



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.20

УДК 534.1:539.3

## ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ СО СВЯЗЯМИ: ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

А.Н. Данилин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 11 ноября 2016 г.

Принята: 17 декабря 2016 г.

Опубликована: 30 декабря 2016 г.

#### Ключевые слова:

стержневая система, нелинейная динамика, конечные перемещения и повороты, гибкость, кинематические связи, конечно-элементная формулировка.

### АННОТАЦИЯ

В работе моделируется динамическое поведение движущейся конструкции, составленной из гибких стержневых элементов, которые соединяются через шарниры. Предполагается, что в шарнирах есть связи – жесткие и нежесткие, управляемые и неуправляемые. Математически они считаются дифференциальными в интегрируемой или неинтегрируемой формах.

Модель стержневой системы строится на основе метода конечных элементов, учитывая конечные деформации и нелинейности инерционных сил. Считается, что концы каждого стержневого элемента жестко соединены с твердыми телами, размеры которых малы по сравнению с длиной элемента. Каждый конечный элемент связывается с локальной системой координат, для которой перемещения, углы поворотов, поступательные и вращательные скорости учитываются строго. Функции формы выбираются в виде квазистатических аппроксимаций локальных перемещений и углов поворотов сечений стержневого элемента. В качестве обобщенных координат задачи принимаются абсолютные перемещения и углы поворотов краевых сечений конечных элементов модели.

Уравнения движения системы составляются на основе принципа Даламбера-Лагранжа. Считается, что на обобщенные координаты системы наложены связи, линейные относительно обобщенных скоростей. Вариация функционала задачи, для которого ищется стационарное значение, преобразуется путём прибавления уравнений связей, умноженных на неопределённые множителя Лагранжа. Вариационная задача для преобразованного функционала решается как свободная. Условия стационарности вместе с дифференциальными уравнениями связей определяют искомые значения обобщенных координат.

В работе предлагается подход, позволяющий избежать громоздких вычислений нелинейных инерционных членов без упрощения физической модели и (или) изменения первоначальной структуры уравнений.

Рассмотрен пример развертывания стержневой системы, состоящей из трех гибких стержней, последовательно соединенных через шарниры. Решение нелинейных уравнений движения получено численным методом с использованием параметра длины интегральной кривой решения в качестве аргумента задачи. Такое преобразование доставляет системе разрешающих уравнений наилучшую обусловленность процесса численного решения.

© ПНИПУ

© Данилин Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, заместитель директора, e-mail: andanilin@yandex.ru

Alexander N. Danilin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Deputy Director, e-mail: andanilin@yandex.ru

## DYNAMICS OF MULTILINK ROD SYSTEM WITH CONSTRAINTS: A PLANE PROBLEM IN FINITE ELEMENT FORMULATION

A.N. Danilin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 11 November 2016

Accepted: 17 December 2016

Published: 30 December 2016

#### Keywords:

rod system, nonlinear dynamics, finite displacements and rotations, flexibility, kinematic constraints, finite element formulation.

### ABSTRACT

In this paper, the dynamic of a structure composed of flexible rod elements connected via hinges is modeled. It is assumed that the hinges have constraints – rigid and non-rigid, controlled and uncontrolled ones. Mathematically, they are considered as differential ones in integrable or non-integrable forms.

Mathematical model is formulated based on the finite element method taking into account finite deformations and the nonlinearity of the inertial forces. The rod element ends are considered to be connected with rigid bodies whose dimensions are small relative to the element length. Each finite element is associated with a local coordinate system for which the displacements, angles of rotation, the translational and rotational speed are strictly considered. Shape functions are taken as quasi-static approximations of local displacement and rotation angles of element cross-sections. Absolute displacements and rotation angles of element boundary cross-sections are taken as generalized coordinates of the problem.

The dynamic equations are obtained using d'Alembert-Lagrange principle. It is considered that the generalized coordinates are subjected to the linear relations relative to the generalized velocities. Variation of the problem functional for which to look for the steady-state value is transformed by the addition of the constraint equations multiplied by the undefined Lagrange multipliers. The variational problem for the transformed functional is solved as a free. The stationarity conditions together with the differential equations of constraints determine the desired values of the generalized coordinates.

This paper proposes an approach that allows to avoid cumbersome calculations of the nonlinear inertial members without simplification of the physical model and (or) changing the original structure of equations.

An example of deploying rod system consisting of three flexible rods connected in series via hinges is considered. The solution of nonlinear dynamic equations is obtained numerically using the integral curve length parameter as a problem argument. This transformation gives a system of resolving equations the best conditioning of the numerical solution process.

© PNRPU

---

## Введение

Проблемам математического моделирования нелинейной динамики составных стержневых систем посвящено большое число работ, и интерес к этой теме не ослабевает [1–29, 36]. Рост числа публикаций и их тематическое разнообразие определяются прежде всего многочисленными практическими приложениями, сочетающими конструктивные особенности стержневых систем с условиями их применения.

Стержневые системы могут быть как жесткими, так и гибкими, значительно менять свою первоначальную конфигурацию в результате деформации или трансформирования с помощью исполнительных механизмов. В стержневых системах некоторые из элементов могут трактоваться как жесткие, упругие и неупругие связи, в том числе – односторонние, например в виде троса или нити, сопротивляющиеся только растяжению [2, 5, 8, 11, 12].

Известно множество примеров использования стержневых систем в наземных условиях. Опыт показывает, что стержневые системы могут успешно применяться и в космиче-

ских условиях [4, 6, 7, 17, 19]. В настоящее время представляют значительный научный интерес задачи о динамическом поведении космических конструкций, которые собираются или развёртываются в условиях орбитального движения с использованием стержневых элементов или секций. Примерами являются фермы большого удлинения, длинные штанги для точных физических измерений или гравитационной стабилизации, манипуляторы антропоморфного типа и пр. Условия невесомости позволяют создавать легкие конструкции. Однако снижение погонных массовых характеристик приводит к увеличению гибкости, что необходимо учитывать в динамических моделях. Конструкции становятся чувствительными по отношению к внешним и внутренним возмущениям. Это ставит ряд проблем перед конструкторами и разработчиками систем управления. Трудности усугубляются возможностью изменения конфигурации, а также высокими требованиями к точности управления движением системы в целом и отдельными её элементами или к точности сохранения формы (например, для телескопов или интерферометров).

Таким образом, динамическое деформирование стержневых конструкций может носить существенно нелинейный характер, сопровождаться большими перемещениями и углами поворотов, и конечными деформациями. Это ведет к проблеме создания адекватных математических моделей, опирающихся на нелинейные геометрические соотношения [1–4, 6, 7, 10, 13–15, 17, 23, 27–29].

## 1. Формулировка модели. Основные допущения

В работе моделируется динамическое поведение движущейся конструкции, составленной из гибких стержневых элементов, которые соединяются через шарниры. Предполагается, что в шарнирах есть связи – жесткие и нежесткие, управляемые и неуправляемые. Математически они считаются дифференциальными в интегрируемой или неинтегрируемой формах.

Как известно, характерная особенность стержневых элементов – значительное преобладание одного габаритного размера над остальными. Это позволяет использовать в расчётах балочные модели, которые строятся на основе классической гипотезы плоских сечений или на её уточнённых вариантах [18, 32].

Стержневые элементы могут иметь произвольную форму поперечного сечения, быть в виде тонкостенных или трубчатых стержней. Они могут быть изготовлены из композиционных материалов или иметь многослойную проволочную структуру подобно проводу воздушных линий электропередачи. В таких случаях деформации сдвига распределяются в поперечном сечении неравномерно, что приводит к его депланации. Гипотеза плоских сечений позволяет приближенно учесть деформацию сдвига на основе модели Тимошенко [32]. В этом случае сечения не остаются перпендикулярными выбранной осевой линии: оставаясь плоскими и недеформированными, они поворачиваются и сдвигаются друг относительно друга как абсолютно жесткие диски бесконечно малой толщины.

Рассмотрим произвольное сечение стержневого элемента. На рис. 1 это сечение обозначено как  $S$ , штрихпунктирной линией изображена осевая линия. С сечением свяжем прямоугольную систему координат  $O_c x_c y_c z_c$ , совмещая начало координат  $O_c$  (полюс) с точкой сечения, принадлежащей осевой линии. Ось  $O_c x_c$  направим перпендикулярно сечению. Обозначим через  $r_c$  радиус-вектор произвольной точки сечения  $P$  относительно полюса  $O_c$ .

Введем систему координат  $\tilde{O}xyz$ , движущуюся относительно некоторой неподвижной (инерциальной) координатной системы  $OXYZ$ . Через  $\tilde{r}$  и  $r$  обозначим радиусы-векторы полюса  $O_c$  в системах  $\tilde{O}xyz$  и  $OXYZ$  соответственно. Пространственное положение подвижного полюса  $\tilde{O}$  в системе  $OXYZ$  будем определять радиусом-вектором  $r_o$ . В этой же системе положение точки  $P$  будем определять радиусом-вектором  $R$ .

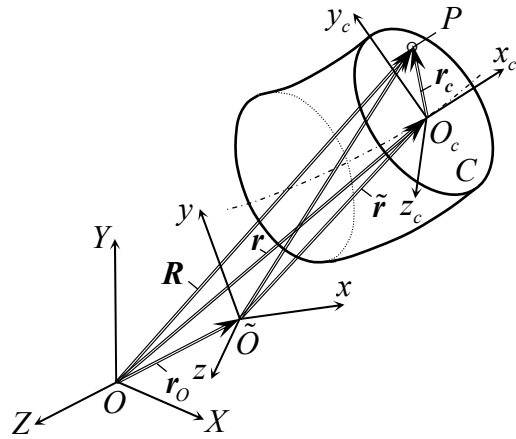


Рис. 1. Взаимная ориентация координатных систем  
Fig. 1. The mutual orientation of the coordinate systems

Очевидно, что

$$R = r + r_c, \quad r = r_o + \tilde{r}. \tag{1}$$

Модель стержневой системы будем строить на основе метода конечных элементов [17, 33–35], учитывая конечные деформации и нелинейности инерционных сил.

Каждый конечный элемент связывается с местной системой координат  $\tilde{O}xyz$ , которая в дальнейшем называется также локальной, или элементной. Перемещения, углы поворотов, поступательные и вращательные скорости этой системы, совершающей движение совместно с элементом относительно системы  $OXYZ$ , учитываются строго. Функции формы выбираются в виде квазистатических аппроксимаций локальных перемещений и углов поворотов сечений стержневого элемента в переменных  $\tilde{O}xyz$ .

В качестве обобщенных координат задачи  $q_i(t)$  ( $t$  – время;  $i$  – порядковый номер) принимаются абсолютные перемещения и углы поворотов краевых сечений конечных элементов модели.

Уравнения движения системы составляются на основе принципа Даламбера-Лагранжа [17, 31, 34]:

$$\delta U - \delta A_p - \delta A_i = 0, \tag{2}$$

где  $\delta U$  – вариация потенциальной энергии системы;  $\delta A_p$ ,  $\delta A_i$  – вариации работы внешних и инерционных сил.

Пусть  $V$  и  $S$  – объем и площадь поверхность стержневого элемента,  $p$  и  $G$  – векторы поверхностной и объемной внешней нагрузки,  $\rho$  – массовая плотность материала. Тогда

$$\delta A_p = \iint_S p \cdot \delta R dS + \iiint_V G \cdot \delta R dV, \quad \delta A_i = - \iiint_V \rho \ddot{R} \cdot \delta R dV, \tag{3}$$

где  $\ddot{R}$  и  $\delta R$  – ускорение точки  $P$  и вариация её положения.

