



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.10

УДК 539.3

## ДИНАМИЧЕСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПРЯМОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ КРУГЛОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ

Д.А. Шляхин

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 26 ноября 2016 г.

Принята: 15 марта 2017 г.

Опубликована: 30 марта 2017 г.

#### Ключевые слова:

биморфная пластина,  
задача прямого пьезоэффекта,  
теория электроупругости,  
динамическая нагрузка,  
конечные интегральные  
преобразования

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается динамическая осесимметричная задача для круглой биморфной конструкции, состоящей из металлической подложки и пьезокерамической аксиально поляризованной пластины. Ее изгибные колебания осуществляются за счет действия на торцевой поверхности механической нагрузки (нормальных напряжений), являющейся произвольной функцией радиальной координаты и времени. Учитывается жесткое и шарнирное закрепление цилиндрической поверхности пластины. Исходные расчетные соотношения сформулированы для пьезокерамического материала с гексагональной кристаллической решеткой класса 6 mm. Для решения задачи теории электроупругости в трехмерной постановке используются конечные интегральные преобразования Ханкеля по аксиальной координате и обобщенное преобразование (КИП) по радиальной переменной. При этом на каждом этапе решения проводится процедура стандартизации, которая позволяет реализовать соответствующий алгоритм преобразования. В первом случае краевые условия представляются в смешанной форме, а во втором приводятся к однородным путем введения вспомогательных функций. Данный подход позволяет получить точные, в рамках используемых моделей, расчетные соотношения в наиболее общем виде.

Построенное замкнутое решение позволяет определить частотный спектр собственных осесимметричных колебаний, напряженно-деформированное состояние и характер изменения индуцируемого электрического поля биморфной пластины. Это дает возможность на основании анализа связанности электрических и механических полей напряжений научно обосновать конструктивные решения проектируемых приборов, определить способ фиксации электрического сигнала, подобрать все геометрические, а также физические характеристики типовых элементов пьезокерамических преобразователей.

Разработанный алгоритм решения позволяет также решать задачи теории упругости и электроупругости для круглых толстых и тонких пластин с произвольным количеством слоев при наиболее общих условиях загрузки без использования кинематических гипотез.

© ПНИПУ

© Шляхин Дмитрий Аверкиевич – доктор технических наук, доцент, e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Dmitry A. Shlyakhin – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

## DYNAMIC AXISYMMETRIC PROBLEM OF A DIRECT PIEZOEFFECT FOR A ROUND BIMORPH PLATE

D.A. Shlyakhin

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 26 November 2016

Accepted: 15 March 2017

Published: 30 March 2017

#### Keywords:

bimorph plate, direct piezoelectric effect, theory of electro-elasticity, dynamic load, finite integral transformations.

### ABSTRACT

The dynamic axisymmetric problem for a round bimorph structure consisting of the metal substrate and the axially polarized piezoceramic plate is considered. Its bending modes are caused by the action of the mechanical loading (normal tension) on the side surface; the loading is a function of the radial coordinate and time. The rigid and hinge supports of the plate are considered. The initial design relations are formulated for the piezoceramic material with the hexagonal crystal lattice of the 6 mm class. In order to solve the problem of the theory of electrodynamics in a three-dimensional formulation, the finite integral Hankel transformations along the axial coordinate and a generalized transformation (FIT) over the radial variable is used. At each stage, the standardization is carried out which allows implementing an appropriate transformation algorithm. In the first case the boundary conditions are presented in a mixed form; and in the second case they are homogeneous by introducing auxiliary functions. This approach allows gaining precise (within the used models) calculated ratios in a most general form.

The built closed solution allows defining the frequency range of the axisymmetric oscillations, the stress–strain state and the nature of the changing induced electric field of the bimorph plate. This makes it possible to establish the conventional solutions of the designed devices, determine a way of fixing the electrical signal, pick up all the geometrical and physical characteristics of the typical elements of the piezoceramic transducers

Also, the developed solution allows solving the problems of the elasticity and electroelasticity theory for circular thick and thin plates with an arbitrary number of layers under most general loading conditions without the use of kinematic hypotheses.

© PNRPU

---

## Введение

В различных технических устройствах используются пьезокерамические датчики в виде тонких биморфных пластин [1–8]. Как правило, они состоят из двух жестко соединенных круглых пьезокерамических пластин с противоположной или параллельной направленностью вектора поляризации. Для повышения механической прочности в рассматриваемой конструкции применяется металлическая подложка [9, 10].

Расчет пьезокерамических многослойных конструкций в основном выполняется с помощью прикладных теорий для тонких пластин [11–13], в которых кинематические гипотезы дополняются аналогичными допущениями о характере изменения электрического поля [14–21]. Для более полного учета связанности физических полей в многослойных пьезокерамических пластинах в работах [22, 23] было проведено исследование и получено замкнутое решение нестационарной задачи обратного пьезоэффекта в трехмерной постановке. На основании численных результатов сделан вывод, что при аксиальной поляризации материала напряженность электрического поля по высоте тонкой пластины изменяется по линейному закону. Кроме того, установлено, что при использовании сплошного электродного покрытия касательными напряжениями, возникающими в конструкции, можно пренебречь.

В настоящей работе рассматривается нестационарная задача прямого пьезоэффекта для асимметричной (отсутствует симметрия физических свойств материала относительно нейтральной плоскости) сплошной биморфной пластины с жестким, а также шарнирным закреплением ее цилиндрической поверхности.

### 1. Постановка задачи

Пусть круглая двухслойная пластина, занимающая в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  область  $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$ , состоит из пьезокерамического элемента высотой  $h_1^*$ , выполненного из аксиально поляризованного (электроупругого) материала с гексагональной кристаллической решеткой класса 6mm, и металлической (упругой) заземленной подложки толщиной  $h_2^*$  ( $h^* = h_1^* + h_2^*$ ). Изгибные осесимметричные колебания возбуждаются за счет действия на лицевой поверхности конструкции ( $z_* = 0$ ) механической динамической нагрузки (нормальных напряжений)  $q^*(r_*, t_*)$ , являющейся произвольной функцией радиальной координаты  $r_*$  и времени  $t_*$  (рис. 1). Подключение электродов к измерительному прибору позволяет зафиксировать величину и форму электрического напряжения  $V^*(t_*)$ . Рассматриваются случаи жесткого, а также шарнирного закрепления цилиндрической поверхности конструкции.

