

УДК 539.3

Т.Н. Гороженинова, А.А. Киченко**T.N. Gorozheninova, A.A. Kichenko**Пермский национальный исследовательский
политехнический университет

Perm National Research Polytechnic University

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНОЙ
КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ В ANSYS MECHANICAL****MODELING OF THE ANISOTROPIC CANTILEVER
UNDER BENDING LOAD IN ANSYS MECHANICAL**

В настоящее время анизотропные, в частности композитные, материалы находят широкое применение в изготовлении различных конструкций. Они используются в авиационной промышленности, протезировании и пр. Некоторые ткани человеческого тела можно моделировать с учетом неоднородности физических свойств в разных направлениях.

Ключевые слова: анизотропия, изгиб балки, ANSYS, композитные материалы.

Now days, anisotropic (composite in particular) materials are widely used in the manufacture of various structures. They are used in the aviation industry, in prosthetics, etc. Some organs of human body can also be modeled according to the heterogeneity of physical properties in different directions.

Keywords: anisotropy, beam bending, ANSYS, composite materials.

На простейшем примере всестороннего сжатия одного конечного элемента видно, что, например, суммарное поле перемещений анизотропного тела в общем несимметрично, в отличие от случая, когда материал тела изотропен. Следовательно, и методы решения таких задач различны.

Поставим задачу линейной теории упругости для анизотропного тела. Коэффициенты тензора упругости задаются при помощи таблицы данных TB,DATA. Предварительно укажем, что материал анизотропен и следует обобщенному закону Гука командой TB,ANEL [1, 2].

Наиболее интересным случаем однородного нагружения является изгиб, так как нагрузка в виде момента в ANSYS для трех- и двумерного случаев не определена.

Для начала рассмотрим чистый изгиб плоской балки. Пусть оси декартовой системы координат располагаются на противоположном от заделки конце в центре так, чтобы ось z проходила вдоль наиболее длинной части балки. Заменим момент распределенной нагрузкой так, чтобы волокна, расположенные выше средней линии, растягивались, а нижние – сжимались.

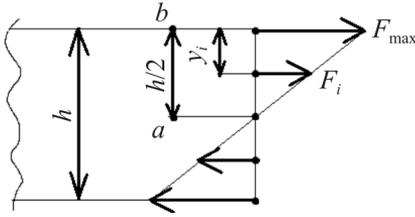


Рис. 1. Задание момента

Возьмем на границе балки точку $a(x, y)$ и точку $b(x, y)$ (рис. 1). Запишем уравнение прямой, единственным образом проходящей через две точки:

$$\frac{y - y_a}{y_b - y_a} = \frac{F - F_a}{F_b - F_a}. \quad (1)$$

На рис. 1 видно, что нагрузка достигает своего максимального значения на краях балки, а минимального – в центре, тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{y - 0}{h/2 - 0} = \frac{F - 0}{F_{\max} - 0}.$$

Отсюда следует, что сила, приходящаяся на один узел, равняется

$$F_i = \frac{2y_i}{h} F_{\max}. \quad (2)$$

Из определения момента получим следующую зависимость:

$$M = yF = \sum_{i=1}^n y_i F_i, \quad (3)$$

где n – количество узлов вдоль оси y .

Учитывая (2) и (3), получим значение максимальной нагрузки:

$$F_{\max} = \frac{Mh}{2} \sum_{i=1}^n y_i^{-2}.$$

Результат легко обобщить для трехмерного случая (рис. 2). Вдоль новой оси x на каждый узел приходится нагрузка, равная F_i [3].

