

Паньков А.А. Математическое моделирование пьезоэлектролюминесцентного эффекта и диагностика распределения давления по длине оптоволоконного датчика // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 289–302. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.17

Pan'kov A.A. Mathematical modeling of piezo-electro-luminescent effect and diagnostics of distribution of pressure longwise fiber optic sensor. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 4. Pp. 289-302. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.17



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.17

УДК 531.787.5

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРОЛЮМИНЕСЦЕНТНОГО ЭФФЕКТА И ДИАГНОСТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ПО ДЛИНЕ ОПТОВОЛОКОННОГО ДАТЧИКА

**А.А. Паньков**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 01 июля 2016 г.  
Принята: 04 декабря 2016 г.  
Опубликована: 30 декабря 2016 г.

#### Ключевые слова:

пьезоэлектروупругость,  
механолюминесцентный  
эффект, электролюминофор,  
оптоволокно, датчик давления.

### АННОТАЦИЯ

Разработана математическая модель пьезоэлектролюминесцентного оптоволоконного датчика давления, в котором механолюминесцентный эффект возникает в результате взаимодействия электролюминесцентного и пьезоэлектрического покрытий поверх оптоволоконного датчика. Разработан алгоритм нахождения функции распределения давления по длине трехфазного оптоволоконного датчика по результатам замера интенсивности исходящего из оптоволоконной фазы света для случая нелинейной «функции свечения» – зависимости интенсивности света от действующего на электролюминофор напряжения; задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с разностным ядром, зависящим от рассчитываемых эффективных параметров датчика и от производной заданной функции свечения электролюминофора. Получено аналитическое решение для функции плотности вероятностей распределения давления для частного случая, когда ядро выражается через дельта-функцию и интегральное уравнение Фредгольма сводится к алгебраическому. Для иллюстрации алгоритма решены «прямая» и «обратная» задачи интегрального уравнения Фредгольма для случая нелинейной функции свечения электролюминофора: в прямой задаче найдена производная интенсивности света на выходе оптоволоконного датчика от управляющего напряжения для заданного равномерного закона функции плотности вероятностей распределения давления, в обратной задаче определялась функция плотности вероятностей в сравнении с известным точным решением с использованием решения прямой задачи для производной интенсивности света. Численное решение обратной задачи осуществлено в различных приближениях, в которых распределение узловых точек внутри интервалов и искомые узловые значения функции плотности вероятностей давления находили из условия минимизации суммарных невязок по заданным и рассчитываемым на каждом шаге значениям производной интенсивности света по управляющему напряжению на выходе оптоволоконного датчика.

© ПНИПУ

© Паньков Андрей Анатольевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: [a\\_a\\_pankov@mail.ru](mailto:a_a_pankov@mail.ru)

Andrey A. Pan'kov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: [a\\_a\\_pankov@mail.ru](mailto:a_a_pankov@mail.ru)

## MATHEMATICAL MODELING OF PIEZO-ELECTRO-LUMINESCENT EFFECT AND DIAGNOSTICS OF PRESSURE DISTRIBUTION ALONG FIBER OPTIC SENSOR

A.A. Pan'kov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 01 July 2016  
Accepted: 04 December 2016  
Published: 30 December 2016

#### Keywords:

piezo-electro-elasticity,  
mechanical-luminescent  
effect, electrophosphor,  
optical fiber, sensor  
of pressure.

### ABSTRACT

The algorithm of finding the distribution function of pressure along the three-phase fiber optic sensor based on the results of light intensity proceeding from a fiber optic phase measured on the edge section of the sensor is developed for a case of nonlinear "function of a luminescence" which is a dependence between the intensity of light and voltage acting on the electrophosphor. The problem is reduced to the solution of the Fredholm integral equation of the 1st kind with the differential kernel depending on the calculated effective parameters of the sensor and on the derivative set function of a luminescence of an electrophosphor. The analytical solution has been obtained for the function of probabilities density of pressure distribution for a special case when the kernel is expressed by the delta-function; and the Fredholm integral equation is reduced to an algebraic one. "Direct" and "reverse" problems of the Fredholm integral equation for a case of nonlinear function of a luminescence of an electrophosphor are solved as an illustration of the algorithm. The light intensity derivative at the optical fiber output of control voltage for the set uniform law of probability-density function with regard to pressure distribution is found in a direct problem. As for the reverse problem, the probability-density function is determined in comparison with the known exact solution using the direct problem solution for the derivative of light intensity. The numerical solution of the reverse problem is carried out in different approximations in which the distribution of nodal points in intervals and required nodal function values of probability-density pressure are found from a condition of minimizing summary discrepancies based on the values of the light derivative intensity which have been set and calculated on each step based on control voltage at the output of the optical fiber.