Будем считать, что на обобщенные координаты  $q_i(t)$  системы наложены  $m$  связей, линейных относительно скоростей  $\dot{q}_i(t)$ :

$$\sum_{j=1}^n D_{ij}(q_1, \dots, q_n; t) \dot{q}_j + d_j(q_1, \dots, q_n; t) = 0; \quad i = 1, \dots, m. \tag{4}$$

Если связи голономны и имеют вид  $f_i(q_1, \dots, q_n) = 0$ , то  $D_{ij} = \partial f_i / \partial q_j$ .

Применяя синхронное варьирование, запишем вариации связей в фиксированный момент времени. Аналогично (4) имеем

$$\sum_{j=1}^n D_{ij} \delta q_j = 0; \quad i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Вариация функционала задачи, для которого ищется стационарное значение, преобразуется путём прибавления левых частей дополнительных условий (5), умноженных на неопределённые множителя Лагранжа. Вариационная задача для преобразованного функционала решается как свободная. Условия стационарности вместе с дифференциальными условиями (4) определяют искомые значения обобщённых координат и множители Лагранжа.

Вывод уравнений движения из вариационного соотношения (2) с учётом связей в виде (4) представляет собой нетривиальную задачу. Интегрирование по  $V$  и  $S$  в (3) с учётом выбранных функций формы и нелинейных соотношений для деформаций и инерционных сил сопровождаются весьма сложными вычислениями. Для преодоления этих трудностей многие авторы пользуются достаточно «сильными» допущениями, редуцируя модель и пренебрегая рядом величин в уравнениях движения, считая их влияние несущественным.

Ниже предлагается подход, позволяющий избежать громоздких вычислений без упрощения физической модели и (или) изменения первоначальной структуры уравнений. Для простоты изложения далее ограничимся плоской задачей, считая, что упругие оси элементов совершают движение в одной плоскости. В недеформированном состоянии оси стержневых элементов считаются прямолинейными.

## 2. Динамика в плоскости

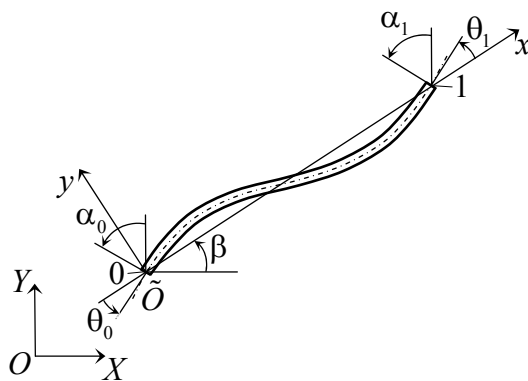


Рис. 2. Конечный элемент и связанная с ним локальная система координат  
 Fig. 2. Finite element and its associated local coordinate system

Привязку местной системы  $\tilde{O}xy$  к элементу можно осуществлять по-разному. Полус  $\tilde{O}$  можно совместить с точкой пересечения продольной оси стержня и краевого поперечного сечения, направив ось  $\tilde{O}x$  перпендикулярно сечению стержня. Возможны и другие варианты. В работе связь местной системы координат с элементом осуществляется так, чтобы ось  $\tilde{O}x$  проходила через полюсы краевых сечений "0" и "1", как это показано на рис. 2.

### 2.1. Функции формы

Осевую линию стержневого элемента будем считать нейтральной. Рассмотрим в плоскости сечения  $y_c z_c$  произвольную точку  $P$ , отстоящую от оси  $O_c z_c$  на расстоянии  $y_c$ . Считая угол поворота сечения в системе  $\tilde{O}xy$  малым, приближенно имеем  $y_c \approx y - v$ , где  $v(x)$  – перемещение осевой точки сечения по оси  $\tilde{O}y$  (рис. 3).

Обозначим через  $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x)$  деформацию сдвига, осредненную по сечению, например, в энергетическом смысле. Эта величина представляет собой угол отклонения нормали сечения от касательной к осевой линии. Если  $u$  – продольное перемещение точки  $P$  (вдоль оси  $\tilde{O}x$ ), то  $\gamma_{xy}(x) = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$ . Интегрирование этого соотношения по  $y$  с учётом преобразования  $y = y_c + v$  даёт  $u(x, y) = u_{\oplus}(x) - y_c \theta(x)$ , где  $u_{\oplus}$  – продольное перемещение нейтральной линии  $O_c z_c$ ;  $\theta = v' - \gamma_{xy}$  – угол поворота сечения;  $v' = dv/dx$ . Здесь и далее величины со штрихом обозначают производные по локальной координате  $x$ .

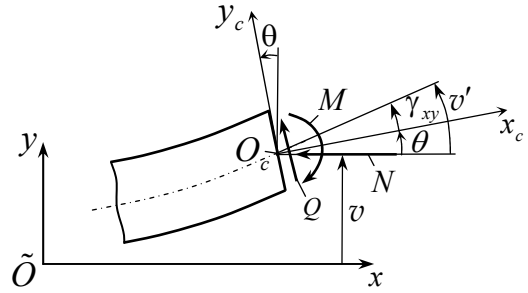


Рис. 3. Кинематические и статические факторы в сечении стержня  
Fig. 3. Kinematic and static factors in the cross-section of a rod

В пределах конечного элемента перемещением  $u_{\oplus}$  далее будем пренебрегать. Тогда  $\epsilon_x = \partial u / \partial x = -y_c \theta'$ ,  $\gamma_{xy} = v' - \theta$ .

Получим выражения для изгибающего момента  $M$ , поперечной силы  $Q$  и продольной силы  $N$ , действующие в сечении стержня.

Напряжения  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  связаны с деформациями  $\epsilon_x$  и  $\gamma_{xy}$  соотношениями упругости:  $\sigma_x = E \epsilon_x = -E y_c \theta'$ ,  $\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G(v' - \theta)$ ;  $E$  и  $G$  – модули Юнга и сдвига. Поэтому

$$M = \int_F y_c \sigma_x dF = -E J_z \theta', \quad Q = G F_s (v' - \theta), \quad (6)$$

где  $J_z = \int_F y_c^2 dF$  – момент инерции сечения;  $F_s$  – эквивалентная площадь поперечного сечения, работающая на сдвиг.

При вычислении продольной силы будем использовать нелинейное выражение для осевой деформации в виде

$$\epsilon = u' + 1/2 \cdot v'^2. \quad (7)$$

Тогда

$$N = \int_F E \epsilon dF = E F (u' + 1/2 \cdot v'^2), \quad (8)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения.

С учётом (6), (8) потенциальная энергия стержневого элемента длины  $l$  записывается в виде

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{N^2}{E F} + \frac{M^2}{E J_z} + \frac{Q^2}{G F_s} \right) dx. \quad (9)$$

Уравнения статического равновесия получим на основе вариационного принципа Лагранжа, минимизируя функционал (9) без учета энергии растяжения-сжатия (полагая  $N \equiv 0$ ). Из условия равенства нулю вариации потенциальной энергии  $U$  с использованием (6) приходим к однородной системе уравнений относительно  $\theta(x)$  и  $v(x)$ :

$$\theta''' = 0, \quad v' - \theta + \frac{l^2}{12} \frac{1-\alpha}{\alpha} \theta'' = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\alpha$  – безразмерный коэффициент, характеризующий осреднённый сдвиг,

$$\alpha = \left( 1 + 12 \frac{EJ_z}{l^2 GF_s} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Если пренебречь сдвигом, т.е.  $GF_s \rightarrow \infty$ , тогда  $\alpha = 1$ .

Решением (10) является следующее:

$$\theta(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \quad v(x) = c_3 + \left( c_0 - \frac{l^2}{6} \frac{1-\alpha}{\alpha} c_2 \right) x + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{3} x^3, \quad (12)$$

где  $c_0, c_1, c_2, c_3$  – постоянные интегрирования. Их значения находятся из граничных условий:  $v(0) = v(l) = 0$  и  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\theta(l) = \theta_1$ . С учетом найденных значений для констант решение (12) записывается в виде

$$\theta(x) = \theta_0 \varphi_0(x) + \theta_1 \varphi_1(x), \quad v(x) = \theta_0 \psi_0(x) + \theta_1 \psi_1(x), \quad (13)$$

где функции формы

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 - (1 + 3\alpha)\xi + 3\alpha\xi^2, & \varphi_1(x) &= (1 - 3\alpha)\xi + 3\alpha\xi^2, \\ \psi_0(x) &= l \left[ \frac{1}{2}(1 + \alpha)\xi - \frac{1}{2}(1 + 3\alpha)\xi^2 + \alpha\xi^3 \right], & (14) \\ \psi_1(x) &= l \left[ \frac{1}{2}(-1 + \alpha)\xi + \frac{1}{2}(1 - 3\alpha)\xi^2 + \alpha\xi^3 \right], \end{aligned}$$

переменная  $\xi = x/l$  – безразмерная локальная координата ( $0 \leq \xi \leq 1$ ).

Определим продольную (осевую) деформацию  $\varepsilon$ , считая её величиной постоянной в пределах элемента. Из (7) имеем  $u' = \varepsilon - 1/2 v'^2$ , откуда следует выражение для продольного перемещения

$$u(x) = u_0 + \varepsilon x - \frac{1}{2} \int v'^2 dx. \quad (15)$$

Перемещения краевых сечений  $u_0 = u(0) = 0$ ,  $u_1 = u(l) \neq 0$ . Тогда из (15), после интегрирования по координате  $x$  от 0 до  $l$ , получаем

$$u_1 = l \left\{ \varepsilon - \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{3}(\theta_1 - \theta_0)^2 + \frac{\alpha^2}{5}(\theta_1 + \theta_0)^2 \right] \right\}.$$

Отсюда следует выражение для деформации  $\varepsilon$  в виде

$$\varepsilon = \frac{u_1}{l} + \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{3}(\theta_1 - \theta_0)^2 + \frac{\alpha^2}{5}(\theta_1 + \theta_0)^2 \right]. \quad (16)$$

В свою очередь, продольное перемещение

$$u_1 = \tilde{l} - l, \quad (17)$$

где  $\tilde{l}$  – расстояние между полюсами краевых сечений, которое выражается через абсолютные координаты полюсов по формуле

$$\tilde{l} = \sqrt{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2}. \quad (18)$$

Угол наклона элементной системы координат  $\beta$  связан с этими координатами соотношениями

$$\sin \beta = \frac{Y_1 - Y_0}{\tilde{l}}, \quad \cos \beta = \frac{X_1 - X_0}{\tilde{l}}. \quad (19)$$

## 2.2. Вариация потенциальной энергии деформации

Интегрирование в (9) с учётом выражений (6) и (16) приводит к выражению

$$U = \frac{1}{2} \frac{EJ_z}{l} [(\theta_1 - \theta_0)^2 + 3\alpha(\theta_1 + \theta_0)^2] + \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EF}, \quad (20)$$

где  $N = EF\varepsilon$ .

Из рис. 2 следуют простые геометрические соотношения

$$\theta_0 = \alpha_0 - \beta, \quad \theta_1 = \alpha_1 - \beta. \quad (21)$$

Тогда  $\theta_1 - \theta_0 = \alpha_1 - \alpha_0$ ,  $\theta_1 + \theta_0 = \alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta$  и вместо (20) имеем

$$U = \frac{1}{2} \frac{EJ_z}{l} [(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + 3\alpha(\alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta)^2] + \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EF}. \quad (22)$$

Продольная сила в (22)

$$N = EF \left\{ \frac{u_1}{l} + \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{3} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 + \frac{\alpha^2}{5} (\alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta)^2 \right] \right\}. \quad (23)$$

Введем вектор обобщенных координат элемента в виде

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_6)^T = (X_0, Y_0, \alpha_0, \alpha_1, X_1, Y_1)^T. \quad (24)$$

Вариация

$$\delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i = \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \delta \mathbf{q}, \quad (25)$$

где вектор-столбец

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \left( \frac{\partial U}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_6} \right)^T. \quad (26)$$

Дифференцируя (22) по обобщенным координатам, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X_0} = -\frac{\partial U}{\partial X_1} &= -6\alpha \frac{EJ_z}{l} \theta^{(+)} \frac{\partial \beta}{\partial X_0} + Nl \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_0}, \\ \frac{\partial U}{\partial Y_0} = -\frac{\partial U}{\partial Y_1} &= -6\alpha \frac{EJ_z}{l} \theta^{(+)} \frac{\partial \beta}{\partial Y_0} + Nl \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y_0}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha_0} &= \frac{EJ_z}{l} (-\theta^{(-)} + 3\alpha\theta^{(+)}) + Nl \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_0}, \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} &= \frac{EJ_z}{l} (\theta^{(-)} + 3\alpha\theta^{(+)}) + Nl \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь введены обозначения:  $\theta^{(+)} = \theta_1 + \theta_0 = \alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta$ ,  $\theta^{(-)} = \theta_1 - \theta_0 = \alpha_1 - \alpha_0$ .