Известны соотношения для определения напряженно-деформированного состояния консоли, нагруженной изгибающим моментом на конце, вдоль координат [4]. Здесь рассмотрим только некоторые из них:

$$U_y = \frac{M}{2I_x} \left[-c_{1133}x^2 + c_{2233}y^2 - c_{3333}(l-z)^2 + c_{3355}x(l-z) \right], \quad (4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{M}{I_x} c_{1133}, \quad (5)$$

$$\sigma_z = \frac{M}{I_x} y; \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0. \quad (6)$$

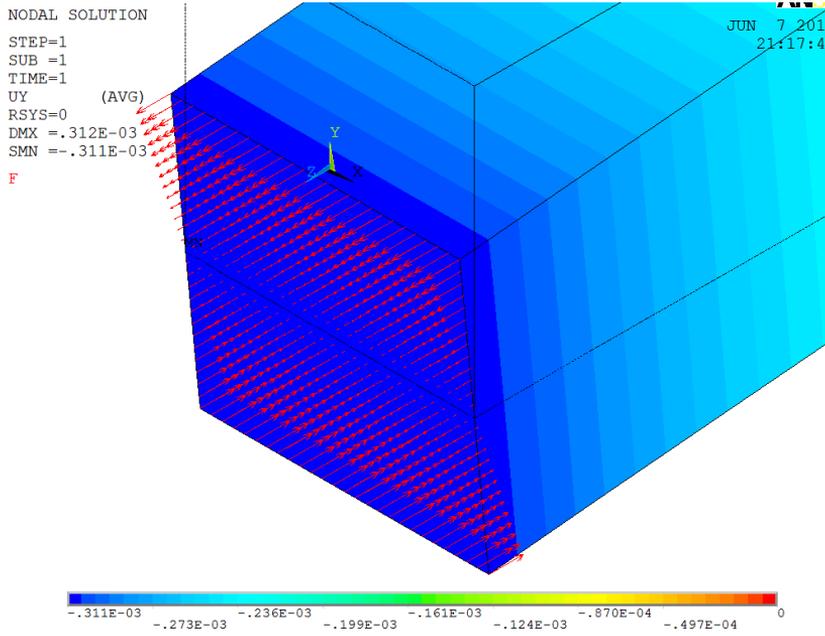


Рис. 2. График перемещений узлов вдоль оси y на сетке из конечных элементов Solid 185

Найдем значение прогиба в точке $(0, 0, 0)$:

$$U_y = y = -\frac{M}{2I_x s_{3333}} l^2.$$

Покажем, что такое же значение при $s_{3333} = E$ достигается на конце изотропной консоли (рис. 3):

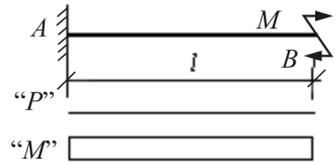


Рис. 3. Схема балки

$$y'' = \frac{M}{EI_x}; \quad y' = \theta = \int \frac{M}{EI_x} = \frac{M}{EI_x} z + C_1,$$

$$y = \omega = \frac{Mz^2}{2EI_x} + C_1 z + C_2,$$

$$\begin{cases} \theta|_{z=0} = 0 \\ \omega|_{z=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

$$y|_{z=l} = -\frac{Ml^2}{2EI_x}.$$

Получим численное решение для консольной балки с квадратным поперечным сечением.

Исследуем изгиб средней линии балки (рис. 4). Сравним полученное решение с аналитическими соотношениями (4)–(6). Для этого построим графики относительной погрешности решения (рис. 5–7). Видно, что места приложения точечных нагрузок при малой дискретизации сетки (деление на малую площадь), а также острые и прямые углы (задача Фламана) являются концентраторами напряжений. Исходя из принципа Сен-Венана в сечениях, отдаленных от мест приложения нагрузок, неравномерность распределения напряжений исчезает [5].