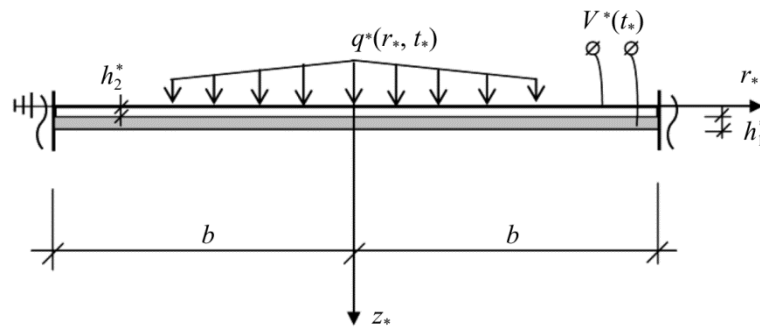


Рис. 1. Биморфная пластина  
Fig. 1. Bimorph plate

Дифференциальные уравнения движения и электростатики в цилиндрической системе координат и безразмерной форме имеют следующий вид [24, 25]\*:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial}{\partial z} \nabla U + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \frac{\partial}{\partial z} \nabla U + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

\* При исследовании упругой среды ( $s = 1$ ) система (1.1) состоит только из уравнений движения, сформулированных относительно компонент вектора перемещений.

Граничные условия на цилиндрической поверхности определяются равенствами

$$r = 0,1 \quad W(0, z, t) < \infty, \quad U(0, z, t) < \infty, \quad \varphi(0, z, t) < \infty, \quad (1.2)$$

$$D_{r|r=1} = -\frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0;$$

жесткое защемление

$$W(1, z, t) = 0, \quad U(1, z, t) = 0; \quad (1.3)$$

шарнирное закрепление

$$W(1, z, t) = 0, \quad \sigma_{rr|r=1} = \frac{C_{11}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{C_{12}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{U}{r} + \frac{C_{13}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{e_{31}}{e_{33}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.4)$$

Первые три неравенства (1.2) являются условиями регулярности решения для сплошной пластины, а последнее учитывает отсутствие электродного покрытия.

Граничные условия по аксиальной координате формулируются следующим образом:

$$z = 0 \quad \sigma_{zz} = \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} = q, \quad \sigma_{rz} = \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0; \quad (1.5)$$

$$z = h_2 \quad \left( \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{|z+0} = \left( \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{|z-0}; \quad (1.6)$$

$$\left[ \frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{|z+0} = \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|z-0};$$

$$U(z+0) = U(z-0), \quad W(z+0) = W(z-0), \quad \varphi(z+0) = 0;$$

$$z = h \quad \sigma_{zz} = \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (1.7)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad D_z = -\frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{e_{31}}{e_{33}} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Равенства (1.6) являются условиями совместности напряжений, деформаций и заземления подложки. Кроме того, последнее равенство (1.7) учитывает подключение электродированной поверхности пьезокерамической пластины к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, что соответствует режиму «холостого хода» (отсутствию свободных электрических зарядов).

Начальные условия задаются в общем виде и позволяют определить состояние пластины в момент приложения нагрузки:

$$t = 0 \quad U(r, z, 0) = U_0(r, z), \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_0(r, z), \quad (1.8)$$

$$W(r, z, 0) = W_0(r, z), \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r, z).$$

Перевод размерных функций и переменных в безразмерные величины производится по формулам

$$\{U, W, U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0, r, z, h, h_1, h_2\} = \{U^*, W^*, U_0^*, \dot{U}_0^*, W_0^*, \dot{W}_0^*, r_*, z_*, h^*, h_1^*, h_2^*\} / b,$$

$$q = \frac{q^*}{C_{11}^{(1)}}, \quad \varphi(r, z, t) = \varphi^*(r, z, t) \cdot e_{33} / (b C_{11}^{(1)}), \quad t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{11}^{(2)} / \rho^{(2)}}.$$

В равенствах (1.1)–(1.8) приняты следующие обозначения:  $U^*(r_*, z_*, t_*)$ ,  $W^*(r_*, z_*, t_*)$ ,  $\sigma_{pm}(r_*, z_*, t_*)$  – компоненты вектора перемещений и тензора напряжений ( $p, m = r, z$ );  $D_r(r_*, z_*, t_*)$ ,  $D_z(r_*, z_*, t_*)$ ,  $\varphi^*(r_*, z_*, t_*)$  – компоненты вектора индукции и потенциал электрического поля;  $e_{mk}$ ,  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{33}$  – пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости электроупругого материала ( $m, k = \overline{1, 5}$ );  $\rho^{(s)}$ ,  $C_{mk}^{(s)}$  – объемная плотность, модули упругости электроупругого ( $s = 1$ ) и упругого ( $s = 2$ ) материалов;  $U_0^*$ ,  $\dot{U}_0^*$ ,  $W_0^*$ ,  $\dot{W}_0^*$  – известные в начальный момент времени перемещения, скорости перемещений;  $\Phi^{(1)} = \frac{C_{11}^{(2)} \rho^{(1)}}{C_{11}^{(1)} \rho^{(2)}}$ ,

$$\Phi^{(2)} = 1, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

Соотношения (1.1)–(1.8) представляют математическую формулировку рассматриваемой краевой задачи электроупругости.

## 2. Построение общего решения

На первом этапе решения краевой задачи (1.1)–(1.8) используется метод конечных интегральных преобразований Ханкеля по радиальной координате  $r$  [26]. При этом данное преобразование позволяет удовлетворить только смешанные граничные условия.

Для выполнения данного требования необходимо:

– для жесткого закрепления первое равенство (1.3) заменить на условие отсутствия на цилиндрических поверхностях пластины ( $r = 1$ ) касательных напряжений:

$$\sigma_{rz|_{r=1}} = \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \tag{2.1}$$

– для шарнирного закрепления последнее соотношение (1.2) заменить условием наличия потенциала электрического поля  $\varphi_1(z, t)$  на цилиндрической поверхности при  $r = 1$ :

$$\varphi(1, z, t) = \varphi_1(z, t). \tag{2.2}$$

Кроме того, вводятся новые функции  $u(r, z, t)$ ,  $w(r, z, t)$ ,  $\varphi(r, z, t)$ , связанные с  $U(r, z, t)$ ,  $W(r, z, t)$ ,  $\varphi(r, z, t)$  соотношениями

$$U(r, z, t) = N_1(r, z, t)H(z - h_2) + N_2(r, t) + u(r, z, t), \tag{2.3}$$

$$W(r, z, t) = P_1(t) + w(r, z, t), \quad \varphi(r, z, t) = \varphi_1(z, t) + \varphi(r, z, t),$$

$$N_1(r, z, t) = -\frac{e_{31}}{2e_{33}} \frac{\partial \varphi_1(z, t)}{\partial z} r \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=h_2} = 0, \varphi_1 \Big|_{z=h_2} = 0 \right), N_2(r, t) = (r^2 - r)q(r, t).$$

Здесь  $H(\dots)$  – единичная функция Хэвисайда [27];  $P_1(t), \varphi_1(z, t)$  – неизвестные функции, определяемые в процессе решения задачи соответственно из условий отсутствия вертикальных перемещений цилиндрической поверхности ( $r = 1$ ) пластины при  $z = 0$  (первое равенство (1.3)) и радиальной компоненты вектора индукции электрического поля при  $r = 1$  (последнее равенство (1.2)).