© PNRPU

---

## Введение

Существуют две группы волоконно-оптических датчиков: первая – с внешним чувствительным элементом, когда измерение параметров производится в области за пределами волокна и оптические волокна используются лишь для переноса света к датчикам и в обратном направлении, вторая – чистоволоконные, в основном интерферометрические датчики, в которых *оптическое волокно используется в качестве чувствительного элемента*. Оптические модуляторы являются ключевыми составляющими элементами волоконно-оптических систем, выполняющими различные функции, в том числе модуляцию амплитуды, фазы, частоты и поляризации. В большинстве случаев свет модулируется путем изменения оптических свойств материала модулятора при воздействии управляющего сигнала. Механизм связи управляющего сигнала со свойствами материала может быть электрооптическим, акустооптическим или магнитооптическим. В интегрально-оптических модуляторах *волноводы встраиваются непосредственно в материал модулятора*. Это существенно снижает требования к электрической мощности и *исключает необходимость подсоединения к оптическим волокнам внешних чувствительных элементов*. Один из наиболее популярных методов модуляции интенсивности света основан на изгибании волокна, вызывающем потери излучения. Такие датчики микроизгибов используются в тех приложениях, где измеряемые параметры: деформацию, давление, силу,

положение, ускорение можно механически преобразовать в перемещение устройства, которое деформирует волокно, при этом потери излучения возрастают и количество прошедшего света уменьшается.

Оптоволоконные датчики могут эффективно использоваться для диагностики напряженного состояния и дефектоскопии на структурном уровне внутри композитных элементов конструкций, в частности полимерных волокнистых изделий авиационного назначения. Изготовление композитных конструкций происходит в несколько этапов, на каждом из которых возможно образование дефектов, характерных для данной технологической стадии, поэтому необходимо проводить контроль качества на всех этапах создания и эксплуатации композитной конструкции [1]. По своей природе композиционный материал является сложным объектом для диагностики и контроля механических свойств на структурном уровне, он обладает анизотропией, существенной зависимостью свойств от температуры и технологии изготовления, но в самом принципе создания композиционного материала и конструкции одновременно из ряда отдельных компонентов, в частности: волокон, ткани, связующего, фактически создания материала-детали, можно найти решение проблемы обеспечения его надежности. Это создание материала с возможностью диагностики и в будущем с возможностью управления своими характеристиками. Для этого в структуру материала необходимо добавить информационные или *интеллектуальные* компоненты, обеспечивающие регистрацию и передачу информации о состоянии материала [1–5], а при необходимости и физическое воздействие с целью изменения его характеристик. Для дефектоскопии полимерных композитных конструкций в структуру композита на этапе изготовления может быть [2] введено оптоволокно, и о наличии дефектов в композите судят опосредованно через появление дефектов или разрыва оптоволокон, которые приводят к снижению яркости или отсутствию исходящего из оптоволокон светового потока при заданном входящем световом потоке. В [3] предложен волоконно-оптический датчик давления на основе использования «туннельного эффекта», в [4] рассматривается возможность создания системы распределенных волоконно-оптических датчиков давления на основе учета влияния микроизгиба оптоволокон на эффект обратного рассеяния светового потока. Наиболее близким к рассматриваемому в работе оптоволоконному датчику давления является механолюминесцентный датчик давления [5], который преобразует механическую энергию воздействия в оптическое излучение с использованием явления механолюминесценции: триболюминесценции или деформационной люминесценции [6–9]. Явление механолюминесценции наблюдается у различных кристаллофосфоров, при пластической деформации которых происходит движение электрически заряженных дислокаций [10, 11].

