УДК 517.097

В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова, И.В. Гордеева

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

ОПТИМАЛЬНОЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ВЫТЯЖКИ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН

Рассмотрена задача оптимального управления для распределенной системы с компромиссным управлением. Показана разрешимость, и получена оптимизационная система для задачи оптимального управления с граничным управлением, описываемой уравнениями неразрывности и движения расплавов.

Ключевые слова: оптимальное управление, распределенные системы, стабилизирующее управление, оптические волокна, вытяжка.

V.P. Pervadchuk, D.B. Vladimirova, I.V. Gordeeva

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

OPTIMAL STABILIZING CONTROL IN THE PROBLEM OF OPTICAL FIBER DRAWING

We consider the optimal control problem for a distributed control system with a compromise. We show solvability and obtained an optimization system for optimal control problems with boundary control, described by the equations of continuity and motion melts.

Keywords: optimal control, distributed systems, stabilizing control, optical fiber, drawing.

Теория оптимального управления распределенными системами активно изучается и не теряет своей актуальности на протяжении нескольких последних десятилетий ввиду того, что реальные объекты из различных областей физики, механики, экономики и т.д. по своей сути являются распределенными. В настоящее время все чаще рассматриваются задачи оптимального управления, использующие функциональные уравнения, в том числе дифференциальные уравнения с частными производными [1, 2].

Современное производство оптических волокон представляет собой сложный высокоточный технологический процесс, при котором реализуются различные физико-химические явления. Одним из главных показателей качества волокна является постоянство характеристик готового волокна по длине. Однако осуществлять в процессе изготовления непрерывный контроль большинства показателей невозможно. В этой ситуации на заключительной стадии производства – вытяжке – непрерывно измеряют только диаметр волокна. Как показывает практика, наблюдается хорошая корреляция между постоянством диаметра готового волокна и постоянством других его характеристик по длине, поэтому существующие системы контроля и управления процессом вытяжки волокна построены на этой основе [3].

С учетом изложенного выше главная цель данной работы заключается в разработке теоретических основ оптимального управления вытяжкой волокна как управления распределенной системой.

В идеальном случае в изотермических условиях постоянство диаметра готового волокна может быть получено при стационарном режиме, т.е. при постоянстве скоростей подачи заготовки и вытяжки волокна. Движение системы при конкретных значениях скоростей будем называть программным движением, а соответствующее ему управление – программным управлением.

Однако реальное (фактическое) движение системы всегда будет отличаться от программного по ряду причин: а) неточной реализации программного управления; б) неточной реализации начальных и граничных условий; в) неточной информации о физико-механических свойствах материала; г) неполной информации о внешних воздействиях, действующих на систему, и т.д., поэтому реальные значения радиуса струи $\tilde{R}(x,t)$, скорости материала $\tilde{V}(x,t)$ и управления $U(x,t)$ описываются функциями

$$R(x,t) = R_{\text{ст}}(x)\left(1+\tilde{R}(x,t)\right),$$

$$V(x,t) = V_{\text{ст}}(x)\left(1+\tilde{V}(x,t)\right),$$

$$U(x,t) = U(x)\left(1+\tilde{U}(x,t)\right),$$

где x – продольная координата; t – время; $R_{\text{ст}}(x)$, $V_{\text{ст}}(x)$ – программное (стационарное) движение; $U(x)$ – программное управление, соответствующее стационарному режиму; $\tilde{R}(x,t)$, $\tilde{V}(x,t)$ – отклонения (возмущения) фактического движения от программного; $\tilde{U}(x,t)$ – отклонение реального управления от программного.

Принимая во внимание замечания, изложенные выше, цель оптимального управления формулирует как требование $\tilde{R}(x,t)\to 0$. Такое управление называется оптимальным стабилизирующим управлением.

Для того чтобы реализовать поставленную задачу, необходимо получить уравнения возмущенного движения, описывающие отклонения реального движения от программного.

Для рассматриваемого процесса система, описывающая возмущение стационарного режима вытяжки (изотермический случай), имеет вид [3]

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\tilde{R}}{\partial t}=V_{\text{ст}}\dfrac{\partial\tilde{R}}{\partial x}+\dfrac{V_{\text{ст}}}{2}\dfrac{\partial\tilde{V}}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\tilde{V}}{\partial t}=\dfrac{3\mu}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2\tilde{V}}{\partial x^2}+\beta_1(x)\dfrac{\partial\tilde{V}}{\partial x}+\beta_2(x)\tilde{V}+\alpha_1(x)\dfrac{\partial\tilde{R}}{\partial x}+\alpha_2(x)\tilde{R}, \end{cases}$$