В результате подстановки (2.3) в (1.1)–(1.8), (2.1), (2.2) получаем новую краевую задачу относительно функций  $u, w, \varphi$ . При этом дифференциальные уравнения (1.1), первое условие (1.5), первые два условия (1.6) и равенства (1.7) становятся неоднородными с правыми частями  $R_1 \div R_3, B_1 \div B_6$ , а начальные условия  $U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0$  следует заменить на  $u_0, \dot{u}_0, w_0, \dot{w}_0$ :

$$R_1 = -\left[ \frac{\partial}{\partial r} \nabla + \frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Phi^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] N_1 H(z - h_2) - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \nabla U - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] N_2,$$

$$R_2 = \left[ \frac{(C_{13}^{(1)} + C_{55}^{(1)})e_{31}}{C_{11}^{(1)}e_{33}} + \frac{C_{11}^{(1)}\epsilon_{33} + (e_{31} + e_{15})e_{31}}{e_{33}^2} + 1 \right] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} H(z - h_2) + \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2},$$

$$R_3 = \frac{C_{11}^{(1)}\epsilon_{33} + (e_{31} + e_{15})e_{31}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} H(z - h_2), B_1 = \left[ 1 - \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}}(3r - 2) \right] q,$$

$$B_2 = \frac{C_{13}^{(2)} - C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}}(3r - 2)q - \left( 1 - \frac{C_{13}^{(1)}e_{31}}{C_{11}^{(1)}e_{33}} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, B_3 = B_5 = \frac{C_{55}^{(1)}e_{31}}{2C_{11}^{(1)}e_{33}} r \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2},$$

$$B_4 = -\frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}}(3r - 2)q, B_6 = \frac{C_{11}^{(1)}\epsilon_{33} + e_{31}^2}{e_{33}^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{e_{31}}{e_{33}}(3r - 2)q, w_0 = W_0 - P_1 \Big|_{t=0},$$

$$\dot{w}_0 = \dot{W}_0 - \dot{P}_1 \Big|_{t=0}, u_0 = U_0 - [N_1 H(z - h_2) + N_2] \Big|_{t=0}, \dot{u}_0 = \dot{U}_0 - [\dot{N}_1 H(z - h_2) + \dot{N}_2] \Big|_{t=0},$$

а краевые условия (1.2)–(1.4) принимают следующий вид:

– жесткое закрепление

$$U(1, z, t) = 0, \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{z=1} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{z=1} = 0; \tag{2.4}$$

– шарнирное закрепление

$$W(1, z, t) = 0, \varphi(1, z, t) = 0, \nabla U \Big|_{r=1} = 0. \tag{2.5}$$

Здесь следует отметить, что в отличие от классической постановки задач теории упругости в настоящем исследовании «жесткое» закрепление (2.4) характеризуется также отсутствием угла поворота. Кроме того, последнее условие (2.5) получается при  $C_{11}^{(s)} = C_{12}^{(s)}$ . Только в этом случае, в дальнейшем, дополнительные внеинтегральные члены в первом трансформированном уравнении (1.1) равны нулю.

Применяем к краевой задаче (1.1)–(1.8), (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) относительно функций  $u, w, \varphi$  конечные интегральные преобразования Ханкеля, используя следующие трансформанты:

$$u_H(j_n, z, t) = \int_0^1 u(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad (2.6)$$

$$\{w_H(j_n, z, t), \varphi_H(j_n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), \varphi(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr,$$

и формулы обращения

$$u(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(j_n, z, t)}{S(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (2.7)$$

$$\{w(r, z, t), \varphi(r, z, t)\} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{w_H(j_n, z, t), \varphi_H(j_n, z, t)\}}{S(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

где  $j_n$  – положительные нули функций  $J_1(j_n)$ ,  $J_0(j_n)$  соответственно при жестком и шарнирном закреплении пластины, расположенные в порядке их возрастания ( $n = \overline{0, \infty}$ ;  $j_0 = 0$ );  $S(j_n) = J_0(j_n)$  при жестком и  $S(j_n) = J_1(j_n)$  при шарнирном закреплении.

В пространстве изображений получаем новую краевую задачу:

$$-j_n^2 u_H + \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 u_H}{dz^2} - \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{dw_H}{dz} - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{d\varphi_H}{dz} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} = R_{1H}, \quad (2.8)$$

$$-\frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} j_n^2 w_H + \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 w_H}{dz^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{du_H}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 \varphi_H + \frac{d^2 \varphi_H}{dz^2} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = R_{2H},$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{du_H}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 w_H + \frac{d^2 w_H}{dz^2} + \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 \varphi_H - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{d^2 \varphi_H}{dz^2} = R_{3H};$$

$$z = 0 \quad \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} j_n u_H + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial w_H}{\partial z} = B_{1H}, \quad \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left( \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) = 0; \quad (2.9)$$

$$z = h_2 \quad \frac{C_{13}^{(1)} - C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} j_n u_H + \frac{C_{33}^{(1)} - C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial w_H}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} = B_{2H}, \quad (2.10)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)} - C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left( \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n \varphi_H = B_{3H},$$

$$u_H(z+0) - u_H(z-0) = 0, \quad w_H(z+0) - w_H(z-0) = 0, \quad \varphi_H = 0;$$

$$z = h \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n u_H + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial w_H}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} = B_{4H}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left( \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n \varphi_H = B_{5H}, \quad \frac{e_{31}}{e_{33}} j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} = B_{6H}; \\
 t = 0 \quad & u(j_n, z, 0) = u_{0H}(j_n, z), \quad \dot{u}(j_n, z, 0) = \dot{u}_{0H}(j_n, z), \\
 & w_H(j_n, z, 0) = w_{0H}(j_n, z), \quad \dot{w}_H(j_n, z, 0) = \dot{w}_{0H}(j_n, z).
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

где  $\{R_{1H}, B_{3H}, B_{5H}\} = \int_0^1 \{R_1, B_3, B_5\} r J_1(j_n r) dr$ ,  $\{R_{2H}, R_{3H}, B_{1H}, B_{2H}, B_{4H}, B_{6H}\} = \int_0^1 \{R_2, R_3, B_1, B_2, B_4, B_6\} r J_0(j_n r) dr$ .