Цель – разработка математической модели диагностики распределения давления по длине трехфазного пьезоэлектролюминесцентного оптоволоконного датчика [12] по результатам замеряемой на торцевом сечении датчика интенсивности исходящего из оптоволоконной фазы света с учетом пьезоэлектролюминесцентного эффекта для случая нелинейной зависимости интенсивности света от действующего на электролюминофор пьезо- и управляющего электронапряжения.

## 1. Оптоволоконный пьезоэлектролюминесцентный датчик давления

Рассмотрим датчик давления (рис. 1), который представляет собой составное трехфазное волокно: оптоволоконная фаза 1, электролюминесцентная 2 и пьезоэлектрическая с радиальной поляризацией 3 фазы, с внутренним фотопрозрачным (перфорированным) 4 и внешним 5

управляющими электродами. Действие напряжений  $\sigma_*$  на внешней боковой поверхности трехфазного волокна приводит к деформациям пьезоэлектрического слоя 3 и появлению в нем и в смежном электролюминесцентном слое 2 электрического поля, приводящего к свечению электролюминофора в оптоволокно 1; напряжение  $\tilde{U}$  на управляющих электродах 4,

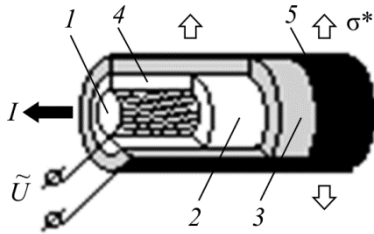


Рис. 1. Составное трехфазное волокно с управляющим напряжением  $\tilde{U}$  и интенсивностью света  $I$  на выходе из оптоволокна под действием нагрузки  $\sigma_*$ .

Fig. 1. Compound three-phase fiber with the control voltage  $\tilde{U}$  and intensity of light  $I$  at the output of the optical fiber under loading  $\sigma_*$ .

5 изменяет напряжение на электролюминесцентном слое 2 и величину интенсивности света  $I$  на выходе оптоволокна. Такие волокнистые датчики давления могут быть использованы для диагностики напряженного состояния и дефектоскопии композитов, гидро- и аэродинамики, в медико-биологических исследованиях; датчики могут вплетаться в структуру полимерных волокнистых композитных элементов конструкций на этапе их создания в процессе намотки для осуществления контроля за напряженным состоянием и возможным появлением дефектов на структурном уровне композита во время их эксплуатации.

## 2. Математическая модель

Осесимметричная математическая модель датчика давления (см. рис. 1) представляет собой трехфазный коаксиальный цилиндр, состоящий из расположенных соосно центрального оптоволокна (1-я фаза,  $r < r_{(1)}$ ), электролюминесцентного (2-я фаза,  $r_{(1)} < r < r_{(2)}$ ) и пьезоэлектрического (3-я фаза,  $r_{(2)} < r < r_{(3)}$ ) слоев, разделенных внутренним перфорированным фотопрозрачным (между 1-й и 2-й фазами,  $r = r_{(1)}$ ) и внешним ( $r = r_{(3)}$ ) управляющими электродами; толщины внутренних электродов считаем пренебрежимо малыми по отношению к характерным размерам сечения модели в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$ . На границе с радиусом  $r_{(1)}$  между 1-й и 2-й фазами (внутреннем электроде) задан потенциал  $\tilde{\varphi}_1$ , на внешней границе составного волокна с радиусом  $r_{(3)}$  заданы потенциал  $\tilde{\varphi}_2$  и радиальное напряжение  $\sigma_{rr}^*$ , напряжение на управляющих электродах

$$\tilde{U} \equiv \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2, \quad (1)$$

