

УДК 624.042.1

**А.И. Каменских, Г.Б. Пигасов, А.И. Бычков**

**A.I. Kamenskikh, G.B. Pigasov, A.I. Bychkov**

Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет

Perm National Research Polytechnic University

**РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ  
КВАЗИИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ СО СПЛОШНЫМИ  
СФЕРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

**CALCULATION OF EFFECTIVE ELASTIC MODULI  
QUASI-ISOTROPIC MEDIUM WITH SOLID SPHERICAL  
INCLUSIONS**

Проведен расчет квазиизотропной среды со сплошными сферическими включениями. Построены графики зависимости эффективного модуля Юнга от объемной доли включения. Проведен расчет в программном комплексе ANSYS.

**Ключевые слова:** квазиизотропная среда, расчет, напряжения, модуль Юнга, сферические включения, объемная доля.

The calculation of quasi-isotropic medium with a solid spherical inclusions. Plotted the effective Young's modulus of the volume fraction of inclusions. The calculation in the ANSYS program complex.

**Keywords:** quasi-isotropic medium calculation, stress, Young's modulus, spherical inclusion volume fraction.

В данной работе был произведен расчет квазиизотропной среды со сплошными сферическими включениями по теоретическим формулам и в программном комплексе ANSYS. Расчеты были проведены с изменением объемной доли включения, которая изменялась от 10 до 50 %.

Материал матрицы – медь, а материал включений – железо. Примем следующие свойства матрицы:  $E_m = 120$  ГПа,  $\nu_m = 0,3$ ; свойства включения:  $E_f = 206$  ГПа,  $\nu_f = 0,3$ , где  $E_m$  и  $E_f$  – модули Юнга для матрицы и включений соответственно;  $\nu_m$  и  $\nu_f$  – коэффициенты Пуассона для матрицы и включений соответственно [1].

Проведем аналитический расчет.

Произведем расчет модуля сдвига по формуле [2]

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1)$$

Получим данные для модулей сдвига, подставив в формулу (1) соответствующие значения для матрицы и для включений. Для матрицы получим  $G_m = 46,2$  ГПа, для включения  $G_f = 79,2$  ГПа.

Произведем расчет модуля объемного сжатия по формуле [2]

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (2)$$

Получим данные для модуля объемного сжатия, подставив значения для матрицы и для включения. Значения для матрицы  $K_m = 100$  ГПа, для включения  $K_f = 172$  ГПа.

Далее рассчитаем эффективный модуль Юнга по аналитической формуле [3]

$$E^* = E_m \cdot \frac{1 + \frac{4V_f \cdot G_m}{3K_m} \cdot \frac{K_f - K_m}{3K_f + 4G_m} + \frac{2V_f}{3} \cdot \frac{(7-5 \cdot \nu_m)(G_f - G_m)}{(7-5 \cdot \nu_m)G_m + (8-10\nu_m)G_f}}{1 - \frac{V_f \cdot E_m}{3K_m} \cdot \frac{K_f - K_m}{3K_f + 4G_m} + \frac{2V_f E_m}{3G_m} \cdot \frac{(4-5 \cdot \nu_m)(G_f - G_m)}{(7-5 \cdot \nu_m)G_m + (8-10\nu_m)G_f}}, \quad (3)$$

где  $V_f$  – объемная доля включения.

Результаты расчета с учетом изменения объемной доли представлены в табл. 1.

Таблица 1

Численные значения модуля Юнга для квазиизотропной среды при различных объемных долях

№ п/п	$V_f$	$E^*$ , Па
1	0,1	$1,26298E + 11$
2	0,2	$1,32944E + 11$
3	0,3	$1,39966E + 11$
4	0,4	$1,474E + 11$
5	0,5	$1,55279E + 11$

График зависимости модуля Юнга от объемной доли представлен на рис. 1.

Проведем расчет в программном комплексе ANSYS.

Рассмотрим композиционный материал со сферическими включениями. Характеристики материалов прежние. Для расчета эффективных характеристик

используем регулярную структуру композита типа «сфера в кубе». Моделирование проводим на одной ячейке периодичности в соответствии с методом локального приближения. Строим зависимость эффективного модуля Юнга от объемного наполнения включений. Прикладываем перемещения в 1 % вдоль оси  $x$ .

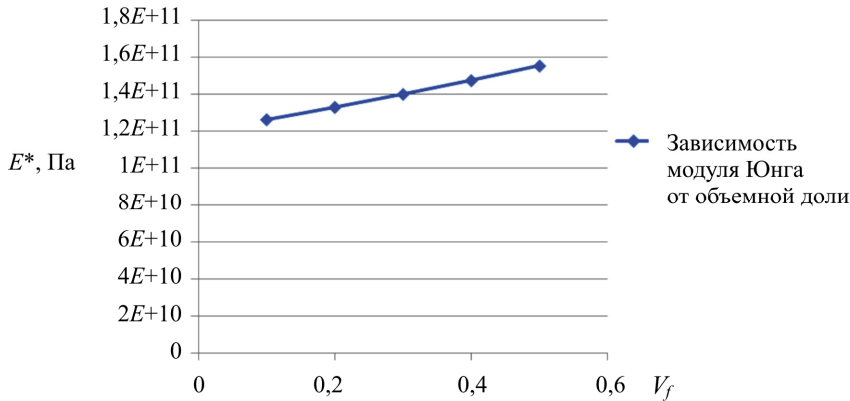


Рис. 1. Зависимость эффективного модуля Юнга  $E^*$  от объемной доли включений  $V_f$

На рис. 2, 3 показаны поля напряжений  $SX$  при нагружении в этом же направлении для объемного наполнения 0,1 и 0,5 соответственно. Поля напряжений являются неоднородными. Максимальные напряжения возникают при максимальном наполнении композита, локализируются в зонах, где расстояние между дисперсными частицами в направлении нагрузки является наименьшим.

