УДК 685.325.05

В.О. Шиляев

V.O. Shilyaev

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет

Perm National Research Polytechnic University

ИССЛЕДОВАНИЕ И ВЫБОР МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ БОЛЬШИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

RESEARCH AND SELECTION OF METHODS FOR SOLVING LARGE SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

Проанализированы типы систем линейных алгебраических уравнений. Выбрано несколько методов решения алгебраических систем. Описаны их суть и математическая часть.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, прямые методы, итерационные методы, матрица.

This article analyzes the types of systems of linear algebraic equations, selected several methods for solving algebraic systems, and are described by their mathematical part.

Keywords: system of linear algebraic equations, direct methods, iterative methods, the matrix.

С помощью вычислительной техники решается множество задач из различных областей. Большое количество этих задач сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида [1]

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов; $\mathbf{b}$ – вектор правых частей уравнений; а x – искомое решение.

В качестве примера задачи, которая сводится к решению СЛАУ, можно привести задачу моделирования теплового распределения с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [2].

Раскрой листового материала сопровождается большим выделением тепла (для плазменной, лазерной, газовой резки). Одной из причин брака является перегрев детали при резке. Для уменьшения брака МКЭ сводит процесс получения температур листа к решению больших СЛАУ. На основе температур принимается решение, продолжать или нет резку данного участка листа.

Именно поэтому поиск метода решения больших СЛАУ, который давал бы надежный результат, при небольших вычислительных затратах является актуальным.

Все методы решения СЛАУ можно разделить на две большие группы: прямые и итерационные. Прямые методы находят точное решение (в отсутствии ошибок округления) за конечное число шагов [3]. Итерационные – на каждом шаге уменьшают величину ошибки между точным решением и найденным на текущей итерации [4].

Большая часть прямых методов (рассматриваться не будут) основывается методе Гаусса, но для ряда практических задач прямые методы не применимы (решение больших СЛАУ), так как либо требуют много памяти, либо они работают слишком долго. В таких случаях используют итерационные методы [5]: Якоби, Гаусса–Зейделя, последовательной верхней релаксации (SOR (ω)) и пр.

Существуют два типа итеративных методов. Стационарные методы старше, их проще понять и реализовать, но обычно они не столь эффективны. Нестационарные методы появились сравнительно недавно. Их, как правило, сложнее понять, но они могут быть весьма эффективными. Большинство нестационарных методов основаны на идее последовательностей ортогональных векторов. Скорость сходимости итерационных методов зависит от числа обусловленности матрицы. Чем лучше обусловлена матрица коэффициентов, тем быстрее сходится метод. Если матрица обусловлена плохо, то исходную СЛАУ можно заменить другой, которая предполагает сходимость итерационного метода за меньшее число шагов. Для построения новой СЛАУ используются предобусловливатели: диагональный, блочно-диагональный, Якоби, неполное разложение Холецкого, неполный LU-предобусловливатель и пр.

Обусловленности матрицы показывают, насколько матрица близка к матрице неполного ранга (для квадратных матриц – к вырожденности (det = 0)).

Нет возможности рассмотреть все итерационные методы. Выберем итерационные методы (рис. 1) потому, что они представляют собой текущие внедряемые решения больших разреженных линейных систем.

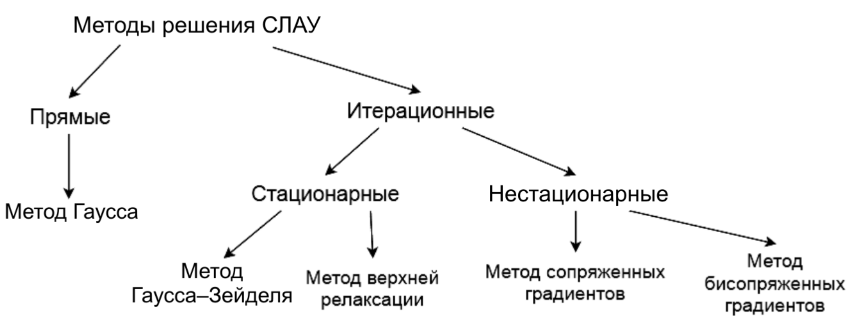

Рис. 1. Методы решения СЛАУ

Метод Гаусса–Зайделя. Этот метод делает два предположения: 1) система имеет единственное решение; 2) матрица коэффициентов не имеет нулей на главной диагонали.