На втором этапе решения используется обобщенный метод конечных интегральных преобразований (КИП) [28] по координате  $z$ . Предварительно выполняется процедура стандартизации, связанная с приведением граничных условий (2.9)–(2.11) к однородным, с помощью следующих разложений:

$$\begin{aligned}
 u_H(j_n, z, t) &= Y_{1H}(z, t) + U_H(j_n, z, t), \\
 w_H(j_n, z, t) &= Y_{2H}(z, t) + W_H(j_n, z, t), \\
 \varphi_H(j_n, z, t) &= Y_{3H}(z, t) + \chi_H(j_n, z, t).
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

В случае жесткого закрепления, принимая во внимание  $\varphi_1 = 0$ ,  $B_{2H} = \frac{C_{13}^{(1)} - C_{13}^{(2)}}{C_{13}^{(1)}} B_{1H}$ ,  $B_{4H} = \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{13}^{(2)}} B_{1H}$ ,  $B_{6H} = \frac{C_{11}^{(1)} e_{31}}{C_{13}^{(2)} e_{33}} B_{1H}$ , имеем

$$Y_{1H} = 0, \quad Y_{2H} = f_1(z) B_{1H} [1 - H(z - h_2)] + f_2(z) B_{1H} H(z - h_2), \quad Y_{3H} = f_3(z) B_{1H} H(z - h_2),$$

а при шарнирном закреплении, с учетом  $P_1 = N_2 = 0$ , получаем

$$\begin{aligned}
 Y_{1H} &= f_1(z) B_{1H} [1 - H(z - h_2)] + f_2(z) B_{3H} H(z - h_2), \\
 Y_{2H} &= f_3(z) B_{6H} H(z - h_2), \quad Y_{3H} = f_4(z) B_{6H} H(z - h_2).
 \end{aligned}$$

В результате подстановки (2.13) в (2.8)–(2.12), при учете соотношений: при жестком закреплении

$$f'_1(0) = f'_1(h_2) = \frac{C_{11}^{(1)}}{C_{33}^{(2)}}, \tag{2.14}$$

$$f_1(h_2) = f_2(h_2) = f_3'(h_2) = 0, \quad f_2'(h_2) = A_1, \quad f_2'(h) = A_2, \quad f_3'(h) = A_3,$$

$$n \neq 0: \quad f_1(0) = 0, \quad f_2(h) = 0, \quad f_3(h) = 0,$$

$$A_1 = -\frac{C_{11}^{(1)} C_{13}^{(1)}}{C_{33}^{(1)} C_{13}^{(2)}}, \quad A_2 = \frac{C_{11}^{(1)} (C_{13}^{(1)} \varepsilon_{33} + e_{31} e_{33})}{C_{13}^{(2)} (C_{33}^{(1)} \varepsilon_{33} + e_{33}^2)}, \quad A_3 = \frac{(C_{13}^{(1)} e_{33} - C_{33}^{(1)} e_{31}) e_{33}}{C_{13}^{(2)} (C_{33}^{(1)} \varepsilon_{33} + e_{33}^2)};$$



при шарнирном закреплении

$$f_1(0) = f_1(h_2) = f_1'(h_2) = 0, \quad f_1'(0) = \frac{C_{11}^{(1)}}{C_{33}^{(2)}}, \quad (2.15)$$

$$f_2(h_2) = f_2(h) = 0, \quad f_2'(h_2) = f_2'(h) = \frac{C_{11}^{(1)}}{C_{55}^{(1)}}, \quad f_3'(h) = \frac{e_{33}^2}{C_{33}^{(1)}\epsilon_{33} + e_{33}^2},$$

$$f_4'(h) = -\frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} f_2'(h), \quad f_m(h_2) = f_m'(h_2) = f_m(h) = 0 \quad (m = 1, 2)$$

получаем новую краевую задачу относительно функций  $U_H, W_H, \chi_H$  с однородными граничными условиями по координате  $z$ . Правые части дифференциальных уравнений (2.8) и начальные условия  $u_{0H}, \dot{u}_{0H}, w_{0H}, \dot{w}_{0H}$  заменяются на  $F_{1H} \div F_{3H}, U_{0H}, \dot{U}_{0H}, W_{0H}, \dot{W}_{0H}$ :

$$F_{1H} = R_{1H} + \left[ j_n^2 Y_{1H} - \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 Y_{1H}}{dz^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{dY_{2H}}{dz} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dY_{3H}}{dz} + \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 Y_{1H}}{\partial t^2} \right],$$

$$F_{2H} = R_{2H} + \left[ \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} j_n^2 Y_{2H} - \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 Y_{2H}}{dz^2} - \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{dY_{1H}}{dz} + \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 Y_{3H} - \frac{d^2 Y_{3H}}{dz^2} + \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 Y_{2H}}{\partial t^2} \right],$$

$$F_{3H} = R_{3H} - \left[ \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dY_{1H}}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 Y_{2H} + \frac{d^2 Y_{2H}}{dz^2} + \frac{C_{11}^{(1)} \epsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 Y_{3H} - \frac{C_{11}^{(1)} \epsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{d^2 Y_{3H}}{dz^2} \right],$$

$$U_{0H} = u_{0H}(j_n, z) - Y_{1H}|_{t=0}, \quad \dot{U}_{0H} = \dot{u}_{0H}(j_n, z) - \dot{Y}_{1H}|_{t=0},$$

$$W_{0H} = w_{0H}(j_n, z) - Y_{2H}|_{t=0}, \quad \dot{W}_{0H} = \dot{w}_{0H}(j_n, z) - \dot{Y}_{2H}|_{t=0}.$$

Функции  $f_1(z) \div f_4(z)$ , входящие в разложения (2.13), определяются с помощью следующих равенств:

$$f_m(z) = \sum_{p=1}^k a_p z^{p-1} \quad (m = \overline{1, 4}), \quad (2.16)$$

где  $a_p$  – постоянные;  $k$  – параметр, соответствующий количеству граничных условий для функций  $f_m(z)$ .