где $\alpha_1(x)=\dfrac{6\mu}{\mathrm{Re}}\dfrac{V'_{\text{ст}}}{V_{\text{ст}}}+\dfrac{1}{\mathrm{We}R_{\text{ст}}V_{\text{ст}}}$; $\alpha_2(x)=\dfrac{6\mu}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{2R'_{\text{ст}}V'_{\text{ст}}}{R_{\text{ст}}V_{\text{ст}}}+\dfrac{V'_{\text{ст}}}{V_{\text{ст}}}\right)+\dfrac{R'_{\text{ст}}}{\mathrm{We}R^2_{\text{ст}}V_{\text{ст}}}+$ $+\dfrac{2}{\mathrm{Fr}V_{\text{ст}}}-2V_{\text{ст}}$; $\beta_1(x)=\dfrac{6\mu}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{R'_{\text{ст}}}{R_{\text{ст}}}+\dfrac{V'_{\text{ст}}}{V_{\text{ст}}}\right)-V_{\text{ст}}$; $\beta_2(x)=$ $=\dfrac{3\mu}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{2R'_{\text{ст}}V'_{\text{ст}}}{R_{\text{ст}}V_{\text{ст}}}+\dfrac{V''_{\text{ст}}}{V_{\text{ст}}}\right)-2V'_{\text{ст}}$, здесь $'$ – символ производной по пространственной координате; μ_0 – вязкость расплава; Re – число Рейнольдса, $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho V_0 l}{\mu_0}$ (ρ – плотность расплава, V_0 – скорость вытяжки, l – длина нагревательного элемента); We – число Вебера, $\mathrm{We}=\dfrac{\rho V_0 l}{\sigma}$ (σ – коэффициент поверхностного натяжения); Fr – число Фруда, $\mathrm{Fr}=\dfrac{2V_0^2}{gl}$ (g – ускорение свободного падения). Коэффициенты $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ вычисляются через функции $R_{\text{ст}}$ и $V_{\text{ст}}$, которые являются решениями системы уравнений для установившегося состояния [3].

Сформулируем задачу граничного управления и распределенного наблюдения параболической системы, дополненной начальными условиями и граничными условиями I рода:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \tilde{R}}{\partial t} = V_{\text{ст}} \dfrac{\partial \tilde{R}}{\partial x} + \dfrac{V_{\text{ст}}}{2} \dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial x}, \ \tilde{R}\Big|_{t=0} = R_s\left(x\right), \ \tilde{R}\Big|_{x=0} = R_0\left(t\right), \\ \dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \dfrac{3\mu}{\text{Re}} \dfrac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + \beta_1\left(x\right) \dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \beta_2\left(x\right) \tilde{V} + \alpha_1\left(x\right) \dfrac{\partial \tilde{R}}{\partial x} + \alpha_2\left(x\right) \tilde{R}, \\ \tilde{V}\Big|_{t=0} = V_s\left(x\right), \tilde{V}\Big|_{x=0} = V_0\left(t\right), \tilde{V}\Big|_{x=L} = \tilde{U}\left(t\right), \end{cases} \qquad (1)$$

где функции $\tilde{R}(x,t), \ \tilde{V}(x,t), \ \tilde{U}\left(t\right) \in L_2\left(\Omega\right), \ \Omega = \left[0; L\right] \times \left[0; \tau\right]$.

Функция оптимального управления $\tilde{U}\left(t\right)$ должна быть найдена как функция, доставляющая минимум функционалу интегрального вида при условии малости параметра α $\left(\alpha \in \left(0;1\right)\right)$.

$$F = \int_0^\tau \int_0^L \tilde{R}^2\left(x,t\right) dxdt + \alpha \left\|\tilde{U}\left(t\right)\right\|^2 =$$

$$= \int_0^\tau \int_0^L \tilde{R}^2\left(x,t\right) dxdt + \alpha \int_0^\tau \tilde{U}^2\left(t\right) dt \longrightarrow \min. \qquad (2)$$

Функционал (2) является выпуклым, полунепрерывным снизу и коэрцитивным [4], следовательно, согласно теореме существования оптимального элемента [5, 6] найдется такая функция $U_0\left(t\right)$, которая будет доставлять минимум функционалу:

$$F\left(U_0\right) = \min_{U \in L_2(\Omega)} F\left(\tilde{U}(t)\right).$$

Согласно критерию оптимальности [4, 6] значение дифференциала Гато на оптимальном элементе U_0 обратится в ноль:

$$\frac{1}{2}\left\langle F'\left(U_0\right), V - U_0 \right\rangle = \int_0^\tau \int_0^L \tilde{R}\dot{\tilde{R}} dxdt + \alpha \int_0^\tau U_0 \delta\tilde{U} dt = 0, \qquad (3)$$

где $\dot{\tilde{R}} = \left(\tilde{R}\right)'_{\tilde{U}}\Big|_{\tilde{U}=U_0}$, <·> – оператор слабого дифференцирования, $\delta\tilde{U} = V - U_0$ – вариация оптимального управления.