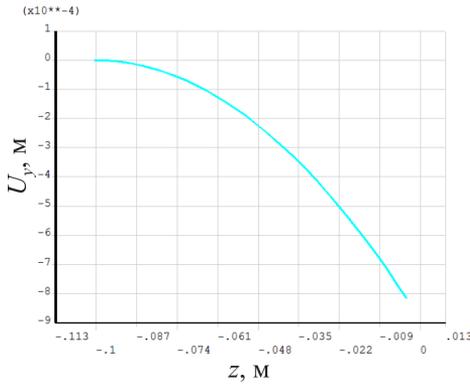


Рис. 4. Прогиб средней линии балки

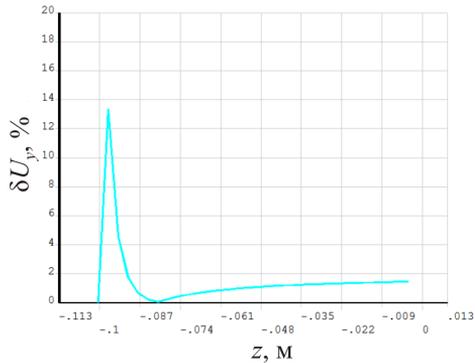


Рис. 5. Относительная погрешность по перемещениям вдоль оси u

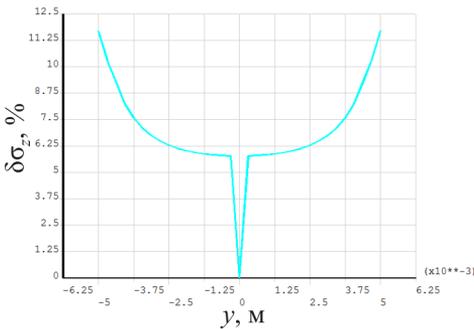


Рис. 6. Относительная погрешность по напряжениям для сечений, перпендикулярных оси z

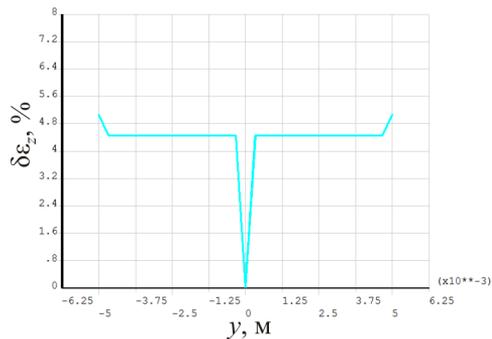


Рис. 7. Относительная погрешность по деформациям для сечений, перпендикулярных оси z

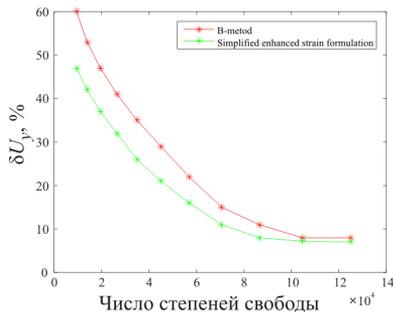


Рис. 8. Сходимость численного решения

Решим поставленную задачу на разных конечно-элементных сетках. Сравним результаты для прогиба (рис. 8).

Видно, что при увеличении разбиения сетки численное решение, полученное двумя методами, стремится к аналитическому.

Список литературы

1. Колюхов А.В. Основы анализа конструкций в ANSYS. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2001. – 102 с.
2. Gray P. Anisotropic axisymmetric FEM. – URL: <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/AFEM.projects.d/AFEM.projects.2006.d/AFEM.pr.06.GK.d/GrayKaila.report.pdf> (дата обращения: 11.04.2017).
3. Bending moment loading of a cantilever beam / University of Connecticut Department of Engineering. – URL: http://www.engr.uconn.edu/~cassenti/AnsysTutorial/Module%201_APDL/Module%201_8_3D%20Moment%20Load.pdf (дата обращения: 11.04.2017).
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
5. Хан Х. Теория упругости: основы линейной теории и ее применения / пер. с нем. – М.: Мир, 1988. – 344 с.

Получено 14.04.2017

Гороженинова Татьяна Николаевна – магистрант кафедры «Теоретическая механика и биомеханика», факультет прикладной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, e-mail: gorogeninova@gmail.com.

Киченко Александр Александрович – старший преподаватель кафедры «Теоретическая механика и биомеханика», факультет прикладной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, e-mail: kichenko.alex@yandex.ru.