Объединяя (27) в матричной форме, имеем также

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \frac{EJ_z}{l} \left[ \theta^{(-)} (-\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) + 3\alpha\theta^{(+)} \left( -2 \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \right) \right] + Nl \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}}, \quad (28)$$

где  $\mathbf{e}_k$  ( $k = 3, 4$ ) – векторы-столбцы, элементы которых суть символы Кронекера:

$$\mathbf{e}_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \dots, \delta_{6k})^T. \quad (29)$$

Векторы-столбцы  $\partial \varepsilon / \partial \mathbf{q}$ ,  $\partial \beta / \partial \mathbf{q}$  имеют вид, аналогичный (26) с заменой  $U$  на  $\varepsilon$  или  $\beta$  соответственно.

Дифференцирование (16) и (19) по обобщенным координатам приводит к выражениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_0} &= -\frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} = -\frac{\cos \beta}{l} - \frac{\alpha^2}{10} \theta^{(+)} \frac{\partial \beta}{\partial X_0}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y_0} &= -\frac{\partial \varepsilon}{\partial Y_1} = -\frac{\sin \beta}{l} - \frac{\alpha^2}{10} \theta^{(+)} \frac{\partial \beta}{\partial Y_0}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_0} = \frac{1}{4} \left( -\frac{\theta^{(-)}}{3} + \frac{\alpha^2}{5} \theta^{(+)} \right), \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{4} \left( \frac{\theta^{(-)}}{3} + \frac{\alpha^2}{5} \theta^{(+)} \right),$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial X_0} = -\frac{\partial \beta}{\partial X_1} = \frac{\sin \beta}{\tilde{l}}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial Y_0} = -\frac{\partial \beta}{\partial Y_1} = -\frac{\cos \beta}{\tilde{l}}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_1} = 0. \quad (31)$$

Тригонометрические функции в (30), (31) определяются формулами (19).

### 2.3. Вариация работы инерционных сил

Проекциями векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  на оси инерциальной координатной системы  $OXY$  являются  $X$ ,  $Y$  и  $X_0$ ,  $Y_0$ . Величины  $x+u$  и  $v$  представляют собой проекции  $\tilde{\mathbf{r}}$  на подвижные оси  $\tilde{O}x$  и  $\tilde{O}y$ . Тогда

$$X = X_0 + (x+u) \cos \beta - v \sin \beta, \quad Y = Y_0 + (x+u) \sin \beta + v \cos \beta. \quad (32)$$

Учитывая (21), выражение для  $v$  из (13) перепишем в виде

$$v(x) = \alpha_0 \psi_0(x) + \alpha_1 \psi_1(x) - \beta \psi(x), \quad (33)$$

где введена вспомогательная функция

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) = l\alpha \left( \xi - 3\xi^2 + 2\xi^3 \right). \quad (34)$$

Принимая  $u = \varepsilon x$  ( $\varepsilon = \text{const}$ ) и учитывая (33), вместо (32) имеем

$$\begin{aligned} X &= X_0 + (1 + \varepsilon)x \cos \beta - (\alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 - \beta \psi) \sin \beta, \\ Y &= Y_0 + (1 + \varepsilon)x \sin \beta + (\alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 - \beta \psi) \cos \beta. \end{aligned} \quad (35)$$

Запишем выражение для  $\ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R}$  из (3). Обозначим через  $R_1, R_2$  проекции вектора  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_c$  на оси системы  $OXY$ . Тогда компоненты ускорения и вариации координат точки  $P$  имеют соответственно вид

$$\ddot{R}_1 = \ddot{X} - \dot{\omega} y_c, \quad \ddot{R}_2 = \ddot{Y} - \omega^2 y_c, \quad (36)$$

$$\delta R_1 = \delta X - y_c \delta(\beta + \theta), \quad \delta R_2 = \delta Y. \quad (37)$$

На основании (36), (37) скалярное произведение

$$\ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R} = (\ddot{X} - \dot{\omega} y_c) \delta X + (\ddot{Y} - \omega^2 y_c) \delta Y + (-\ddot{X} y_c + \dot{\omega} y_c^2) \delta(\beta + \theta). \quad (38)$$

Тогда вариация работы инерционных сил

$$\begin{aligned} \delta A_i &= - \int_0^l \rho \ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R} dF dx = -m \int_0^l (\ddot{X} \delta X + \ddot{Y} \delta Y) dx + m y_c \left[ \int_0^l \dot{\omega} \delta X dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^l \omega^2 \delta Y dx + \int_0^l \ddot{X} \delta(\beta + \theta) dx \right] - I_z \int_0^l \dot{\omega} \delta(\beta + \theta) dx, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $m = \int_F \rho dF$  – погонная масса стержневого элемента;  $y_c = \int_F \rho y_c dF / m$  – локальная координата центра массы сечения;  $I_z = \int_F \rho y_c^2 dF$  – массовый момент инерции.

Для упрощения вычислений правой части (39) введем далее иерархическую систему матричных обозначений и воспользуемся теоремой о дифференцировании сложной функции.

Рассматривая  $X$  и  $Y$  как функции обобщенных координат (24), формально имеем

$$\dot{X} = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial X}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{Y} = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{q}}. \quad (40)$$

Определим  $\partial X / \partial \mathbf{q}$  и  $\partial Y / \partial \mathbf{q}$ . Из (35) видно, что координаты  $X$  и  $Y$  можно рассматривать как сложные функции вида

$$X = X(X_0, \varepsilon, \beta, \alpha_0, \alpha_1), \quad Y = Y(Y_0, \varepsilon, \beta, \alpha_0, \alpha_1). \quad (41)$$

Тогда

$$\frac{\partial X}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial X_q}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial Y_q}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial Y}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \quad (42)$$

где  $X_q, Y_q$  – части  $X$  и  $Y$ , содержащие явно элементы  $\mathbf{q} = (X_0, Y_0, \alpha_0, \alpha_1, X_1, Y_1)^T$ .

Нетрудно видеть, что

$$X_q = X_0 - (\alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 - \beta \psi) \sin \beta, \quad Y_q = Y_0 + (\alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 - \beta \psi) \cos \beta.$$

Дифференцирование последних равенств по  $q_i$ , считая  $\beta$  величиной фиксированной, даёт

$$\frac{\partial X_q}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{e}_1 - (\psi_0 \mathbf{e}_3 + \psi_1 \mathbf{e}_4) \sin \beta, \quad \frac{\partial Y_q}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{e}_2 + (\psi_0 \mathbf{e}_3 + \psi_1 \mathbf{e}_4) \cos \beta. \quad (43)$$

Остальные элементы (42), зависящие от  $x$ , имеют вид

$$\frac{\partial X}{\partial \varepsilon} = x \cos \beta, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = x \sin \beta, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \beta} &= -[(1 + \varepsilon)x - \psi] \sin \beta - (\alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 - \beta \psi) \cos \beta, \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta} &= [(1 + \varepsilon)x - \psi] \cos \beta - (\alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 - \beta \psi) \sin \beta. \end{aligned} \quad (45)$$

Введём вектор, зависящий только от  $x$ :

$$\boldsymbol{\psi}(x) = (1, x, \psi(x), \psi_0(x), \psi_1(x))^T. \quad (46)$$

Это позволяет переписать (43)–(45) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_q}{\partial \mathbf{q}} &= (\mathbf{e}_1, 0, 0, -\sin \beta \mathbf{e}_3, -\sin \beta \mathbf{e}_4) \boldsymbol{\psi}, \\ \frac{\partial Y_q}{\partial \mathbf{q}} &= (\mathbf{e}_2, 0, 0, \cos \beta \mathbf{e}_3, \cos \beta \mathbf{e}_4) \boldsymbol{\psi}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varepsilon} = (0, \cos \beta, 0, 0, 0) \boldsymbol{\psi}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = (0, \sin \beta, 0, 0, 0) \boldsymbol{\psi},$$

$$\frac{\partial X}{\partial \beta} = (0, -(1 + \varepsilon) \sin \beta, \sin \beta + \beta \cos \beta, -\alpha_0 \cos \beta, -\alpha_1 \cos \beta) \boldsymbol{\psi},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta} = (0, (1 + \varepsilon) \cos \beta, -\cos \beta + \beta \sin \beta, -\alpha_0 \sin \beta, -\alpha_1 \sin \beta) \boldsymbol{\psi},$$

где векторы  $\mathbf{e}_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) даются (29). С учётом этих выражений формулы (42) запишем в матричной форме:

$$\frac{\partial X(x)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}(x), \quad \frac{\partial Y(x)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{B} \boldsymbol{\psi}(x),$$

где матрицы  $\mathbf{A}_{6 \times 5} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5)$  и  $\mathbf{B}_{6 \times 5} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5)$  формируются столбцами

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{a}_2 &= \cos \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} - (1 + \varepsilon) \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{b}_2 = \sin \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} + (1 + \varepsilon) \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \\ \mathbf{a}_3 &= (\sin \beta + \beta \cos \beta) \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{b}_3 = (-\cos \beta + \beta \sin \beta) \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \\ \mathbf{a}_4 &= -\mathbf{e}_3 \sin \beta - \alpha_0 \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{b}_4 = \mathbf{e}_3 \cos \beta - \alpha_0 \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \\ \mathbf{a}_5 &= -\mathbf{e}_4 \sin \beta - \alpha_1 \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{b}_5 = \mathbf{e}_4 \cos \beta - \alpha_1 \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Теперь формулы (40) принимают вид

$$\dot{X}(x) = \dot{q}^T \mathbf{A} \psi(x), \quad \dot{Y}(x) = \dot{q}^T \mathbf{B} \psi(x). \quad (48)$$

Дифференцируя (48) по времени, получаем компоненты ускорения:

$$\ddot{X}(x) = (\ddot{q}^T \mathbf{A} + \dot{q}^T \dot{\mathbf{A}}) \psi(x), \quad \ddot{Y}(x) = (\ddot{q}^T \mathbf{B} + \dot{q}^T \dot{\mathbf{B}}) \psi(x). \quad (49)$$

Столбцы матриц  $\dot{\mathbf{A}}$  и  $\dot{\mathbf{B}}$  получаются дифференцированием по времени (52). Соответствующие формулы в статье опущены.