Заметим, что дифференциальная задача в постановке (1) является линейной относительно функции управления $\tilde{U}(t)$, а значит, одно из ее решений, функцию $\tilde{R}(x,t)$, можно рассмотреть как результат действия некоторого линейного оператора Λ на функцию $\tilde{U}(t)$:

$$\tilde{R}(x,t)=\Lambda\left(\tilde{U}(t)\right)=\Lambda_{\tilde{U}}.$$

Для оператора Λ справедливы условия линейности (дистрибутивность и ассоциативность). Тогда равенство (3) перепишется в виде

$$\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{L}\Lambda_{U_0}\Lambda\left(V-U_0\right)dxdt+\alpha\int\limits_0^{\tau}U_0\left(V-U_0\right)dt=0. \tag{4}$$

Поварьируя исходную задачу (1) [7, 8], получим

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\dot{\tilde{R}}}{\partial t}=V_{\text{ст}}\dfrac{\partial\dot{\tilde{R}}}{\partial x}+\dfrac{V_{\text{ст}}}{2}\dfrac{\partial\dot{\tilde{V}}}{\partial x},\ \dot{\tilde{R}}\Big|_{t=0}=0,\ \dot{\tilde{R}}\Big|_{x=0}=0,\\ \dfrac{\partial\dot{\tilde{V}}}{\partial t}=\dfrac{3\mu}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2\dot{\tilde{V}}}{\partial x^2}+\beta_1(x)\dfrac{\partial\dot{\tilde{V}}}{\partial x}+\beta_2(x)\dot{\tilde{V}}+\alpha_1(x)\dfrac{\partial\dot{\tilde{R}}}{\partial x}+\alpha_2(x)\dot{\tilde{R}},\\ \dot{\tilde{V}}\Big|_{t=0}=0,\ \dot{\tilde{V}}\Big|_{x=0}=0,\ \dot{\tilde{V}}\Big|_{x=L}=\delta\tilde{U}. \end{cases} \tag{5}$$

Умножим уравнение неразрывности из системы (5) на произвольную функцию $q(x,t)\in L_2(\Omega)$, а уравнение движения – на произвольную функцию $p(x,t)\in L_2(\Omega)$ и проинтегрируем оба уравнения по области Ω. Результатом их сложения будет являться следующее выражение:

$$-\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{L}\frac{\partial\dot{\tilde{R}}}{\partial t}qdxdt+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{L}\frac{\partial\dot{\tilde{V}}}{\partial t}pdxdt=\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{L}V_{\text{ст}}\frac{\partial\dot{\tilde{R}}}{\partial x}qdxdt+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{L}\frac{V_{\text{ст}}}{2}\frac{\partial\dot{\tilde{V}}}{\partial x}qdxdt+$$
$$+\frac{3\mu}{\mathrm{Re}}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{L}\frac{\partial^2\dot{\tilde{V}}}{\partial x^2}pdxdt+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{L}\beta_1(x)\frac{\partial\dot{\tilde{V}}}{\partial x}pdxdt+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{L}\beta_2(x)\dot{\tilde{V}}pdxdt+$$
$$+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{L}\alpha_1(x)\frac{\partial\dot{\tilde{R}}}{\partial x}pdxdt+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{L}\alpha_2(x)\dot{\tilde{R}}pdxdt.$$

Воспользуемся формулой Грина для слагаемых, содержащих производные функций $\dot{\tilde{R}}$ и $\dot{\tilde{V}}$, и получим

$$\int_0^\tau\int_0^L \dot{\tilde{R}}\frac{\partial q}{\partial t}dxdt-\int_0^L \dot{\tilde{R}}q\Big|_0^\tau dx-\int_0^\tau\int_0^L \dot{\tilde{V}}\frac{\partial p}{\partial t}dxdt+\int_0^L \dot{\tilde{V}}p\Big|_0^\tau dx=$$

$$=-\int_0^\tau\int_0^L \dot{\tilde{R}}\frac{\partial\left(V_{\text{ст}}q\right)}{\partial x}dxdt+\int_0^\tau \dot{\tilde{R}}V_{\text{ст}}q\Big|_0^L dt-\int_0^\tau\int_0^L \dot{\tilde{V}}\frac{\partial\left(\frac{V_{\text{ст}}}{2}q\right)}{\partial x}dxdt+$$