Подстановка (2.16) в (2.14), (2.15) позволяет определить функции  $f_m(z)$ :

– жесткое закрепление

$$f_4(z) = 0;$$

$$n = 0 \quad f_1(z) = \frac{C_{11}^{(1)}}{C_{33}^{(2)}}(z - h_2), \quad f_3(z) = \frac{A_3}{2h_1}(z^2 - 2h_2z + h_2^2),$$

$$f_2(z) = (2h_1)^{-1} \{ (A_2 - A_1)z^2 + 2(A_1h - A_2h_2)z + h_2[A_1(h_2 - 2h) + A_2h_2] \};$$

$$n \neq 0 \quad f_1(z) = \frac{C_{11}^{(1)}}{C_{33}^{(2)} h_2^2} (2z^3 - 3h_2 z^2 + h_2^2 z),$$

$$f_2(z) = h_1^{-2} \left\{ (A_1 + A_2) z^3 - [(2A_1 + A_2)h + (A_1 + 2A_2)h_2] z^2 + \right. \\ \left. + [A_1 h^2 + A_2 h_2^2 + 2(A_1 + A_2)hh_2] z - hh_2(A_1 h + A_2 h_2) \right\},$$

$$f_3(z) = \frac{A_3}{h_1^2} [z^3 - (h + 2h_2)z^2 + h_2(2h + h_2)z - hh_2^2];$$

– шарнирное закрепление

$$f_1(z) = \frac{C_{11}^{(1)}}{C_{33}^{(2)} h_2^2} (z^3 - 2h_2 z^2 + h_2^2 z), \quad f_4(z) = -\frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} f_3(z),$$

$$f_2(z) = \frac{C_{11}^{(1)}}{C_{55}^{(1)} h_1^2} [2z^3 - 3(h + h_2)z^2 + (h^2 + h_2^2 + 4hh_2)z - hh_2(h + h_2)],$$

$$f_3(z) = \frac{e_{33}^2}{(C_{33}^{(1)} \varepsilon_{33} + e_{33}^2) h_1^2} (z^3 - (h + 2h_2)z^2 + h_2(2h + h_2)z - hh_2^2).$$

Начально-краевую задачу (2.8)–(2.12) относительно функций  $U_H, W_H, \chi_H$  решаем, используя обобщенный метод конечных интегральных преобразований (КИП) [28] с использованием неизвестных трансформанты  $G(\lambda_{in}, n, t)$  и компонент  $K_1(\lambda_{in}, z)$ ,  $K_2(\lambda_{in}, z)$ ,  $K_3(\lambda_{in}, z)$  вектор-функции ядра преобразования ( $\lambda_{in}$  – положительные параметры, образующие счетное множество ( $i = \overline{1, \infty}$ )).

Общее решение краевой задачи (2.8)–(2.12) для электроупругого ( $s = 1$ ) и упругого ( $s = 2$ ) слоев представлено в работах автора [22, 29, 30].

Здесь следует отметить, что в отличие от стандартной процедуры разложения по собственным функциям [26] метод КИП [28] позволяет в процессе решения динамической задачи определить частоты и формы собственных колебаний конструкции.

Окончательные выражения функций  $U(r, z, t)$ ,  $W(r, z, t)$ ,  $\varphi(r, z, t)$  получим, применяя последовательно формулы обращения КИП [28] и метод конечных преобразований Ханкеля (2.7). В результате с учетом (2.3), (2.13) имеем

$$U(r, z, t) = N_1(r, z, t)H(z - h_2) + N_2(r, t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{S(j_n)^2} \left[ Y_{1H}(z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{1in} \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$W(r, z, t) = P_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{S(j_n)^2} \left[ Y_{2H}(z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{2in} \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (2.17)$$

$$\varphi(r, z, t) = \varphi_1(z, t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{S(j_n)^2} \left[ Y_{3H}(z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{3in} \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

Заключительным этапом исследования является определение неизвестных функций  $P_1(t), \varphi_1(z, t)$ .

В случае жесткого закрепления пластины, когда  $\varphi_1(z, t) = 0$ , функция  $P_1(t)$  определяется из условия отсутствия вертикальных перемещений цилиндрической поверхности пластины при  $z = 0$  и на основании (2.17) принимает вид

$$P_1(t) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{2in}(\lambda_{in}, 0) \|K_{in}\|^{-2}. \quad (2.18)$$

При шарнирном закреплении  $P_1(t) = N_2(z, t) = 0$ . Для упрощения расчета функция  $\varphi_1(z, t)$  определяется из условия равенства нулю суммарного значения тока смещения на цилиндрической поверхности пьезокерамической пластины  $\int_{h_2}^h D_{r|r=1} dz = 0$ . Для этого представляем ее в виде следующего многочлена:

$$\varphi_1(z, t) = A_0 (z^2 - 2h_2z + h_2^2) \int_0^1 q(r, t) r dr. \quad (2.19)$$

Данное выражение учитывает условия неразрывности деформаций  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}|_{z=h_2} = 0$  и заземление металлической подложки  $\varphi_1|_{z=h_2} = 0$ . Постоянная  $A_0$  определяется при удовлетворении условия

$$\int_{h_2}^h \left[ \frac{e_{15}}{e_{33}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \Big|_{r=1} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=1} \right] dz = 0. \quad (2.20)$$

### 3. Численные результаты. Выводы

В качестве примера рассматривается биморфная пластина, имеющая следующие физические и геометрические характеристики аксиально поляризованных пьезокерамических пластин состава ЦТС-19 [24] и металлической стальной подложки:

$$\begin{aligned} \{C_{11}^{(1)}, C_{33}^{(1)}, C_{12}^{(1)}, C_{13}^{(1)}, C_{55}^{(1)}\} &= \{10.9, 9.1, 6.1, 5.4, 2.4\} \times 10^{10} \text{ Н/м}^2, \{e_{31}, e_{33}, e_{15}\} = \\ &= \{-4.9, 14.9, 10.6\} \text{ Кл/м}^2, \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{7.73, 7.26\} \times 10^{-9} \text{ Ф/м}, \rho^{(1)} = 7730 \text{ кг/м}^3, \\ \{C_{11}^{(2)}, C_{33}^{(2)}, C_{12}^{(2)}, C_{13}^{(2)}, C_{55}^{(2)}\} &= \{21, 21, 2, 2, 9.3\} \times 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ \rho^{(2)} &= 7800 \text{ кг/м}^3, h_2^* = 0,5 \times 10^{-3} \text{ м}, b = 3 \times 10^{-2} \text{ м}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай действия равномерно-распределенной гармонической нагрузки

$$q(r, t) = q(t) = q_0 \sin(\omega t),$$

где  $q_0$  – амплитудное значение интенсивности в безразмерной форме;  $\omega$  – относительная частота вынужденных колебаний ( $\omega = \omega^* b \sqrt{\rho^{(2)} / C_{11}^{(2)}}$ ,  $\omega^*$  – круговая частота вынужденных колебаний).

На рис. 2–4 изображены графики, характеризующие изменение напряженно-деформированного состояния и характер распределения электрического поля в рассматриваемой конструкции при  $\omega = \lambda_{11} / 5$  ( $\lambda_{11}$  – положительный параметр, соответствующий первой частоте собственных колебаний). Их анализ позволяет сделать следующие выводы.