Получим теперь выражения для инерционных членов, связанных с вращением сечения. Учитывая (21), формулу для  $\theta$  из (13) перепишем в виде

$$\theta(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x) - \beta(1 - \varphi(x)), \quad (50)$$

где введена вспомогательная функция

$$\varphi(x) = 1 - \varphi_0(x) - \varphi_1(x) = 6ae(\xi - \xi^2). \quad (51)$$

Тогда угол поворота сечения

$$\beta + \theta(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_0 \varphi_0(x) + \beta \varphi(x).$$

Введём вектор, зависящий только от  $x$ :

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = (\varphi(x), \varphi_0(x), \varphi_1(x))^T. \quad (52)$$

Тогда угловую скорость можно записать в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta} + \dot{\theta} = (\dot{\beta}, \dot{\alpha}_0, \dot{\alpha}_1) \boldsymbol{\varphi} = \dot{q}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}, \quad (53)$$

где матрица

$$\mathbf{C}_{6 \times 3} = \left( \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \right). \quad (54)$$

Возводя в квадрат (53), имеем

$$\omega^2 = \dot{q}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C}^T \dot{q}. \quad (55)$$

Дифференцируя (53), получаем угловое ускорение

$$\dot{\omega} = (\ddot{q}^T \mathbf{C} + \dot{q}^T \dot{\mathbf{C}}) \boldsymbol{\varphi}, \quad (56)$$

причём

$$\dot{\mathbf{C}} = \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mathbf{q}^2} \dot{\mathbf{q}}, 0, 0 \right). \quad (57)$$

Получим выражения для вариаций  $\delta X$ ,  $\delta Y$  и  $\delta(\beta + \theta)$ , входящих в (39). По аналогии с (48) имеем

$$\delta X = \psi^T \mathbf{A}^T \delta \mathbf{q}, \quad \delta Y = \psi^T \mathbf{B}^T \delta \mathbf{q}. \quad (58)$$

Вариация угла поворота сечения

$$\delta(\beta + \theta) = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C}^T \delta \mathbf{q}. \quad (59)$$

Подстановка (49), (55), (56), (58), (59) в (39) даёт

$$\begin{aligned} \delta A_i = & -\dot{q}^T \left\{ m \left[ \mathbf{A}\Psi\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\Psi\mathbf{B}^T - y_C \left( \mathbf{CZ}\mathbf{A}^T + \mathbf{AZ}^T\mathbf{C}^T \right) \right] + I_z \mathbf{C}\Phi\mathbf{C}^T \right\} - \\ & -\dot{q}^T \left\{ m \left[ \dot{\mathbf{A}}\Psi\mathbf{A}^T + \dot{\mathbf{B}}\Psi\mathbf{B}^T - y_C \left( \dot{\mathbf{C}}\mathbf{Z}\mathbf{A}^T + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{Z}^T\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\dot{\Theta}\mathbf{B}^T \right) \right] + \right. \\ & \left. + I_z \dot{\mathbf{C}}\Phi\mathbf{C}^T \right\} \delta q, \end{aligned} \quad (60)$$

где матрицы

$$\Psi = \int_0^l \psi\psi^T dx, \quad \mathbf{Z} = \int_0^l \phi\psi^T dx, \quad \Phi = \int_0^l \phi\phi^T dx, \quad \dot{\Theta} = \int_0^l \phi\phi^T \mathbf{C}^T \dot{q}\psi^T dx. \quad (61)$$

После интегрирования по  $x$  для элементов матриц  $\Psi_{5 \times 5}$ ,  $\mathbf{Z}_{3 \times 5}$  последовательно имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{11} = l, \quad \Psi_{12} = \frac{l^2}{2}, \quad \Psi_{13} = 0, \quad \Psi_{14} = -\Psi_{15} = \frac{l^2}{12}, \\ \Psi_{22} = \frac{l^3}{3}, \quad \Psi_{23} = -\frac{l^3}{60} \alpha, \quad \Psi_{24} = \frac{l^3}{24} \left( 1 - \frac{\alpha}{5} \right), \quad \Psi_{25} = -\frac{l^3}{24} \left( 1 + \frac{\alpha}{5} \right), \\ \Psi_{33} = \frac{l^3}{210} \alpha^2, \quad \Psi_{34} = \Psi_{35} = \frac{l^3}{420} \alpha^2, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\Psi_{44} = \Psi_{55} = \frac{l^3}{120} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{7} \right), \quad \Psi_{45} = \frac{l^3}{120} \left( -1 + \frac{\alpha^2}{7} \right);$$

$$Z_{11} = l\alpha, \quad Z_{12} = \frac{l^2}{2} \alpha, \quad Z_{13} = 0, \quad Z_{14} = -Z_{15} = \frac{l^2}{10} \alpha,$$

$$Z_{21} = Z_{31} = \frac{l}{2} (1 - \alpha), \quad Z_{22} = \frac{l^2}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} \right), \quad Z_{23} = -Z_{33} = \frac{l^2}{60} \alpha, \quad (63)$$

$$Z_{24} = -Z_{35} = \frac{l^2}{24} (1 - \alpha), \quad Z_{25} = -Z_{34} = -\frac{l^2}{24} \left( 1 - \frac{7\alpha}{5} \right), \quad Z_{32} = l^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right).$$

При вычислении элементов матриц  $\Phi_{3 \times 3}$  и  $\Theta_{3 \times 5}$  удобно использовать выражения  $\phi_0(x) = 1 - \xi - \phi(x)/2$ ,  $\phi_1(x) = \xi - \phi(x)/2$ , которые сводят процедуру интегрирования к последовательности однотипных операций. Функция  $\phi(x)$  даётся (51). В результате для элементов симметричной матрицы  $\Phi_{3 \times 3}$  имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = \frac{6}{5} l\alpha^2, \quad \Phi_{12} = \Phi_{13} = l\alpha \left( \frac{1}{2} - \frac{3\alpha}{5} \right), \\ \Phi_{22} = \Phi_{33} = \frac{l}{3} - \frac{l}{2} \alpha \left( 1 - \frac{3\alpha}{5} \right), \quad \Phi_{23} = \frac{l}{6} - \frac{l}{2} \alpha \left( 1 - \frac{3\alpha}{5} \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Преобразуем выражение для  $\dot{\Theta}$ , содержащее  $\dot{q}$ . Очевидно, что  $\phi\phi^T$  представляет собой матрицу  $3 \times 3$ , а величина  $\mathbf{C}^T \dot{q}$  – столбец  $(\dot{\beta}, \dot{\alpha}_0, \dot{\alpha}_1)^T$ . Поэтому произведение  $\mathbf{C}^T \dot{q}\psi^T$  представляет собой матрицу размерностью  $3 \times 5$  вида

$$C^T \dot{q} \psi^T = (C^T \dot{q}, x C^T \dot{q}, \psi(x) C^T \dot{q}, \psi_0(x) C^T \dot{q}, \psi_1(x) C^T \dot{q}).$$

Подстановка этого соотношения в выражение для  $\dot{\Theta}$  из (61) приводит к матрице

$$\dot{\Theta} = (\Phi \cdot C^T \dot{q}, \Phi^x \cdot C^T \dot{q}, \Phi^\psi \cdot C^T \dot{q}, \Phi^{\psi_0} \cdot C^T \dot{q}, \Phi^{\psi_1} \cdot C^T \dot{q}), \quad (65)$$

где

$$\Phi^x = \int_0^l x \varphi \varphi^T dx, \quad \Phi^\psi = \int_0^l \psi \varphi \varphi^T dx, \quad \Phi^{\psi_0} = \int_0^l \psi_0 \varphi \varphi^T dx, \quad \Phi^{\psi_1} = \int_0^l \psi_1 \varphi \varphi^T dx. \quad (66)$$

В результате интегрирования (66) по  $x$  получаем выражения для элементов симметричных матриц размерностью  $3 \times 3$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^x &= \frac{3l^2}{5} \alpha^2, \quad \Phi_{12}^x = \frac{l^2}{5} \alpha \left(1 - \frac{3\alpha}{2}\right), \quad \Phi_{13}^x = \frac{3l^2}{10} \alpha (1 - \alpha), \\ \Phi_{22}^x &= \frac{l^2}{12} - \frac{l^2}{5} \alpha \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right), \quad \Phi_{23}^x = \frac{l^2}{12} - \frac{l^2}{4} \alpha \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right), \\ \Phi_{33}^x &= \frac{l^2}{4} - \frac{3l^2}{10} \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right); \end{aligned} \quad (67)$$

$$\Phi_{11}^\psi = 0, \quad \Phi_{12}^\psi = -\Phi_{12}^\psi = \frac{l^2}{70} \alpha^2, \quad (68)$$

$$\Phi_{22}^\psi = -\Phi_{33}^\psi = \frac{l^2}{10} \alpha \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha}{7}\right), \quad \Phi_{23}^\psi = 0;$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^{\psi_0} &= \frac{9l^2}{70} \alpha^2, \quad \Phi_{12}^{\psi_0} = \frac{l^2}{5} \alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{2\alpha}{7}\right), \quad \Phi_{13}^{\psi_0} = \frac{l^2}{2} \alpha \left(\frac{1}{10} - \frac{\alpha}{7}\right), \\ \Phi_{22}^{\psi_0} &= \frac{l^2}{8} \left[\frac{1}{5} - \alpha \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{5}\right)\right], \quad \Phi_{23}^{\psi_0} = \frac{l^2}{20} \left[\frac{1}{3} - \alpha \left(1 - \frac{9\alpha}{14}\right)\right], \\ \Phi_{33}^{\psi_0} &= \frac{l^2}{40} \left[1 - \alpha \left(\frac{7}{3} - \frac{11\alpha}{7}\right)\right]; \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^{\psi_1} &= -\Phi_{11}^{\psi_0}, \quad \Phi_{12}^{\psi_1} = -\Phi_{13}^{\psi_0}, \quad \Phi_{13}^{\psi_1} = -\Phi_{12}^{\psi_0}, \\ \Phi_{22}^{\psi_1} &= -\Phi_{33}^{\psi_0}, \quad \Phi_{23}^{\psi_1} = -\Phi_{23}^{\psi_0}, \quad \Phi_{33}^{\psi_1} = -\Phi_{22}^{\psi_0}. \end{aligned} \quad (70)$$

Таким образом, все матрицы в (60) нами определены.

## 2.4. Учёт сосредоточенных масс

Стержневые конструкции, как правило, состоят из стержневых элементов и набора твёрдых тел. Для общности будем считать, что концы каждого стержневого элемента жестко связаны с твёрдыми телами. Примем, что размеры их малы по сравнению с длиной элемента. Это позволяет массовые характеристики тел: массу, массовые статические моменты и массовый момент инерции сосредоточить в полюсах узловых сечений.

Твёрдые тела будем обозначать «0» и «1» соответственно нумерации краевых сечений. Каждое тело свяжем с системой координат  $O_k x_k y_k z_k$  ( $k = 0, 1$ ) так, чтобы ось  $O_k x_k$

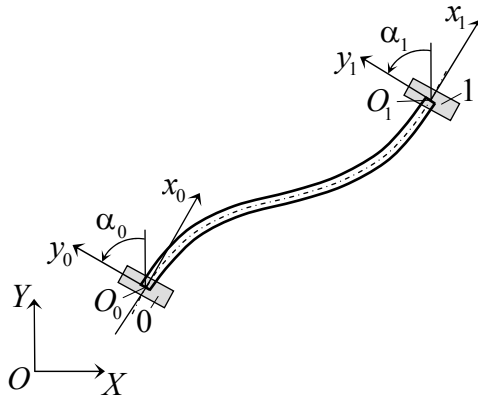


Рис. 4. Присоединённые массы элемента и связанные с ними координатные системы

Fig. 4. Joined to the element masses and its coordinate systems

была направлена по нормали к краевым сечениям стержня, как это показано на рис. 4. В этом случае углы поворота твёрдых тел, ассоциированных с узлами «0» и «1», соответственно равны  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ .

Для каждого твёрдого тела объёмом  $V_k$ , выполненного из условного материала с массовой плотностью  $\rho_k$ , имеем [31]

$$\delta A_i^{(k)} = - \int_{V_k} \rho_k (\ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R}) dV_k = - \delta \mathbf{R}_k^T \left[ M^{(k)} \ddot{\mathbf{R}}_k + \ddot{\alpha}_k \begin{pmatrix} -S_x^{(k)} \\ S_y^{(k)} \end{pmatrix} - \dot{\alpha}_k^2 \begin{pmatrix} S_y^{(k)} \\ S_x^{(k)} \end{pmatrix} \right] - \delta \alpha_k \left[ (-S_x^{(k)}, S_y^{(k)}) \ddot{\mathbf{R}}_k + I_z^{(k)} \ddot{\alpha}_k \right]. \quad (71)$$

Здесь  $M^{(k)} = \int_{V_k} \rho_k dV_k$  – масса  $k$ -го тела;  $S_x^{(k)} = \int_{V_k} \rho_k y_k dV_k$ ,  $S_y^{(k)} = \int_{V_k} \rho_k x_k dV_k$  – массовые статические моменты тела относительно осей  $O_k x_k$  и  $O_k y_k$  соответственно;  $I_z^{(k)} = \int_{V_k} \rho_k (x_k^2 + y_k^2) dV_k$  – массовый момент инерции тела относительно оси  $O_k z_k$ . Имеем также  $S_x^{(k)} = M^{(k)} y_C^{(k)}$ ,  $S_y^{(k)} = M^{(k)} x_C^{(k)}$ ,  $I_z^{(k)} = M^{(k)} i_z^{(k)2}$ , где  $x_C^{(k)}$ ,  $y_C^{(k)}$  – координаты центра тяжести  $k$ -го тела,  $i_z^{(k)}$  – его радиус инерции.

Представим вектор  $\mathbf{q}$  (24) в виде  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)^T$ , где  $\mathbf{q}_0 = (X_0, Y_0, \alpha_0)^T$ ,  $\mathbf{q}_1 = (\alpha_1, X_1, Y_1)^T$ . Тогда для твёрдых тел вместо (71) имеем

$$\delta A_i^{(k)} = - \delta \mathbf{q}_k^T [\mathbf{M}_k \ddot{\mathbf{q}}_k - \mathbf{S}_k \dot{\mathbf{q}}_k^T \mathbf{E}_k \dot{\mathbf{q}}_k]; \quad k = 0, 1. \quad (72)$$

Здесь матрицы

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} M^{(0)} & 0 & -S_x^{(0)} \\ 0 & M^{(0)} & S_y^{(0)} \\ -S_x^{(0)} & S_y^{(0)} & I_z^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} S_y^{(0)} \\ S_x^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (73)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} I_z^{(1)} - S_x^{(1)} & S_y^{(1)} \\ -S_x^{(1)} & M^{(1)} & 0 \\ S_y^{(1)} & 0 & M^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ S_y^{(1)} \\ S_x^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для суммы  $\delta A_i^b = \delta A_i^{(0)} + \delta A_i^{(1)}$  на основании (72), (73) имеем выражение

$$\delta A_i^b = - \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{S}_b \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{E}_b \dot{\mathbf{q}}), \quad (74)$$

в правой части которого матрицы

$$\mathbf{M}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{S}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_1 \end{pmatrix}. \quad (75)$$

В итоге вариация работы инерционных сил стержневого элемента с массами по его концам представляет собой сумму

$$\delta A_i^\Sigma = \delta A_i + \delta A_i^b, \quad (76)$$

где  $\delta A_i$ ,  $\delta A_i^b$  определяются выражениями (60) и (74).

## 2.5. Вариация работы внешних сил

Обозначим компоненты внешней погонной силы через  $p_x$ ,  $p_y$  и через  $p_\mu$  внешний погонный момент. Будем также считать, что в узлах  $k = 0, 1$  элемента действуют сосредоточенные силы с компонентами  $Q_X^{(k)}$ ,  $Q_Y^{(k)}$  и моменты  $Q_M^{(k)}$ . Введем вектор узловых силовых факторов  $\mathbf{Q}_* = (Q_X^{(0)}, Q_Y^{(0)}, Q_M^{(0)}, Q_M^{(1)}, Q_X^{(1)}, Q_Y^{(1)})^T$ . Тогда вариация работы внешних сил

$$\delta A_p = \mathbf{Q}_*^T \delta \mathbf{q} + \int_0^l [p_x \delta X + p_y \delta Y + p_\mu \delta(\beta + \theta)] dx$$

или, с учётом (58), (59),

$$\delta A_p = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}, \quad (77)$$

где

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_* + \int_0^l \{ [p_x(x) \mathbf{A} + p_y(x) \mathbf{B}] \Psi(x) + p_\mu(x) \mathbf{C} \varphi(x) \} dx \quad (78)$$

– вектор обобщенных сил.

Если считать, что погонная нагрузка распределяется по длине элемента линейно, т.е.  $p_s = p_s^{(0)} + (p_s^{(1)} - p_s^{(0)}) \xi$  ( $s = x, y, \mu$ ;  $\xi = x/l$ ), то после интегрирования вместо (78) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & \mathbf{Q}_* + \mathbf{A} \left[ p_x^{(0)} \Psi_1 + \frac{1}{l} (p_x^{(1)} - p_x^{(0)}) \Psi_2 \right] + \\ & + \mathbf{B} \left[ p_y^{(0)} \Psi_1 + \frac{1}{l} (p_y^{(1)} - p_y^{(0)}) \Psi_2 \right] + \mathbf{C} \left[ p_\mu^{(0)} \mathbf{Z}_1 + \frac{1}{l} (p_\mu^{(1)} - p_\mu^{(0)}) \mathbf{Z}_2 \right], \end{aligned} \quad (79)$$

где  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$  – первые и вторые столбцы матриц  $\Psi$ ,  $\mathbf{Z}$  с элементами (62), (63).

## 2.6. Уравнения движения

Пронумеруем конечные элементы от 1 до  $N$  и обозначим через  $\mathbf{q}^{(k)}$  вектор обобщенных координат  $k$ -го элемента (24). Тогда вариационное уравнение (2) для  $k$ -го элемента можно записать в виде



$$\left(\ddot{\mathbf{q}}^{(k)T} \mathcal{M}^{(k)} - \mathbf{F}^{(k)}\right) \delta \mathbf{q}^{(k)} = 0. \quad (80)$$

Здесь  $\mathcal{M}^{(k)} = \mathbf{M}_b^{(k)} + \mathbf{M}^{(k)}$  – матрица масс  $k$ -го элемента, где  $\mathbf{M}_b^{(k)}$  – матрица присоединённых масс в виде (75);  $\mathbf{M}^{(k)}$  – матрица массы собственно стержневого элемента в виде

$$\mathbf{M}^{(k)} = m \left[ \mathbf{A} \Psi \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \Psi \mathbf{B}^T - y_c \left( \mathbf{C} \mathbf{Z} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Z}^T \mathbf{C}^T \right) \right] + I_z \mathbf{C} \Phi \mathbf{C}^T; \quad (81)$$

вектор-столбец

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(k)} = & -\dot{\mathbf{q}}^T \left\{ m \left[ \dot{\mathbf{A}} \Psi \mathbf{A}^T + \dot{\mathbf{B}} \Psi \mathbf{B}^T - y_c \left( \dot{\mathbf{C}} \mathbf{Z} \mathbf{A}^T + \dot{\mathbf{A}} \mathbf{Z}^T \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \dot{\mathbf{O}} \mathbf{B}^T \right) \right] + \right. \\ & \left. + I_z \dot{\mathbf{C}} \Phi \mathbf{C}^T \right\} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (82)$$

представляет собой сумму нелинейных инерционных сил, нелинейных сил упругости и обобщенных внешних сил. Правые части (81) и (82) зависят от номера элемента, который как индекс для упрощения записи опущен.

Для системы элементов, образующих конструкцию, имеем

$$\sum_{k=1}^N \left( \ddot{\mathbf{q}}^{(k)T} \mathcal{M}^{(k)} - \mathbf{F}^{(k)} \right) \delta \mathbf{q}^{(k)} = 0. \quad (83)$$

Группировка множителей при одинаковых вариациях обобщенных координат (ассемблирование) позволяет переписать (83) в виде

$$\left( \ddot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} - \mathbf{F}^T \right) \delta \mathbf{q} = 0, \quad (84)$$

где  $\mathbf{q} = \left( \dots X^{(i)}, Y^{(i)}, \alpha_0^{(i)}, \alpha_1^{(i)} \dots \right)^T$  – вектор-столбец всех обобщенных координат задачи, где индекс  $i$  – порядковый номер узла конечно-элементной сетки стержневой системы;  $\mathcal{M}$  – матрица масс системы;  $\mathbf{F}$  – суммарный вектор-столбец силовых факторов системы, соответствующих обобщенным координатам.

Рассмотрим далее случай последовательного соединения стержневых элементов, когда  $k$ -му элементу сопоставляются узлы с номерами  $k$  и  $k+1$ .

Вектор-столбец  $\mathbf{q}^{(k)}$  (24) представим в виде  $\mathbf{q}^{(k)} = \left( \mathbf{r}^{(k)T}, \boldsymbol{\alpha}^{(k)T}, \mathbf{r}^{(k+1)T} \right)^T$ , где  $\mathbf{r}^{(k)} = \left( X_0^{(k)}, Y_0^{(k)} \right)^T$ ,  $\boldsymbol{\alpha}^{(k)} = \left( \alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)} \right)^T$ ,  $\mathbf{r}^{(k+1)} = \left( X_1^{(k)}, Y_1^{(k)} \right)^T$ . Соответственно такому разбиению элементную матрицу масс  $\mathcal{M}^{(k)}$  и вектор-столбец  $\mathbf{F}^{(k)}$  представим в блочной форме  $\mathcal{M}^{(k)} = \left\| \mathcal{M}_{ij}^{(k)} \right\|$ ,  $\mathbf{F}^{(k)} = \left\| \mathbf{F}_i^{(k)} \right\|$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ . Это позволяет переписать уравнение (83) в виде

$$\begin{aligned} & \left( \ddot{\mathbf{r}}^{(1)T} \mathcal{M}_{11}^{(1)} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)T} \mathcal{M}_{12}^{(1)} + \ddot{\mathbf{r}}^{(2)T} \mathcal{M}_{13}^{(1)} + \mathbf{F}_1^{(1)} \right) \delta \mathbf{r}^{(1)} + \\ & + \sum_{k=2}^N \left\{ \left[ \ddot{\mathbf{r}}^{(k-1)T} \mathcal{M}_{13}^{(k-1)} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(k-1)T} \mathcal{M}_{23}^{(k-1)} + \ddot{\mathbf{r}}^{(k)T} \left( \mathcal{M}_{33}^{(k-1)} + \mathcal{M}_{11}^{(k)} \right) + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)T} \mathcal{M}_{12}^{(k)} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \ddot{\mathbf{r}}^{(k+1)T} \mathcal{M}_{13}^{(k)} + \left( \mathbf{F}_3^{(k-1)} + \mathbf{F}_1^{(k)} \right) \right] \delta \mathbf{r}^{(k)} + \right. \\ & \quad \left. + \left[ \ddot{\mathbf{r}}^{(k)T} \mathcal{M}_{12}^{(k)} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)T} \mathcal{M}_{22}^{(k)} + \ddot{\mathbf{r}}^{(k+1)T} \mathcal{M}_{23}^{(k)} + \mathbf{F}_2^{(k)} \right] \delta \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \right\} + \\ & + \left( \ddot{\mathbf{r}}^{(N)T} \mathcal{M}_{13}^{(N)} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(N)T} \mathcal{M}_{23}^{(N)} + \ddot{\mathbf{r}}^{(N+1)T} \mathcal{M}_{33}^{(N)} + \mathbf{F}_3^{(N)} \right) \delta \mathbf{r}^{(N+1)} = 0, \end{aligned} \quad (85)$$

откуда видна структура  $\mathcal{M}$  – матрицы масс системы, которая образуется матричными блоками

$$\mathcal{B}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{13}^{(k-1)} & \mathcal{M}_{23}^{(k-1)} & \mathcal{M}_{33}^{(k-1)} + \mathcal{M}_{11}^{(k)} & \mathcal{M}_{12}^{(k)} & \mathcal{M}_{13}^{(k)} \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_{12}^{(k)} & \mathcal{M}_{22}^{(k)} & \mathcal{M}_{23}^{(k)} \end{pmatrix},$$

где  $\mathcal{M}_{33}^{(k-1)} + \mathcal{M}_{11}^{(k)}$ ,  $\mathcal{M}_{22}^{(k)}$  являются диагональными матричными элементами  $\mathcal{M}$ .