задано значение осевой деформации  $\varepsilon_{zz}^*$  для всех трех фаз и составного цилиндра в целом. Считаем, что на всех двух межфазных цилиндрических концентрических границах с радиусами  $r_{(1)}$ ,  $r_{(2)}$  выполняются условия непрерывности радиальных перемещений  $u_r$ , напряжений  $\sigma_{rr}$  и дополнительно на границе 2-й и 3-й фаз  $r_{(2)}$  выполняется условие непрерывности радиальной индукции  $\hat{D}_r$  электрического поля. Эти условия позволяют определить все константы интегрирования  $A_1^{(1)}$ ,  $A_1^{(2)}$ ,  $A_2^{(2)}$ ,  $A_1^{(3)}$ ,  $A_2^{(3)}$ ,  $C_2^{(1)}$ ,  $C_1^{(3)} = C_1^{(2)}$ ,  $C_2^{(2)}$ ,  $C_2^{(3)}$  в общих решениях для каждой из фаз: для 1-й фазы при  $r \in (0; r_{(1)})$

$$u_r^{(1)} = A_1^{(1)} r, \quad \varphi^{(1)} = C_2^{(1)}, \quad (2)$$

для 2-й фазы при  $r \in (r_{(1)}; r_{(2)})$

$$u_r^{(2)} = A_1^{(2)} r + \frac{A_2^{(2)}}{r}, \quad \varphi^{(2)} = C_2^{(2)} - \frac{C_1^{(2)}}{\lambda_{(2)}} \ln r, \quad (3)$$

для 3-й пьезоэлектрической фазы при  $r \in (r_{(2)}; r_{(3)})$

$$\begin{aligned} u_r^{(3)} &= A_1^{(3)} r^{\alpha_1} + A_2^{(3)} r^{\alpha_2} + \beta_4 C_1^{(3)} + \beta_5 \varepsilon_{zz}^* r, \\ \varphi^{(3)} &= \frac{\beta_1 A_1^{(3)}}{\alpha_1} r^{\alpha_1} + \frac{\beta_2 A_2^{(3)}}{\alpha_2} r^{\alpha_2} + \beta_3 C_1^{(3)} \ln r + C_2^{(3)} + \beta_6 \varepsilon_{zz}^* r, \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \pm \sqrt{\beta_0}, \quad \beta_0 = \frac{C_{\theta\theta\theta\theta} \lambda_{rr} + e_{r\theta\theta}^2}{C_{rrrr} \lambda_{rr} + e_{rrr}^2}, \\ \beta_1 &= \frac{\alpha_1 e_{rrr} + e_{r\theta\theta}}{\lambda_{rr}}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2 e_{rrr} + e_{r\theta\theta}}{\lambda_{rr}}, \quad \beta_3 = \frac{\beta_4 e_{r\theta\theta} - 1}{\lambda_{rr}}, \\ \beta_4 &= \frac{e_{r\theta\theta}}{C_{\theta\theta\theta\theta} \lambda_{rr} + e_{r\theta\theta}^2}, \quad \beta_5 = \frac{\lambda_{rr} (C_{rrzz} - C_{\theta\theta zz}) + e_{r\theta\theta} (e_{rrr} - e_{r\theta\theta})}{\lambda_{rr} (C_{\theta\theta\theta\theta} - C_{rrrr}) - e_{rrr}^2 + e_{r\theta\theta}^2}, \\ \beta_6 &= \frac{\beta_5 (e_{rrr} + e_{r\theta\theta}) + e_{r\theta\theta}}{\lambda_{rr}} \end{aligned}$$

компоненты трансверсально изотропных тензоров упругих  $C_{rrrr}$ ,  $C_{\theta\theta\theta\theta}$ ,  $C_{rrzz}$ ,  $C_{\theta\theta zz}$ , пьезомеханических  $e_{rrr}$ ,  $e_{r\theta\theta}$  и диэлектрических  $\lambda_{rr}$  свойств 3-й фазы в цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  с учетом изотропии в плоскости  $\theta z$  и симметрии  $C_{zzrr} = C_{rrzz} = C_{\theta\theta rr} = C_{rr\theta\theta} \neq C_{zz\theta\theta} = C_{\theta\theta zz}$ ,  $C_{rrrr} \neq C_{\theta\theta\theta\theta} = C_{zzzz}$ ,  $e_{rzz} = e_{r\theta\theta}$ ,  $\lambda_{rr} \neq \lambda_{\theta\theta} = \lambda_{zz}$  [13, 14].