1) При жестком закреплении конструкции на лицевой поверхности пьезокерамической пластины одновременно образуются зоны растяжения и сжатия, что приводит к появлению электрических зарядов разных знаков. Поэтому использование сплошного металлического покрытия нецелесообразно в связи с индукцией на электроде электрического потенциала небольшой величины. Для решения данной проблемы, когда частота внешнего воздействия  $\omega < \lambda_{11}$ , для регистрации разности потенциалов  $V(t)$  необходимо использовать два разрезных круговых электрода (радиус  $R$  раздела электродов определяет нулевое значение функции  $J_0(j_1 r)$ ,  $R = 0,63$ ). Подключение электродов к измерительному прибору позволяет определить  $V(t)$ :

$$V(t) = 2 \left[ \int_0^R \varphi(r, h, t) r dr - \int_R^1 \varphi(r, h, t) r dr \right].$$

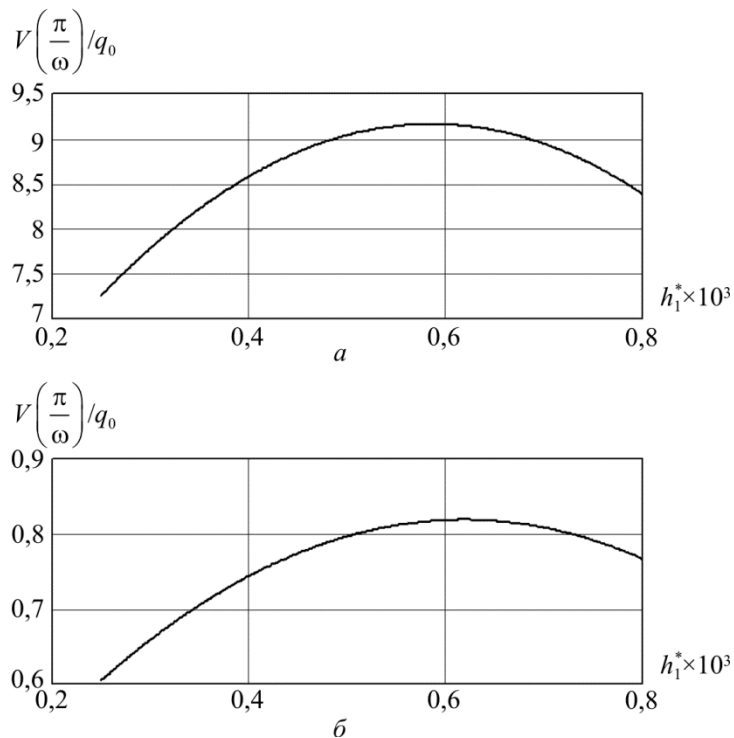


Рис. 2. Зависимость амплитудных значений  $V\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  от толщины пьезокерамической

пластины  $h_1^*$ :  $a$  – шарнирное закрепление;  $b$  – жесткое защемление

Fig. 2. The dependence of the amplitude values of the thickness of the piezoceramic plate:  $a$  – securing hinge;  $b$  – hard pinching

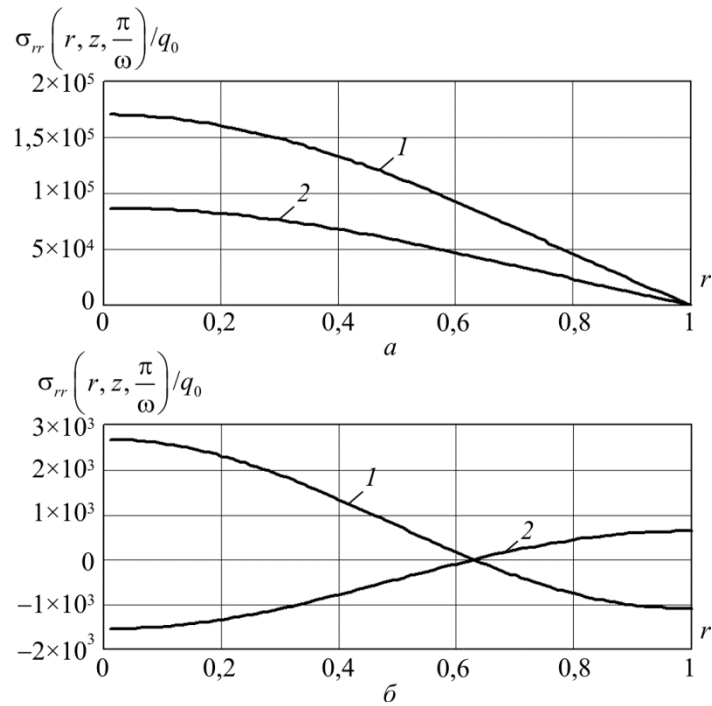


Рис. 3. Изменение амплитудных значений  $\sigma_{rr}\left(r, z, \frac{\pi}{\omega}\right)$  по радиальной координате ( $1-z=0, 2-z=h$ ): *a* – шарнирное закрепление; *b* – жесткое защемление  
 Fig. 3. The change in the peak values of the radial coordinate ( $1-z=0, 2-z=h$ ): *a* – securing hinge; *b* – hard pinching

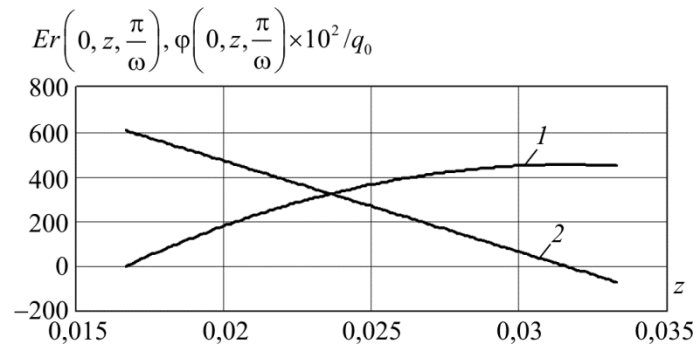


Рис.4. Изменение амплитудных значений  $\varphi\left(0, z, \frac{\pi}{\omega}\right)-1, E_z\left(0, z, \frac{\pi}{\omega}\right)-2,$  по высоте пьезокерамической пластины (шарнирное закрепление)  
 Fig. 4. The change in amplitude values, the height of the piezoceramic plate (hinge fixing)

При шарнирном закреплении пластины разность потенциалов  $V(t)$  между электродированными поверхностями пьезокерамических пластин (в данном случае одна плоскость заземлена) определяется равенством

$$V(t) = 2 \int_0^1 \varphi(r, h, t) r dr.$$

2) Для конструкции с заданной толщиной подложки можно определить оптимальную высоту пьезокерамической пластины, позволяющей наиболее эффективно преобразовать

внешнее механическое воздействие в индуцируемый электрический сигнал. На рис. 2 показаны графики изменения амплитудных значений разности потенциалов  $V\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  для различной толщины пьезокерамической пластины. В данном случае для металлической подложки толщиной  $h_2^* = 0,5 \times 10^{-3}$  м необходимо использовать пьезокерамическую пластину высотой  $h_1^* = 0,6 \times 10^{-3}$  м.