Будем считать, что стержневые элементы последовательно соединяются посредством шарниров, которые создают упругое сопротивление изменению углов между осями соседних элементов. Рассмотрим сочленение стержневых элементов с номерами  $k-1$  и  $k$ . Пусть  $\varpi^{(k)}$  – угол установки нейтрального положения пружины, а  $\kappa^{(k)}$  – её жесткость. Потенциальная энергия всех пружин  $U_* = 1/2 \sum_{k=2}^N \kappa^{(k)} (\alpha_0^{(k)} - \alpha_1^{(k-1)} - \varpi^{(k)})^2$ . Тогда вариация

$$\delta U_* = \sum_{k=2}^N \kappa^{(k)} (\alpha_0^{(k)} - \alpha_1^{(k-1)} - \varpi^{(k)}) (\delta \alpha_0^{(k)} - \delta \alpha_1^{(k-1)}) = (\partial U_* / \partial \mathbf{q})^T \delta \mathbf{q}. \quad (86)$$

Из (86) видно, что элементами вектора-столбца  $(\partial U_* / \partial \mathbf{q})^T$  с номерами  $4 + 12(k-1)$ ,  $9 + 12(k-1)$  являются соответственно величины  $-M_*^{(k)}$  и  $M_*^{(k)}$ , где  $M_*^{(k)} = \kappa^{(k)} (\alpha_0^{(k)} - \alpha_1^{(k-1)} - \varpi^{(k)})$  представляет собой упругий момент в шарнире  $k$ -го узла. Остальные – нулевые.

Аналогичным образом можно учесть силы демпфирования в шарнирных соединениях. В случае вязкого демпфирования вариация их работы

$$\delta A_* = - \sum_{k=2}^N v^{(k)} (\dot{\alpha}_0^{(k)} - \dot{\alpha}_1^{(k-1)}) (\delta \alpha_0^{(k)} - \delta \alpha_1^{(k-1)}) = -\mathbf{Q}_*^T \delta \mathbf{q}, \quad (87)$$

где вектор-столбец  $\mathbf{Q}_*$  формируется аналогично  $(\partial U_* / \partial \mathbf{q})^T$ .

На основании (86), (87) величины  $U$  и  $\mathbf{Q}$  в правой части выражения для  $\mathcal{F}^{(k)}$  (82) следует заменить на  $U^\Sigma = U + U_*$  и  $\mathbf{Q}^\Sigma = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_*$ .

Вариации обобщенных координат задачи  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) не являются свободными, поскольку на них наложены кинематические связи в виде (5).

Уравнения связей (4) запишем в матричной форме

$$\mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{d}, \quad (88)$$

где  $\mathbf{D} = \|D_{ij}\|_{m \times n}$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ ,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)^T$ ;  $n > m$ .

Тогда синхронное варьирование условий (88) приводит к дополнительным кинематическим связям между вариациями обобщенных координат в виде

$$\mathbf{D} \delta \mathbf{q} = 0. \quad (89)$$

Для учёта (89) в уравнениях движения введём неопределённые множители Лагранжа. Считая первые  $n-m$  элементов вектора-столбца  $\mathbf{q}$  независимыми, представим его в виде

$$\mathbf{q}^T = (\mathbf{q}_{n-m}^T, \mathbf{q}_m^T), \quad (90)$$

где  $\mathbf{q}_{n-m}^T = (q_1, q_2, \dots, q_{n-m})$ ,  $\mathbf{q}_m^T = (q_{n-m+1}, q_{n-m+2}, \dots, q_n)$ . В соответствии с таким разбиением матрицу  $\mathbf{D}$  запишем как

$$\mathbf{D} = (\mathbf{D}_{n-m}, \mathbf{D}_m), \quad (91)$$

где

$$\mathbf{D}_{n-m} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1,n-m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{m1} & D_{m2} & \cdots & D_{1,n-m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_m = \begin{pmatrix} D_{1,n-m+1} & D_{1,n-m+2} & \cdots & D_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{m,n-m+1} & D_{m,n-m+2} & \cdots & D_{mn} \end{pmatrix} \quad (92)$$

представляют собой матричные блоки размерностью  $m \times (n-m)$  и  $m \times m$  соответственно.

Аналогично разбиению (90) вектор-столбец  $\mathcal{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{F}$  в (84) представим в виде

$$\ddot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} - \mathbf{F}^T = \mathcal{L}^T = (\mathcal{L}_{n-m}^T, \mathcal{L}_m^T). \quad (93)$$

Преобразуем теперь (84), используя обозначения (90), (91), (93) и добавляя к левой части (84) левую часть (89), умноженную слева на вектор неопределенных множителей Лагранжа  $\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ . В результате вместо (84) имеем

$$[\mathcal{L}_{n-m}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D}_{n-m}] \delta \mathbf{q}_{n-m} + [\mathcal{L}_m^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D}_m] \delta \mathbf{q}_m = 0. \quad (94)$$

Множители Лагранжа (элементы  $\boldsymbol{\lambda}$ ), определим из условия  $\mathcal{L}_m^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D}_m = 0$ , откуда имеем  $\boldsymbol{\lambda} = -(\mathbf{D}_m^T)^{-1} \mathcal{L}_m$ . Подстановка этого выражения в (94) приводит к равенству  $\mathcal{L}_{n-m} - (\mathbf{D}_m^T)^{-1} \mathcal{L}_m = 0$  или

$$(\mathbf{E}_m, \mathbf{0}_{n-m}) \mathcal{L} + (\mathbf{0}_m, -\mathbf{D}_{n-m}^T (\mathbf{D}_m^T)^{-1}) \mathcal{L} = \mathcal{T} (\mathcal{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{F}) = 0, \quad (95)$$

где  $\mathbf{E}_m, \mathbf{0}_m$  – единичная и нулевая матрицы размерностью  $m \times m$ ;  $\mathcal{T}$  – матрица преобразования размерностью  $m \times n$  вида

$$\mathcal{T} = (\mathbf{E}_m, -\mathbf{D}_{n-m}^T (\mathbf{D}_m^T)^{-1}).$$

Систему (95) необходимо дополнить матричным уравнением связей (88) и интегрировать по времени совместно.

## 2.7. Моделирование раскрытия трехстержневой системы

Представляют практический интерес задачи о раскрытии стержневых систем по предписанным законам управления. В этом случае

$$\alpha_k^{(j)} - \alpha_k^{(i)} = \varphi_k(t),$$

где  $k$  – номер узла (шарнира), где соединяются элементы с номерами  $j$  и  $i$ ;  $\varphi_k(t)$  – заданная функция. Вариация кинематической связи даёт равенство  $\delta \alpha_k^{(j)} = \delta \alpha_k^{(i)}$ .

В качестве примера далее рассматривается система из трех гибких стержней, соединенных последовательно через шарниры (рис. 5). Считается, что поперечные сечения стержней имеют одинаковые геометрические и жесткостные характеристики. Для расчетов приняты следующие значения параметров задачи:  $EF = 7,2 \cdot 10^6$  Н,  $EJ = 60$  Н·м<sup>2</sup>,  $GF_c = 2,8 \cdot 10^6$  Н, массовая плотность  $\rho = 2800$  кг/м<sup>3</sup>. Силы гравитации и демпфирование колебаний не учитываются.

На рис. 5 показана нумерация конечных элементов и узлов (номера конечных элементов со 2 по 6, с 9 по 13 и с 16 по 20 опущены). Узел 1 считается неподвижным, однако он может свободно вращаться относительно системы координат  $OXY$ . Каждый стержень имеет длину  $L = 2$  м. Все конечные элементы системы одинаковы и имеют длину  $l = 0,286$  м. Узлы 8, 9 и 16, 17 представляют собой шарниры, на перемещения которых ограничения не накладываются. Начальной конфигурацией системы является прямая горизонтальная линия длины  $L = 2$  м. Такому состоянию отвечает такая упаковка системы, когда угол между элементом 1 и осью  $OX$   $\varphi_1(0) = 0$ , угол между элементами 7 и 8  $\varphi_2(0) = \pi$  и угол между элементами 14 и 15  $\varphi_3 = 0$ .

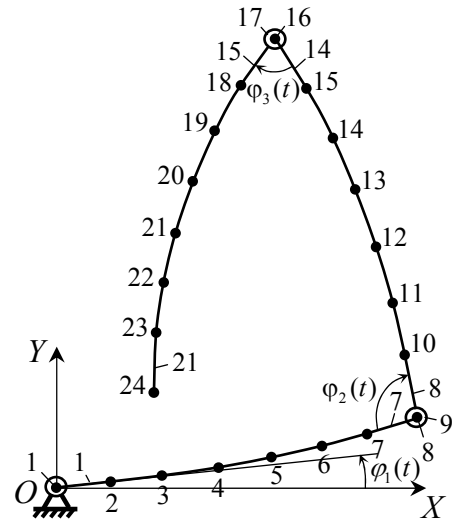


Рис. 5. Конечно-элементная модель  
Fig. 5. Finite-element model

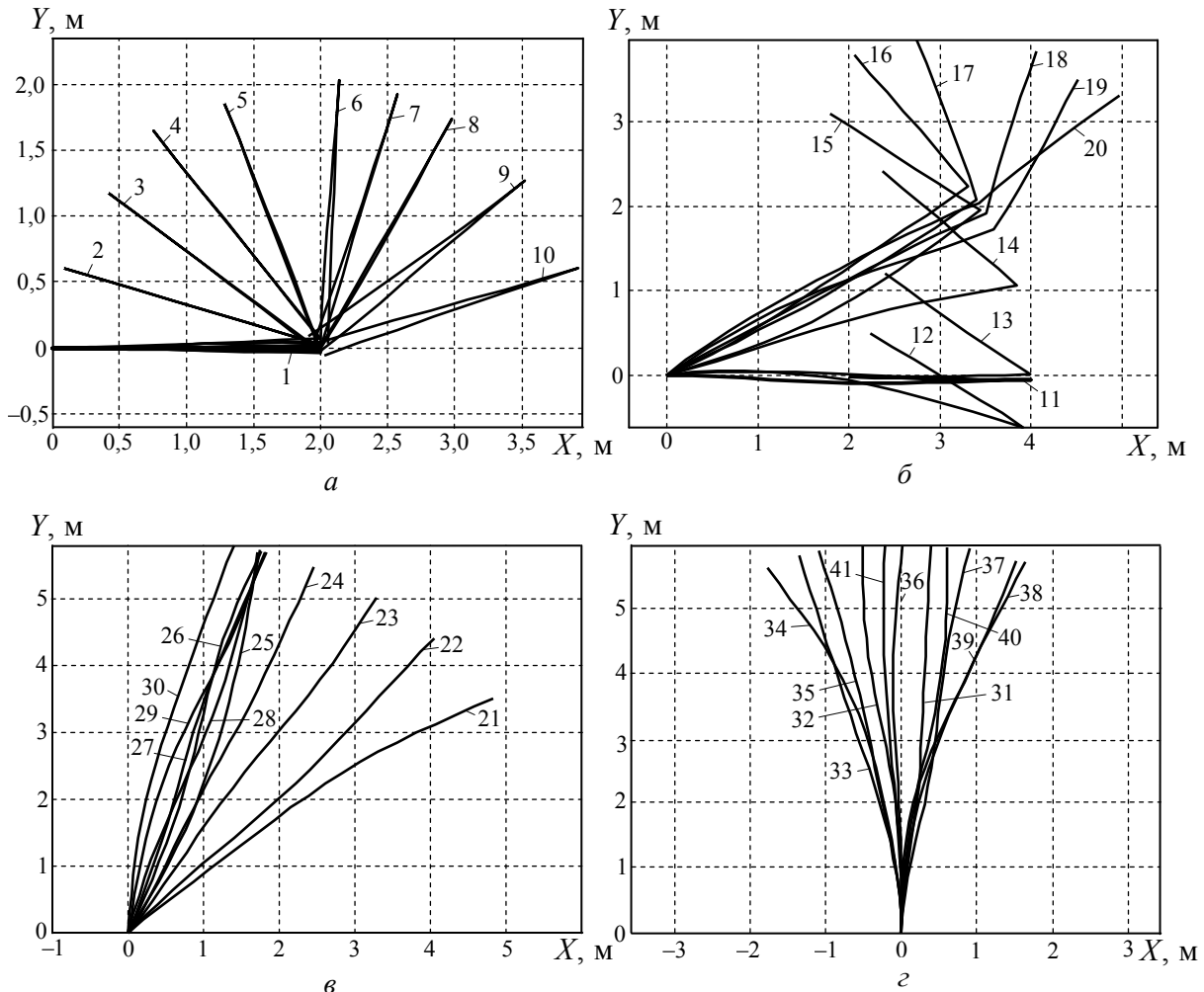


Рис. 6. Конфигурации конструкции в различные временные интервалы:

$0 < t \leq 5s$  (а),  $5 < t \leq 10s$  (б),  $10 < t \leq 15s$  (в) и  $15 < t \leq 20s$  (г)

Fig. 6. System configurations in different time intervals:

$0 < t \leq 5s$  (a),  $5 < t \leq 10s$  (b),  $10 < t \leq 15s$  (c) и  $15 < t \leq 20s$  (d)

Раскрытие осуществляется в результате предписанного изменения углов между осями стержней в местах их соединения, а также в результате предписанного изменения угла между осью стержня с шарниром в узле  $l$  и направлением оси  $OX$ . Сначала раскрывается угол  $\varphi_2(t)$  по часовой стрелке, затем – угол  $\varphi_3(t)$  по часовой стрелке и угол  $\varphi_1(t)$  против часовой стрелки. Закон раскрытия системы определяется формулами

$$\varphi_1(0 \leq t \leq 5) = 0, \quad \varphi_1(5 < t \leq 15) = \frac{t-5}{10} \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1(t > 15) = \frac{\pi}{2};$$

$$\varphi_2(0 \leq t \leq 5) = -\frac{t}{5} \pi, \quad \varphi_2(t > 5) = -\pi;$$

$$\varphi_3(0 \leq t \leq 5) = 0, \quad \varphi_3(5 \leq t \leq 10) = -\frac{t-5}{5} \pi, \quad \varphi_3(t > 10) = -\pi.$$

Для повышения обусловленности численного решения задача преобразовывалась к новому аргументу – длине ее интегральной кривой [30]. Параметризованные таким образом уравнения интегрировались неявным методом линейного ускорения с использованием простых итераций во временном интервале  $0 \leq t \leq 20$  с. Шаг интегрирования адаптировался к процессу построения интегральной кривой по оценке локальной погрешности вычислений. В качестве максимальной допустимой величины локальной погрешности принималась величина  $10^{-8}$ . В свою очередь, итерации контролировались по оценке погрешности вычислений, максимальное допустимое значение которой принималось равным  $10^{-10}$ .

Результаты интегрирования представлены на рис. 6 и 7. На рис. 6 представлены различные конфигурации стержневой системы, соответствующие движению в интервале  $0 \leq t \leq 20$  с и упорядоченные по времени с шагом около 0,5 с. На рис. 7 показаны координаты  $X_k, Y_k$  как функции времени  $t$  для ряда значений номера узлов  $k$ .

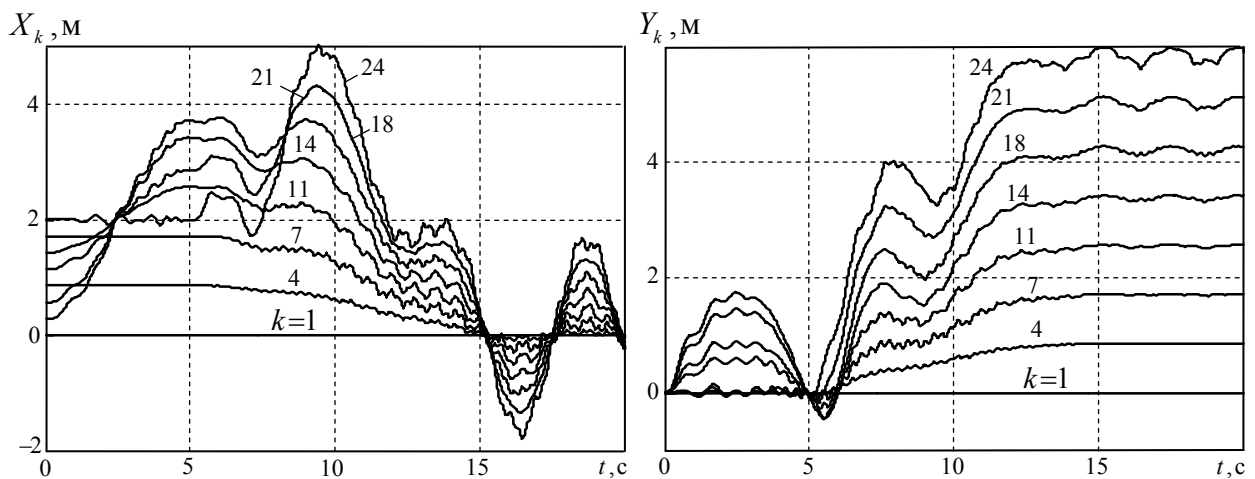


Рис. 7. Зависимости узловых координат от времени  
 Fig. 7. Time-dependent nodal coordinates

## Заключение

В работе показан способ получения конечно-элементных уравнений движения гибкой стержневой систем со связями на основе вариационного принципа Даламбера-Лагранжа. В этих уравнениях максимально полно учтены слагаемые, учитывающие нелинейный характер упругого деформирования, осреднённый сдвиг, а также нелинейности инерционных сил. Для упрощения записей рассмотрена плоская задача динамики для механической системы, элементы которой представляют собой стержни с сосредоточенными массами, соединенные друг с другом посредством шарниров. Считается, что в шарнирах существуют связи, которые математически записываются в виде дополнительных линейных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат задачи. Такая формулировка позволяет в общей форме описать динамику гибких стержневых систем с учётом изменения её геометрии в результате не только деформирования стержневых элементов, но и изменения углов их соединения в шарнирах по предписанным законам управления. В последующих статьях предполагается представить результаты сравнительных исследований на основе численного интегрирования уравнений движения в различных формах записи.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-08-06259).*

## Библиографический список

1. Hodges D.H. Finite rotating and nonlinear beam kinematics // *Vertica*. – 1987. – Vol. 11, No. 1/2. – P. 297-307.
2. Misra A.K., Modi V.J. A survey on the dynamics and control of tethered satellite systems // *Advances in Astronautical Sciences*. – 1987. – Vol. 62. – P. 667–719 ([https:// www.researchgate.net/publication/234283745](https://www.researchgate.net/publication/234283745)) (дата обращения: 08.11.2016).
3. Iura M., Atluri S.N. Dynamic analysis of finitely stretched and rotated three-dimensional space-curved beams // *Computers & Structures*. – 1988. – Vol. 29. – No. 5. – P. 875–889 ([http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-61381-4\\_300](http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-61381-4_300)) (дата обращения: 08.11.2016).
4. Ferri A.A. Modeling and analysis of nonlinear sleeve joints of large space structures // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1988. – Vol. 25. – No. 5. – P. 354–360 (<http://dx.doi.org/10.2514/3.26012>) (дата обращения: 08.11.2016).
5. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. – М.: Наука, 1990. – 330 с.
6. Folkman S.L., Rowsell E.A., Ferney G.D. Gravity effects on damping of a truss using pinned joints // *Dynamics Specialists Conference «Structures, Structural Dynamics and Materials», AIAA-94-1685-CP*. – Hilton Head, SC, U.S.A. 1994. – P. 131–140. DOI: 10.2514/6.1994-1685
7. Folkman S.L., Ferney G.D., Rowsell E.A. Influence of pinned joints on damping and dynamic behavior of a truss // *Journal of Guidance Control and Dynamics*. – 1995. – Vol. 18. – No. 6. – P. 1398–1403. DOI: 10.2514/3.21559
8. Danilin A.N., Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N., Buzlaev D.V. Dynamics of a space vehicle with elastic deploying tether // *Computers & Structures*. – 1999. – Vol. 72. – No. 1–3. – P. 141–147. DOI: 10.1016/S0045-7949(99)00039-5
9. Гуляев В.И., Завражина Т.В. Динамика работа-манипулятора с упругоподатливыми звеньями и приводными механизмами // *Изв. РАН. МТТ*. – 2003. – № 6. – С. 18–30.
10. Ibrahimbegovic A., Taylor R.L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. – 2002. – Vol. 191. – P. 5159–5176 ([http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00442-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00442-5)) (дата обращения: 08.11.2016).

11. Steindl A., Troger H. Optimal control of deployment of tethered subsatellite // *Nonlinear Dyn.* – 2003. – Vol. 31. – No. 3. – P. 257–274. DOI: 10.1023/A:1022956002484
12. Williams P. Deployment/retrieval optimization for flexible tethered satellite systems // *Nonlinear Dynamics.* – 2008. – Vol. 52. – Iss.1. – P. 159–179. DOI: 10.1007/s11071-007-9269-3
13. Cao D.Q., Tucker R.W. Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: Modelling and simulation // *Int. Journal of Solids and Structures.* – 2008. – Vol. 45. – Iss. 2. – P. 460–477 (<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.08.016>) (дата обращения: 08.11.2016).
14. Luo Y., Xu M., Zhang X. Nonlinear self-defined truss element based on the plane truss structure with flexible connector // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2010. – Vol. 15. – Iss. 10. – P. 3156–3169 (<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.11.006>) (дата обращения: 08.11.2016).
15. Akour S.N. Dynamics of nonlinear beam on elastic foundation // *Proceedings of the World Congress on Engineering.* Vol. II. WCE 2010, June 30-July 2, 2010. – London, U.K, 2010. – P. 1427–1433 ([http://www.iaeng.org/publication/WCE2010/WCE2010\\_pp1427-1433.pdf](http://www.iaeng.org/publication/WCE2010/WCE2010_pp1427-1433.pdf)) (дата обращения: 08.11.2016).
16. Qin Z.Y., Yan S.Z., Chu F.L. Dynamic analysis of clamp band joint system subjected to axial vibration // *J. Sound Vib.* – 2010. – Vol. 329. – P. 4486–4500 (<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2010.05.012>) (дата обращения: 08.11.2016).
17. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика плоского движения тела с системой последовательно соединённых упруговязкими шарнирами гибких нерастяжимых стержней при больших углах поворота // *Изв. РАН. МТТ.* – 2011. – № 2. – С. 109–117. DOI: 10.3103/S0025654411020130
18. Lenci S., Clementi F. Effects of shear stiffness, rotatory and axial inertia, and interface stiffness on free vibrations of a two-layer beam // *J. Sound Vib.* – 2012. – Vol. 331. – P. 5247–5267. DOI: 10.1016/j.jsv.2012.07.004
19. Li F.M., Wu Z.J., Liu R.Q. Study on the dynamics problems of truss structure with joints // *Journal of Astronautics.* – 2012. – Vol. 33. – No. 5. – P. 556–561. DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2012.05.005
20. Shon S.D., Lee S.J., Lee G.G. Characteristics of bifurcation and buckling load of space truss in consideration of initial imperfection and load mode // *J. Zhejiang Univ. Sci. A.* – 2013. – Vol. 14. – P. 206–218. DOI:10.3390/ma8052400
21. Stability of shallow arches under constant load / J.H. Ha, S. Gutman, S.D. Shon, S.J. Lee // *Int. J. Nonlinear Mech.* – 2014. – Vol. 58. – P. 120–127 (<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.004>) (дата обращения: 08.11.2016).
22. Lee K., Han S.-E., Hong J.-W. Post-buckling analysis of space frames using concept of hybrid arc-length methods // *Int. J. Nonlinear Mech.* – 2014. – Vol. 58. – P. 76–88 (<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.003>) (дата обращения: 08.11.2016).
23. Lenci S., Clementi F., Warminski J. Nonlinear dynamics of a two-layer composite beam with nonlinear interface with different boundary conditions // 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI). 5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM V). 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI). July 20–25, 2014. – Barcelona, Spain (<http://www.wccm-eccm-ecfd2014.org/admin/files/fileabstract/a2413.pdf>) (дата обращения: 08.11.2016).
24. Shon S., Lee S., Ha J., Cho C. Semi-analytic solution and stability of a space truss using a high-order Taylor series method // *Materials.* – 2015. – Vol. 8. – P. 2400–2414. DOI: 10.3390/ma8052400
25. Garcia A., Singhose W., Ferri A. Dynamics and control of off-centered crane lifts // 10th Asian Control Conference (ASCC, 31 May-3 June 2015). – Kota Kinabalu (Malaysia), 2015. – P. 1–6. DOI: 10.1109/ASCC.2015.7244753
26. Chen R., Wu T. Vibration reduction in a periodic truss beam carrying locally resonant oscillators // *Journal of Vibration and Control.* – 2016. – Vol. 22. – No. 1. – P. 270–285. DOI: 10.1177/1077546314528020
27. Lepidi M., Gattulli V. Non-linear interactions in the flexible multi-body dynamics of cable-supported bridge cross-sections // *Int. J. Nonlinear Mech.* – 2016. – Vol. 80. – P. 14–28 (<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.09.009>) (дата обращения: 08.11.2016).