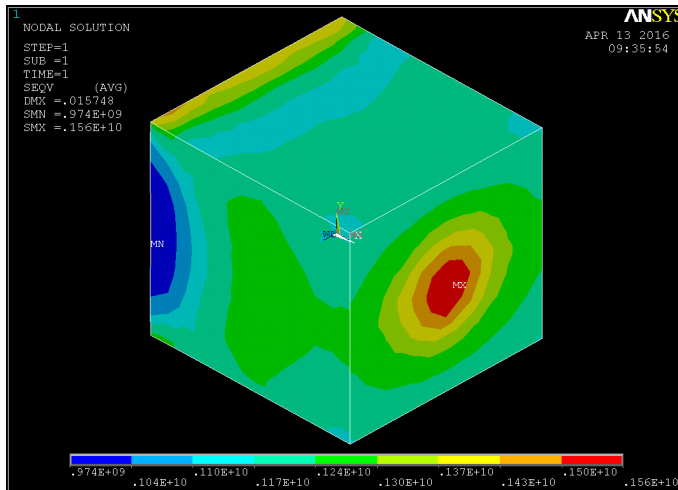


Рис. 2. Поля напряжений вдоль оси  $x$  при объемной доле частиц 0,1

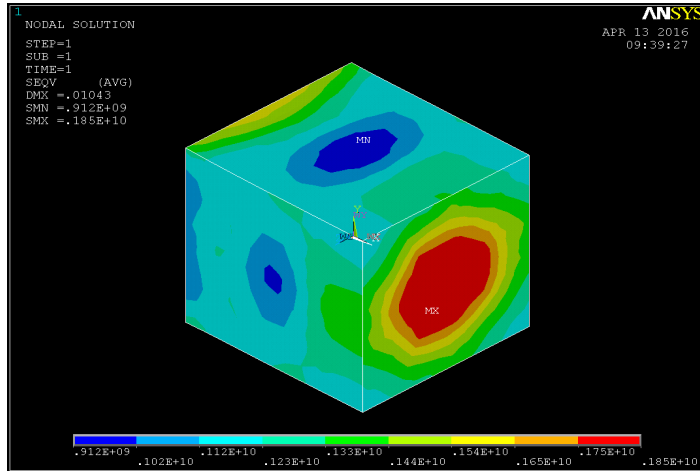


Рис. 3. Поля напряжений вдоль оси  $x$  при объемной доле частиц 0,5

Зависимость эффективного модуля Юнга композита Cu – Fe отражена на рис. 4. Проведено сравнение результатов, полученных аналитически (зависимость 1) и с помощью программы (зависимость 2). Видно, что результаты хорошо согласуются, максимальное расхождение наблюдается при объемной доле, равной 0,5. Расчет в ANSYS производился до максимального объемного наполнения 0,5 для данной геометрии. Численные значения расчета модуля Юнга, выполненные в программном комплексе ANSYS, представлены в табл. 2.

В проведенной работе был произведен расчет квазиизотропного композита. Композит состоял из медной матрицы и включений из железа. Объемная доля изменялась от 10 до 50 %, с шагом 10 %. При каждой объемной доле был произведен расчет модуля Юнга.

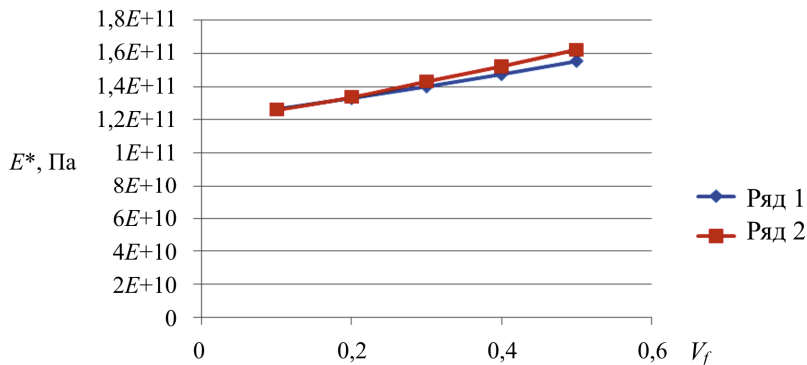


Рис. 4. График зависимости эффективного модуля Юнга от объемного наполнения включений: ряд 1 – теоретический расчет; ряд 2 – расчет в ANSYS

Таблица 2

Результаты, полученные с помощью программного комплекса ANSYS

№ п/п	$V_f$	$E^*$ , Па
1	0,1	$1,26E + 11$
2	0,2	$1,335E + 11$
3	0,3	$1,43E + 11$
4	0,4	$1,52E + 11$
5	0,5	$1,62E + 11$

Зависимость модуля Юнга от объемной доли включений линейная. При увеличении объемной доли модуль Юнга увеличивается.

Проведено сравнение результатов, полученных аналитически и с помощью программы ANSYS. Результаты хорошо согласуются, максимальное расхождение наблюдается при объемной доле, равной 0,5.

### Список литературы

1. Анурьев В.И. Справочник конструктора-машиностроителя: в 3 т. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 2001. – Т. 1.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965.
3. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. – М.: Наука, 1984. – 115 с.

Получено 16.09.2016

**Каменских Алексей Иванович** – бакалавр, аэрокосмический факультет, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, e-mail: AlexKamens@yandex.ru.

**Пигасов Георгий Борисович** – бакалавр, аэрокосмический факультет, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, e-mail: pigasov\_box@inbox.ru.

**Бычков Александр Игоревич** – бакалавр, аэрокосмический факультет, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, e-mail: Sanek\_08@mail.ru.