q(k_{02} - c_2) \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к переменной $x^n = Ty^n$, получаем:

$$x^n = \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix} = \frac{\lambda^{n-1}}{2a} \begin{bmatrix} q & b_1 \\ -p & b_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p(k_{01} - c_1) + q(k_{02} - c_2) \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{\lambda^{n-1}}{2a} \left(p(k_{01} - c_1) + q(k_{02} - c_2)\right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $pc_1 + qc_2 = c_0$, следовательно,

$$x^n = (pk_{01} + qk_{02} - c_0) \frac{\lambda^{n-1}}{2a} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

а так как $k^n = x^n + \tilde{k}^n$, то для k^n получаем представление (12). □

Определение 2. Равновесие называется *динамически устойчивым*, если при малом отклонении инвестиций одного или нескольких агентов от равновесных значений возникает динамика, которая возвращает сеть в исходное состояние равновесия. В противном случае равновесие называется динамически неустойчивым.

Предложение 2. *Условия динамической устойчивости/неустойчивости равновесий, перечисленных в разделе 3 (в случае их существования), следующие.*

1. *Равновесие, при котором агенты обеих групп гиперактивны, устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$(p+q)b_1 > 1, \quad (p+q)b_2 > 1. \tag{15}$$

2. *Равновесие, при котором все агенты первой группы гиперактивны, а все агенты второй группы активны, устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$qb_2 < 2a, \quad pb_1 + \frac{qb_1(1-2a-pb_2)}{qb_2-2a} > 1. \tag{16}$$

3. *Равновесие, при котором все агенты первой группы гиперактивны, а все агенты второй группы пассивны, устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$pb_1 > 1, \quad pb_2 < 1-2a.$$

4. *Равновесие, при котором все агенты первой группы активны, а все агенты второй группы пассивны, всегда неустойчиво.*
5. *Равновесие, при котором все агенты обеих групп пассивны, устойчиво.*
6. *Равновесие, при котором все агенты обеих групп активны, всегда неустойчиво.*

Доказательство. 1. Согласно уравнению (4)

$$D_1V(k_1,K)|_{k_1=e} = b_1(p+q)e - e, \; D_1V(k_2,K)|_{k_2=e} = b_2(p+q)e - e.$$

Обе производные положительны тогда и только тогда, когда выполнено условие (15).

2. Согласно равенствам (4) и (5)

$$D_1V\left(k_1,K\right)|_{k_1=e} = b_1\left(pe + \frac{qe(1-2a-pb_2)}{qb_2-2a}\right)e - e \geqslant 0.$$

Для устойчивости, однако, нужно строгое неравенство. Пусть выполнено условие (16) и $k_1 = e$. Запишем разностное уравнение для любого из агентов второй группы:

$$k_2^{n+1} = \frac{qb_2}{2a}k_2^n + \frac{peb_2}{2a} + \frac{e(2a-1)}{2a}.$$

Для устойчивости решения данного уравнения необходимо и достаточно выполнения условия $qb_2 < 2a$.

3. Согласно равенствам (4) и (6)

$$D_1V\left(k_1,K\right)|_{k_1=e} = pb_1e - e \geqslant 0,$$
$$D_1V\left(k_2,K\right)|_{k_2=0} = e(2a-1) + b_2pe \leqslant 0.$$

Для устойчивости, однако, нужны строгие неравенства.

4. Согласно равенствам (4) и (7)

$$D_1V\left(k_2,K\right)|_{k_2=0} = e(2a-1) + b_2\frac{pe(1-2a)}{pb_1-2a} = \\ = \frac{e(1-2a)(pb_2-pb_1+2a)}{pb_1-2a} \leqslant 0.$$

Для устойчивости необходимо строгое неравенство. Пусть второе неравенство (7) выполняется как строгое. Запишем разностное уравнение для любого из агентов первой группы:

$$k_1^{n+1} = \frac{pb_1}{2a}k_1^n + \frac{e(2a-1)}{2a}.$$

Согласно первому неравенству (7) имеем $pb_1 > 1 > 2a$, поэтому рассматриваемое равновесие неустойчиво.

5. Согласно уравнению (4)

$$D_1V\left(k_1,K\right)|_{k_1=0} = e\left(2a-1\right) < 0,$$
$$D_1V\left(k_2,K\right)|_{k_2=0} = e\left(2a-1\right) < 0.$$

6. Из соотношения (8) следует, что одно из собственных чисел системы (10) по модулю больше единицы: $\lambda = \frac{pb_1+qb_2}{2a} > 1$, поэтому рассматриваемое равновесие неустойчиво. □

Список литературы

1. Jackson M.O. Social and economic networks. — Princeton University Press, 2008.

2. Jackson M.O., Zenou Y. Games on networks // Handbook of Game Theory. — Amsterdam: Elsevier Science, 2014. — Vol. 4. — P. 95—163.

3. Матвеенко В.Д., Королев А.В. Равновесия в сетевой игре с производством и с экстерналиями знаний // Математическая теория игр и ее приложения. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 106—137.

Матвеенко Владимир Дмитриевич
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,

Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `vmatveenko@hse.ru`

Королев Алексей Васильевич
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `danitschi@gmail.com`

Жданова Мария Олеговна
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `dubnitskayamaria@gmail.com`