3) Амплитудные значения электрического импульса  $V\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  при шарнирном закреплении пластины существенно больше, чем в случае жесткого защемления ее контура (см. рис. 2, а, б). Однако шарнирное закрепление характеризуется также большими нормальными механическими напряжениями  $\sigma_{rr}$  в центре пластины (см. рис. 3, а,  $1-z=0$ ,  $2-z=h$ ). Данная особенность вводит ограничения на величину интенсивности нагрузки  $q_0$ .

При жестком защемлении контура пластины величина  $\sigma_{rr}$  значительно меньше (см. рис. 3, б) ( $\sigma_{rr} = 0$  при  $r = R$ ), что приводит к увеличению диапазона изменения интенсивности нагрузки  $q_0$ .

4) Амплитудное значение потенциала электрического поля  $\varphi\left(0, z, \frac{\pi}{\omega}\right)$  по высоте пьезокерамической пластины при разных случаях закрепления изменяется по параболической зависимости (рис. 4, кривая 1, шарнирное закрепление), соответственно график, описывающий изменение аксиальной компоненты вектора напряженности  $E_z\left(0, z, \frac{\pi}{\omega}\right)$ , представляет прямую линию (см. рис. 4, 2). Аналогичная картина наблюдается при анализе биморфных пластин в задачах обратного пьезоэффекта [22].

В заключение отметим, что разработанный в настоящей работе алгоритм расчета позволяет исследовать биморфные конструкции с произвольным количеством упругих и электроупругих слоев.

### Библиографический список

1. Piezoelectric bimorph bending sensor for shear-stress measurement in fluid flow / D. Roche, C. Richard, L. Eyraud, C. Audoly // *Sensors and Actuators*. – 1996. – Vol. 55. – P. 157–162.
2. Yoo J.H., Hong J.I., Cao W. Piezoelectric ceramic bimorph coupled to thin metal plate as cooling fan for electronic devices // *Sensors and Actuators*. – 2000. – Vol. 79. – P. 8–12.
3. Sharapov V. Piezoceramic sensors. – Springer Verlag, 2010. – 498 p.
4. Jurenas V., Bansevicius R., Navickaite S. Piezoelectric bimorphs for laser shutter systems: optimization of dynamic characteristics // *Mechanika*. – Kaunas: Technologija, 2010. – No. 5(85). – P. 44–47.
5. Seung-Bok Choi, Young-Min Han. Piezoelectric actuators: control applications of smart materials. – N.-Y.: CRC Press, 2010. – 280 p.
6. Шарапов В., Сотула Ж. Пьезокерамические преобразователи. Новые технологии проектирования // *Электроника:НТБ*. – 2012. – № 5. – С. 96–102.
7. Ультразвуковые колебательные системы для синтеза полимерных композиционных материалов / Д.А. Негров, Е.Н. Еремин, А.А. Новиков, Л.А. Шестель. – Омск: Изд-во Омск. гос. техн. ун-та, 2012. – 128 с.

8. Шикина В. Е. Расчет частоты колебаний пьезокерамического первичного преобразователя для массового расходомера жидкостей // Изв. высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. –2014. – № 1 (29). – С. 54–63.
9. Ивина Н.Ф., Тагильцев А.А. Анализ собственных колебаний дисковых изгибных пьезопреобразователей с произвольным соотношением размеров [Электронный ресурс] // Электронный журнал «Техническая акустика». – 2005. – № 2. – С. 1–9. – URL: <http://webcenter.ru/eeaa/ejta>.
10. Янчевский И.В. Минимизация прогибов электроупругой биморфной пластины при импульсном нагружении // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций. – Харьков, 2011. – Вып. 16. – С. 303–313.
11. Никофоров С.Н. Теория упругости и пластичности. – М.: Госиздат. по арх. и стр-ву, 1955.–284 с.
12. Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. –Саратов: Изд-во Саратов. ун-та,1985. – 174 с.
13. Mohammad Amin Rashidifar, Ali Amin Rashidifar. Vibrations Analysis of Circular Plate with Piezoelectric Actuator Using Thin Plate Theory and Bessel Function // American Journal of Engineering, Technology and Society. – 2015. – No. 2(6). – P. 140–156.
14. Tsaplev V., Kononov R., Abbakumov K. Disk bimorph-type piezoelectric energy harvester // J. of Power and Energy Eng. – 2015. – No. 3. – P. 63–68.
15. Jafar Eskandari Jam, Mahmood Khosravi, Nader Namdaran. An exact solution of mechanical buckling for functionally graded material bimorph circular plates // Metall. Mater. Eng. – 2013. – Vol. 19 (1). – P. 45–63.
16. Adelman N.T., Stavsky Y. Flexural-extensional behavior piezoelectric circular plates // J. Acoust. Soc. Amer. –1980. –Vol. 67. – No. 3. – P. 819–822.
17. Karlash V.L. Resonance Electro-Mechanic Vibration of Piezo-Ceramic Plates // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41. – No. 7. – P. 535–541.
18. Ватульян А.О., Рынкова А.А. Об одной модели изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с разрезными электродами и ее приложениях // Изв. РАН. МГТ. – 2007. – № 4. – С. 114–122.
19. Wang Y., Xu R.Q., Ding H.J. Analytical solutions of functionally graded piezoelectric circular plates subjected to axisymmetric loads // Acta Mechanica. – 2010. – Vol. 215. – Iss. 1–4. – P. 287–305.
20. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания пьезокерамической тонкой биморфной пластины // Изв. РАН. МГТ. – 2013. – № 2. – С. 77–85.
21. Shlyakhin D.A., Kazakova O.V. Non-Stationary Flexural Fluctuations of a Round Flat Bimorph Plate with Graded-Varying Thickness // Procedia Engineering. – 2014. – Vol. 91. – P. 69–74. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.014
22. Шляхин Д.А. Динамическая осесимметричная задача электроупругости для жестко закрепленной биморфной пластины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 2. – С. 164–178. DOI: 10.15593/pern.mech/2015.2.11.
23. Shlyakhin D.A., Kazakova O.V. A dynamic axially symmetric goal and its extended solution for a fixed rigid circular multi-layer plate // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 153. – P. 662–666. DOI information: 10.1016/j.proeng.2016.08.219
24. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. –279 с.
25. Партон В.З. Кудрявцев Б.А. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука,1988. – 470 с.
26. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 669 с.
27. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1978. –318 с.

28. Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 4. – С. 57–63.

29. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные изгибные колебания толстой круглой жестко закрепленной пластины // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. серия. – 2011. – № 8 (89). – С. 142–152.

30. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные изгибные колебания толстой круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. серия. – 2012. – № 6 (97). – С. 124–135.

## References

1. Roche D., Richard C., Eyraud L., Audoly C. Piezoelectric bimorph bending sensor for shear-stress measurement in fluid flow. *Sensors and Actuators*, 1996, vol. 55, pp. 157-162.

2. Yoo J.H., Hong J.I., Cao W. Piezoelectric ceramic bimorph coupled to thin metal plate as cooling fan for electronic devices. *Sensors and Actuators*, 2000, vol. 79, pp. 8-12.

3. Sharapov V. Piezoceramic sensors. Springer Verlag, 2010, 498 p.

4. Jurenas V., Bansevicius R., Navickaite S. Piezoelectric bimorphs for laser shutter systems: optimization of dynamic characteristics. *Mechanika. Kaunas: Technologija*, 2010, no. 5 (85), pp. 44-47.

5. Seung-Bok Choi, Young-Min Han. Piezoelectric actuators: control applications of smart materials. – N.-Y.: CRC Press, 2010, 280 p.

6. Sharapov V., Sotula J. Piezoceramic transducers. New design technology. *Electronics: STB*, 2012, no. 5, pp. 96-102.

7. Negrov D.A., Eremin E.N., Novikov A.A., Shestel L.A. Ultrasonic oscillatory systems for the synthesis of polymeric composite materials. – Omsk: Publisher OmsSTU, 2012, 128 p.

8. Shikina V.E. Calculation of the frequency of oscillation of piezoceramic primary Converter for mass flowmeter for liquids. *Proceedings of higher educational institutions. Povolzhskiy region. Technical Sciences*, 2014, no. 1 (29), pp. 54-63.

9. Ivina N.F., Tagil'tsev A.A. Analysis of natural vibrations of the Flexural disk pied-superoverlay with arbitrary aspect ratio. *Electronic journal "Technical acoustics"*(<http://webcenter.ru/eeaa/ejta>), 2005, no. 2, pp. 1-9.

10. Yanchevskii I.V. Minimizing electroelastic bimorph deflection plates under impact loading. *Problems of computational mechanics and structural strength, Kharkiv National Automobile and Highway University*, 2011, vol. 16, pp. 303-313.

11. Nikiforov S.N. The theory of elasticity and plasticity. Moscow : State Publishing House. Architecture and Construction, 1955, 284 p.

12. Senitsky Yu.E. Study of the elastic deformation of structural elements under dynamic impacts finite integral transformations. *Saratov: Publisher SSU*, 1985, 174 p.

13. Mohammad Amin Rashidifar , Ali Amin Rashidifar. Vibrations Analysis of Circular Plate with Piezoelectric Actuator Using Thin Plate Theory and Bessel Function. *American Journal of Engineering, Technology and Society*, 2015, no. 2 (6), pp. 140-156.

14. Tsaplev V., Kononov R., Abbakumov K. Disk bimorph-type piezoelectric energy harvester. *J. of Power and Energy Eng.*, 2015, no. 3, pp. 63-68.

15. Jafar Eskandari Jam , Mahmood Khosravi, Nader Namdaran. An exact solution of mechanical buckling for functionally graded material bimorph circular plates. *Metall. Mater. Eng.*, 2013, vol. 19 (1), pp. 45-63.

16. Adelman N.T., Stavsky Y. Flexural-extensional behavior piezoelectric circular plates. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1980, vol. 67, no. 3, pp. 819-822.

17. Karlash V.L. Resonance Electro-Mechanic Vibration of Piezo-Ceramic Plates. *Int. Appl. Mech.*, 2005, vol. 41, no. 7, pp. 535-541.

18. Vatulyan A.O., Rynkova A.A. A model of bending vibrations of piezoelectric bimorphs with split electrodes and its applications. *Mech. Solids.*, 2007, vol. 42, no. 4, pp. 595-602.

19. Wang Y., Xu R.Q., Ding H.J. Analytical solutions of functionally graded piezoelectric circular plates subjected to axisymmetric loads. *Acta Mechanica*, 2010, vol. 215. Issue 1–4, pp. 287-305.

20. Shlyakhin D.A. Forced nonstationary axisymmetric vibrations of a piezoceramic thin bimorph plate. *Mech. Solids.*, 2013, vol. 48, no. 2, pp. 178-185.



21. Shlyakhin D.A., Kazakova O.V. Non-Stationary Flexural Fluctuations of a Round Flat Bimorph Plate with Graded-Varying Thickness. *Procedia Engineering*, 2014, vol. 91, pp. 69-74. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.014
22. Shlyakhin D.A. . Dynamic axisymmetric problem of electroelasticity for a rigidly fixed bimorph plate. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 2, pp.164-178. DOI:10.15593 /perm. mech/2015.2.11
23. Shlyakhin D.A., Kazakova O.V. A dynamic axially symmetric goal and its extended solution for a fixed rigid circular multi-layer plate // *Procedia Engineering*, 2016, vol. 153. pp. 662-666. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.219.
24. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. Mechanics of coupled fields in structural elements, Kiev, Naukova Dumka, 1989, 279 p.
25. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Electro-elasticity of piezoelectric and conductive bodies. Moscow, Nauka, 1988, 470 p.
26. Sneddon, I. Fourier Transforms, McGraw-Hill Book Co., New York–Toronto–London, 1951.
27. Vladimirov C.C. Generalized functions in mathematical physics. Moscow, Science, 1978, 318 p.
28. Senitsky Yu.E. Multicomponent generalized finite integral transformation and its application to non-stationary problems of mechanics. *Izvestiya vuzov: Mathematics*, 1991, no. 4, pp. 57-63.
29. Shlyakhin D.A. The compelled axisymmetric bending fluctuations of thick round rigid plate. *Vestnik of Samara state University. Estestvennonauchn. Series*, 2011, no. 8 (89), pp. 142-152
30. Shlyakhin D.A. Forced axisymmetric bending vibrations of a thick circular piezoceramic plate rigidly fixed. *Vestnik of Samara state University. Estestvennonauchn. Series*, 2012, no. 6 (97). pp. 124-135.