$$+\int_0^\tau \dot{\tilde{V}}\frac{V_{\text{ст}}}{2}q\Big|_0^L dt+\frac{3\mu}{\text{Re}}\int_0^\tau\int_0^L \dot{\tilde{V}}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}dxdt+\frac{3\mu}{\text{Re}}\int_0^\tau \frac{\partial\dot{\tilde{V}}}{\partial x}p\Big|_0^L dt-\frac{3\mu}{\text{Re}}\int_0^\tau \dot{\tilde{V}}\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_0^L dt-$$

$$-\int_0^\tau\int_0^L \dot{\tilde{V}}\frac{\partial\left(\beta_1(x)p\right)}{\partial x}dxdt+\int_0^\tau \dot{\tilde{V}}\beta_1(x)p\Big|_0^L dt+\int_0^\tau\int_0^L \beta_2(x)\dot{\tilde{V}}pdxdt-$$

$$-\int_0^\tau\int_0^L \dot{\tilde{R}}\frac{\partial\left(\alpha_1(x)p\right)}{\partial x}dxdt+\int_0^\tau \dot{\tilde{R}}\alpha_1(x)p\Big|_0^L dt+\int_0^\tau\int_0^L \alpha_2(x)\dot{\tilde{R}}pdxdt.$$

Потребуем, чтобы функции $q(x,t)$ и $p(x,t)$ удовлетворяли следующей дифференциальной задаче:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q}{\partial t}+\dfrac{\partial\left(V_{\text{ст}}q\right)}{\partial x}+\dfrac{\partial\left(\alpha_1(x)p\right)}{\partial x}-\alpha_2(x)p=\tilde{R},\\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial t}+\dfrac{\partial\left(\frac{V_{\text{ст}}}{2}q\right)}{\partial x}-\dfrac{3\mu}{\text{Re}}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\dfrac{\partial\left(\beta_1(x)p\right)}{\partial x}-\beta_2(x)p=0,\\[2ex] q\big|_{t=\tau}=p\big|_{t=\tau}=p\big|_{x=0}=p\big|_{x=L}=q\big|_{x=L}=0.\end{cases}$$

Тогда с учетом начального и граничных условий (5) последнее интегральное соотношение примет вид

$$\int_0^\tau\int_0^L \dot{\tilde{R}}\tilde{R}dxdt=-\frac{3\mu}{\text{Re}}\int_0^\tau \delta\tilde{U}\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=L}dt.$$

Учитывая соотношение (4), получим

$$-\frac{3\mu}{\text{Re}}\int_0^\tau \delta\tilde{U}\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=L}dt+\alpha\int_0^\tau U_0\delta\tilde{U}dt=0,$$

откуда следует, что

$$U_0 = \frac{3\mu}{\alpha \operatorname{Re}} \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=L},$$

и система оптимальности примет следующий вид:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \tilde{R}}{\partial t} = V_{\text{ст}} \dfrac{\partial \tilde{R}}{\partial x} + \dfrac{V_{\text{ст}}}{2} \dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial x}, \\ \tilde{R}\big|_{t=0} = R_s(x), \ \tilde{R}\big|_{x=0} = R_0(t), \\ \dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \dfrac{3\mu}{\operatorname{Re}} \dfrac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + \beta_1(x) \dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \beta_2(x) \tilde{V} + \alpha_1(x) \dfrac{\partial \tilde{R}}{\partial x} + \alpha_2(x) \tilde{R}, \\ \tilde{V}\big|_{t=0} = V_s(x), \, \tilde{V}\big|_{x=0} = V_0(t), \, \tilde{V}\big|_{x=L} = \dfrac{3\mu}{\alpha \operatorname{Re}} \dfrac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=L}, \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial (V_{\text{ст}} q)}{\partial x} + \dfrac{\partial (\alpha_1(x) p)}{\partial x} - \alpha_2(x) p = \tilde{R}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial \left(\dfrac{V_{\text{ст}}}{2} q \right)}{\partial x} - \dfrac{3\mu}{\operatorname{Re}} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \dfrac{\partial (\beta_1(x) p)}{\partial x} - \beta_2(x) p = 0, \\ q\big|_{t=\tau} = 0, \ p\big|_{t=\tau} = 0, \ p\big|_{x=0} = 0, \ p\big|_{x=L} = 0, \ q\big|_{x=L} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, в работе сформулирована и обоснована задача оптимального стабилизирующего управления процессом вытяжки. Для линеаризованной системы, описывающей возмущенное движение, показана разрешимость задачи, а также получены система оптимальности и явная зависимость для определения функции оптимального стабилизирующего управления.