Если какой-либо из диагональных элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ равен нулю, то строки или столбцы должны быть взаимозаменяемыми, чтобы получить матрицу коэффициентов, которая имеет ненулевые элементы на главной диагонали.

Дана система

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Выразив диагональные неизвестные, приведем систему к виду

$$\begin{aligned} &x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n), \\ &x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n), \\ &x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,\,n-1}x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Затем строится начальное приближение решения (берутся произвольные значения для неизвестных $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$), и подставляются эти значения x_i в правую сторону уравнений, чтобы получить первое приближение.

С помощью метода Гаусса–Зейделя можно использовать новые значения каждого x_i, как только они известны. Иными словами, как только вы определили x_1 из первого уравнения, его значение затем используется во втором уравнении, чтобы получить новый x_2. Аналогичным образом новые x_1 и x_2 используются в третьем уравнении, чтобы получить новый x_3, и т.д.

После того как процедура была завершена, одна итерация была выполнена. Повторные итерации будут формировать последовательность приближений, которые часто сходятся к фактическим решениям. Для большей точности потребуется большее количество итераций.

Метод верхней релаксации (SOR). Разработан с применением экстраполяции к методу Гаусса–Зайделя. Эта экстраполяция принимает форму взвешенного среднего между предыдущей итераций и вычисленной итерацией Гаусса–Зейделя последовательно для каждого компонента. Параметр релаксации: $\omega \in (1, 2)$.

Дана система

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Выразив диагональные неизвестные, приведем систему к виду

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n), \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n), \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,\,n-1}x_{n-1}).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Теперь умножим правую часть на параметр ω и добавим к нему $x^{(k)}$, умноженное на коэффициент $(1-\omega)$:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (1-\omega)x_1^{(k)} + \frac{\omega}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}), \\
x_2^{(k+1)} &= (1-\omega)x_2^{(k)} + \frac{\omega}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}), \\
x_n^{(k+1)} &= (1-\omega)x_n^{(k)} + \frac{\omega}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \ldots - a_{n,\,n-1}x_{n-1}^{(k)}).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Далее метод решается, как и метод Гаусса–Зейделя.

Скорость сходимости метода верхней релаксации определяется выбором параметра релаксации ω. В общем случае нет аналитической формулы для вычисления оптимального параметра ω, обеспечивающего наилучшую скорость сходимости $\omega \in (1, 2)$.

Если матрица коэффициентов **A** симметрична и положительно определена, то SOR гарантированно сходится при любом значении ω от 1 до 2, хотя выбор ω может существенно повлиять на скорость, с которой SOR сходится.

Для матрицы коэффициентов специального класса, называемого последовательно упорядоченным свойством **A** [6], можно определить теоретически оптимальное значение ω для SOR:

$$
\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - P^2}}, \tag{6}
$$

где P – спектральный радиус матрицы коэффициентов.

Однако методы верхней релаксации и Гаусса–Зейделя сходятся не всегда. Для гарантированной сходимости необходимо привести коэффициенты матрицы **A** к диагональному преобладанию.

Диагональное преобладание – это значение каждого элемента на главной диагонали, большее, чем сумма абсолютных значений других записей в том же ряду:

$$\begin{aligned} &|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|, \\ &|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + \ldots + |a_{2n}|, \\ &|a_{nn}| > |a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{nn-1}|. \end{aligned} \tag{7}$$

Выше были описаны разновидности методов решения СЛАУ. Несколько из них были рассмотрены подробно.

Список литературы

1. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 430 с.

2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

3. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.

4. Axelsson O. Iterative solution methods. – London: Cambridge University Press, 1996. – 672 p.

5. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. – 2nd ed. – SIAM Society for Industrial & Applied Mathematics, 2003. – 477 p.

6. Young D. Iterative solution of large linear systems. – NY: Academic Press, 1971.

Получено 06.09.2016

Шиляев Вячеслав Олегович – студент кафедры «Информационные технологии и автоматизированные системы», электротехнический факультет, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, e-mail: lass710@gmail.com.