28. Franzini G.R., Mazzilli C.E.N. Non-linear reduced-order model for parametric excitation analysis of an immersed vertical slender rod // *Int. J. Nonlinear Mech.* – 2016. – Vol. 80. – P. 29–39 (<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.09.0190>) (дата обращения: 08.11.2016).

29. Piccardo G., Tubino F., Luongo A. Equivalent nonlinear beam model for the 3-D analysis of shear-type buildings: Application to aeroelastic instability // *Int. J. Nonlinear Mech.* – 2016. – Vol. 80. – P. 52–65 (<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.07.013>) (дата обращения: 08.11.2016).

30. Данилин А.Н., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. О неявных алгоритмах интегрирования задачи Коши для параметризованных уравнений, описывающих динамическое поведение механических систем // *ПММ.* – 2003. – Т. 67. – Вып. 6. – С. 1053–1069.

31. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

32. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Серия «Механика твердых деформируемых тел». Т. 5 / Всерос. ин-т науч. техн. инф. АН СССР. – М., 1973. – 272 с.

33. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

34. Donea J., Huerta A., Ponthot J.-Ph., Rodriguez-Ferran A. Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods. *Encyclopedia of computational mechanics.* – New York: Wiley, 2004. – P. 413–437. DOI: 10.1002/0470091355.ecm009

35. Reddy J.N. *An introduction to nonlinear finite analysis.* – Oxford: Oxford Univ. Press, 2004. DOI:10.1093/acprof:oso/9780198525295.001.0001

36. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – 100 с.

## References

1. Hodges D.H. Finite rotating and nonlinear beam kinematics. *Vertica*, 1987, vol. 11 (1/2), pp. 297-307.

2. Misra A.K., Modi V.J. A survey on the dynamics and control of tethered satellite systems. *Advances in Astronautical Sciences*, 1987, vol. 62, pp. 667-719, available at: <https://www.researchgate.net/publication/234283745>

3. Iura M., Atluri S.N. Dynamic analysis of finitely stretched and rotated three-dimensional space-curved beams. *Computers & Structures*, 1988, vol. 29 (5), pp. 875-889, available at: [http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-61381-4\\_300](http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-61381-4_300)

4. Ferri A.A. Modeling and analysis of nonlinear sleeve joints of large space structures. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1988, vol. 25 (5), pp. 354-360, available at: <http://dx.doi.org/10.2514/3.26012>

5. Beletskii V.V., Levin E.M. *Dinamika kosmicheskikh trosovykh system [Dynamics of tethered space systems]*. Moscow: Nauka, 1990, 330 p.

6. Folkman S.L., Rowsell E.A., Ferney G.D. Gravity effects on damping of a truss using pinned joints. *Dynamics Specialists Conference «Structures, Structural Dynamics and Materials»*, AIAA-94-1685-CP, Hilton Head, SC, U.S.A., 1994, pp. 131-140. DOI: 10.2514/6.1994-1685

7. Folkman S.L., Ferney G.D., Rowsell E.A. Influence of pinned joints on damping and dynamic behavior of a truss. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1995, vol. 18 (6), pp. 1398-1403. DOI: 10.2514/3.21559

8. Danilin A.N., Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N., Buzlaev D.V. Dynamics of a space vehicle with elastic deploying tether. *Computers & Structures*, 1999, vol. 72 (1-3), pp. 141-147. DOI: 10.1016/S0045-7949(99)00039-5

9. Gulyaev V.I., Zavrazhina T.V. *Dinamika robota-manipulirovaniya s uprugopodativnymi zven'iami i privodnymi mekhanizmami [Dynamics of a manipulation robot with flexible links and drive mechanisms]*. *Mech. Solids*, 2003, 38 (6), pp. 13-22, available at: <http://mtt.ipmnet.ru/en/Issues.php?y=2003&n=6&p=13>



10. Ibrahimbegovic A., Taylor R.L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2002, vol. 191, pp. 5159-5176, available at: [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00442-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00442-5)
11. Steindl A., Troger H. Optimal control of deployment of tethered subsatellite. *Nonlinear Dyn.*, 2003, vol. 31 (3), pp. 257-274. DOI: 10.1023/A:1022956002484
12. Williams P. Deployment/retrieval optimization for flexible tethered satellite systems. *Nonlinear dynamics*, 2008, vol. 52 (1), pp. 159-179. DOI: 10.1007/s11071-007-9269-3
13. Cao D.Q., Tucker R.W. Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: Modelling and simulation. *Int. Journal of Solids and Structures*, 2008, vol. 45 (2), pp. 460-477, available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.08.016>
14. Luo Y., Xu M., Zhang X. Nonlinear self-defined truss element based on the plane truss structure with flexible connector. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15 (10), pp. 3156-3169, available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.11.006>
15. Akour S.N. Dynamics of Nonlinear Beam on Elastic Foundation. *Proceedings of the World Congress on Engineering*, vol. II WCE 2010, June 30-July 2, 2010. London, U.K., pp. 1427-1433, available at: [http://www.iaeng.org/publication/WCE2010/WCE2010\\_pp1427-1433.pdf](http://www.iaeng.org/publication/WCE2010/WCE2010_pp1427-1433.pdf)
16. Qin Z.Y., Yan S.Z., Chu F.L. Dynamic analysis of clamp band joint system subjected to axial vibration. *J. Sound Vib.*, 2010, vol. 329, pp. 4486-4500, available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2010.05.012>
17. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. Dynamics of plane motion of a body with a system of flexible inextensible rods connected in series by elastoviscous joints at large angles of rotation. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46 (2), pp. 248-255. DOI: 10.3103/S0025654411020130
18. Lenci S., Clementi F. Effects of shear stiffness, rotatory and axial inertia, and interface stiffness on free vibrations of a two-layer beam. *J. Sound Vib.*, 2012, vol. 331, pp. 5247-5267. DOI: 10.1016/j.jsv.2012.07.004
19. Li F.M., Wu Z.J., Liu R.Q. Study on the dynamics problems of truss structure with joints. *Journal of Astronautics*, 2012, vol. 33 (5), pp. 556-561. DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2012.05.005
20. Shon S.D., Lee S.J., Lee G.G. Characteristics of bifurcation and buckling load of space truss in consideration of initial imperfection and load mode. *J. Zhejiang Univ. Sci. A*, 2013, vol. 14, pp. 206-218. DOI:10.3390/ma8052400
21. Ha J.H., Gutman S., Shon S.D., Lee S.J. Stability of shallow arches under constant load. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2014, vol. 58, pp. 120-127, available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.004>
22. Lee K., Han S.-E., Hong J.-W. Post-buckling analysis of space frames using concept of hybrid arc-length methods. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2014, vol. 58, pp. 76-88, available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.003>
23. Lenci S., Clementi F., Warminski J. Nonlinear dynamics of a two-layer composite beam with nonlinear interface with different boundary conditions. *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI). 5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM V). 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI)*. July 20-25, 2014, Barcelona, Spain, available at: <http://www.wccm-eccm-ecfd2014.org/admin/files/fileabstract/a2413.pdf>
24. Shon S., Lee S., Ha J., and Cho C. Semi-analytic solution and stability of a space truss using a high-order Taylor series method. *Materials*, 2015, vol. 8, pp. 2400-2414. doi:10.3390/ma8052400
25. Garcia A., Singhose W., Ferri A. Dynamics and control of off-centered crane lifts. *10th Asian Control Conference (ASCC)*, 31 May-3 June, Kota Kinabalu (Malaysia), 2015, pp. 1-6. DOI: 10.1109/ASCC.2015.7244753
26. Chen R., Wu T. Vibration reduction in a periodic truss beam carrying locally resonant oscillators. *Journal of Vibration and Control*, 2016, vol. 22 (1), pp. 270-285. DOI: 10.1177/1077546314528020

27. Lepidi M., Gattulli V. Non-linear interactions in the flexible multi-body dynamics of cable-supported bridge cross-sections. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2016, vol. 80, pp. 14-28, available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.09.009>
28. Franzini G.R., Mazzilli C.E.N. Non-linear reduced-order model for parametric excitation analysis of an immersed vertical slender rod. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2016, vol. 80, pp. 29-39, available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.09.0190>
29. Piccardo G., Tubino F., Luongo A. Equivalent nonlinear beam model for the 3-D analysis of shear-type buildings: Application to aeroelastic instability. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2016, vol. 80, pp. 52-65, available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.07.013>
30. Danilin A.N., Kuznetsov E.B., Shalashilin V.I. O neiavnykh algoritmakh inte-grirovaniia zadachi Koshi dlia parametrizovannykh uravnenii, opisyyvaiushchikh dinamicheskie skoe povedenie mekhanicheskikh system [On the implicit integration algorithms for the Cauchy problem for parameterized equations describing the dynamic behavior of mechanical systems]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, vol. 67 (6), pp. 1053-1069.
31. Lur'e A.I. Analiticheskaya mekhanika [Analytical mechanics]. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 824 p.
32. Grigoliuk E.I., Selezov I.T. Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhnei, plastin i obolochek. Seriya «Mekhanika tverdykh deformiruemyykh tel» [Nonclassical vibration theories of rods, plates and shells. Series "Mechanics of deformable bodies"]. vol. 5, Moscow: Vserossiiskii institut nauchnoi i tekhnicheskoi informatsii Rossiiskoi akademii nauk, 1973. 272 p.
33. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite element method in engineering], Moscow: Mir, 1975. 541 p.
34. Donea J., Huerta A., Ponthot J.-Ph., Rodriguez-Ferran A. Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods. Encyclopedia of computational mechanics. New York: Wiley, 2004, pp. 413-437. DOI: 10.1002/0470091355.ecm009
35. Reddy J.N. An introduction to nonlinear finite analysis. Oxford: Oxford Univ. Press, 2004. doi:10.1093/acprof:oso/9780198525295.001.0001
36. Zhilin P.A. Prikladnaya mekhanika. Teoriya tonkikh uprugikh sterzhnei [Applied mechanics. The theory of thin elastic rods]. Sankt Peterburg: Politekhnikeskii universitet, 2007. 100 p.