Список литературы

1. Александров А.Е. Оптимальные и адаптивные системы: учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.

2. Раппопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2003. – 299 с.

3. Васильев В.Н., Дульнев Г.Н., Наумчик В.Д. Нестационарные процессы при формировании оптического волокна 1. Устойчивость

процесса вытяжки // Инж.-физ. журнал. – 1988. – Т. 55, № 2. – С. 284–292.

4. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 350 с.

5. Шумкова Д.Б. Оптимальное управление распределенными системами в экономике и технике: учеб.-метод. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 132 с.

6. Шумкова Д.Б. Оптимальное управление в задачах с неизвестными границами и подвижными источниками: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Пермь, 2006. – 111 с.

7. Первадчук В.П., Шумкова Д.Б. Оптимальное управление в задачах с подвижным тепловым источником // Науч.-техн. ведомости С.-Петерб. гос. политехн. ун-та. – 2010. – № 2 (98). – С. 37–44.

8. Первадчук В.П., Шумкова Д.Б., Дектярев Д.Н. Вопросы разрешимости и получения оптимизационных систем в вариационных задачах, описываемых двумерными уравнениями параболического типа // Науч.-техн. ведомости С.-Петерб. политехн. ун-та. – 2012. – № 3 (153). – С. 128–132.

References

1. Aleksandrov A.E. Optimal’nye i adaptivnye sistemy [Optimal adaptive systems, textbook for higher education organizations]. Moscow: Vysshaia shkola, 1989. 263 p.

2. Rappoport E.Ia. Strukturnoe modelirovanie ob”ektov i system upravleniia s raspredelennymi parametrami [Distributed-parameters controlled object and systems structure modeling]. Moscow: Vysshaia shkola, 2003. 299 p.

3. Vasil’ev V.N.. Dul’nev G.N., Naumchik V.D. Nestatsionarnye protsessy pri formirovanii opticheskogo volokna 1. Ustoichivost' protsessa vytiazhki [Nonstationary rocesses in the formation of the optical fiber. Part 1. Sustainability in the hood]. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 1988. vol. 55, no. 2, pp. 284-292.

4. Fursikov A.V. Optimal’noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriia i prilozheniia [Optimal control of distributed-parameters controlled dystems. theory and applications]. Novosibirsk: Nauchnaia kniga, 1999. 350 p.

5. Shumkova D.B. Optimal’noe upravlenie raspredelennymi sistemami v ekonomike i tekhnike [Optimal control of distributed-parameters controlled systems in economics and techniques]. Perm’: Permskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2009. 132 p.

6. Shumkova D.B. Optimal’noe upravlenie v zadachah s neizvestnymi granitsami i podvizhnymi istochnikami [Optimal control in problems with unknown boundaries and movable sources]. Perm’: Permskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2006. 111 p.

7. Pervadchuk V.P., Shumkova D.B. Optimal’noe upravlenie v zadachah s podvizhnym teplovym istochnikom [Optimal control in problems with movable heat source]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta*, 2010, no. 2 (98), pp. 37-44.

8. Pervadchuk V.P., Shumkova D.B., Dektiarev D.N. Voprosy razreshimosti i polucheniia optimizatsionnykh sistem v variatsionnykh zadachakh, opisyvaemykh dvumernymi uravneniiami parabolicheskogo tipa [Problems of solvability and getting optimal systems in a variation problems, which are described by two-dimensional nonlinear equations of parabolic type]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta*, 2012, no. 3 (153), pp. 128-132.

Получено 23.10.2016

Об авторах

Первадчук Владимир Павлович (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: pervadchuk@mail.ru).

Владимирова Дарья Борисовна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: pervadchuk@mail.ru).

Гордеева Ирина Викторовна (Пермь, Россия) – ассистент кафедры «Прикладная математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: pervadchuk@mail.ru).

About the authors

Vladimir P. Pervadchuk (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department, Department of Applied Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (614990, 29, Komsomolsky av., Perm, Russian Federation, e-mail: pervadchuk@mail.ru).

Dar’ia B. Vladimirova (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (614990, 29, Komsomolsky av., Perm, Russian Federation, e-mail: pervadchuk@mail.ru).

Irina V. Gordeeva (Perm, Russian Federation) – Assistant, Department of Applied Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (614990, 29, Komsomolsky av., Perm, Russian Federation, e-mail: pervadchuk@mail.ru).