В результате по найденным константам интегрирования  $C_1^{(2)}$ ,  $C_2^{(2)}$  (3) найдем искомого решение для электрического напряжения

$$U_* \equiv \tilde{\varphi}_1 - \varphi|_{r=r_{(2)}}^{(2)} = a_1 \tilde{U} + a_2 \sigma_* \quad (5)$$

на электролюминесцентном слое (см. рис. 1), которое рассчитывается через действующее на внешней границе напряжение  $\sigma_* \equiv \sigma_{rr}^*$  и заданное управляющее варьируемое напряжение  $\tilde{U}$  (1) между внутренним и наружным электродами составного волокна, потенциал  $\varphi^{(2)}$  (3) на межфазной границе в (5)

$$\varphi|_{r=r_{(2)}}^{(2)} = C_2^{(2)} - \frac{C_1^{(2)}}{\lambda_{(2)}} \ln r_{(2)}$$

находим через найденные из решения системы уравнений значения констант  $C_{1,2}^{(2)}$  (3), для которых справедливы разложения  $C_{1,2}^{(2)} = C_{1,2}^{(2)} \tilde{U} + C_{1,2}^{(2)*} \sigma_*$ , аналогичные (5). Константы  $a_1$ ,

$a_2$  в (5) являются эффективными параметрами датчика и зависят от электроупругих свойств и геометрических параметров: радиуса оптоволокна и толщин электролюминесцентного и пьезоэлектрического слоев составного трехфазного волокна (3) и определяют на основе решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений относительно всех  $A_1^{(1)}, \dots, C_2^{(3)}$  неизвестных констант интегрирования. Аналогично (2)–(5) может быть получено решение для электроупругих полей в трехфазном слоистом волокне с внутренним и внешним управляющими электродами (см. рис. 1) при динамическом нагружении с использованием известных решений стационарной [15–17] и нестационарной [18] связанных задач электроупругости.

### 3. Алгоритм расчета функции распределения напряжений по интенсивности света на выходе оптоволокна

Рассмотрим вероятностную модель, в которой распределение действующего на боковую цилиндрическую поверхность волоконного датчика внешнего напряжения (давления) по координате  $z$  описываем случайным полем напряжения  $\sigma_*$  со свойствами статистической однородности и эргодичности на некоторой представительной длине; электрическое напряжение  $U_*$  на электролюминофоре датчика также является случайной величиной, связанной с  $\sigma_*$  зависимостью (5). Найдем функцию плотности вероятностей  $f_*(\zeta)$  распределения напряжения  $\sigma_*$  по анализу интенсивности света  $I$  на выходе из оптоволокна датчика.

Измеряемую величину интенсивности света  $I$  на выходе из оптоволоконной фазы составного трехфазного волокна  $I = \int_0^{\bar{I}_{\max}} P(A) d\bar{I} = \int_0^{\bar{I}_{\max}} (1 - P(A)) d\bar{I}$  выразим через вероятности  $P$  происхождения взаимнообратных событий:  $A, \bar{A}$  в виде неравенств:  $U_* \geq \bar{U}(\bar{I}), U_* < \bar{U}(\bar{I})$  соответственно. Так как из условия  $U_* < \bar{U}(\bar{I})$  следует  $\sigma_* < \zeta(\bar{I})$  с учетом связи (5) для заданного значения управляющего напряжения  $\tilde{U}$  (1) и исследуемых случайных величин  $\sigma_*$  и  $U_*$ , то величина интенсивности света

$$I = \bar{I}_{\max} - \int_0^{\bar{I}_{\max}} F_*(\zeta(\bar{I})) d\bar{I} \quad (6)$$

связана с искомой функцией распределения для  $\sigma_*$

$$F_*(\zeta) \equiv P(\sigma_* < \zeta), \quad (7)$$

где напряжение

$$\zeta(\bar{I}) \equiv (\bar{U}(\bar{I}) - a_1 \tilde{U}) / a_2, \quad (8)$$

максимальное значение интенсивности света  $\bar{I}_{\max}$  на выходе из оптоволокна с насыщенной электролюминесценцией по всей длине при  $U_* \rightarrow \infty$  (рис. 2).

После дифференцирования (6) по управляющему напряжению  $\tilde{U}$  получим

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tilde{U}} &= - \int_0^{\bar{I}_{\max}} \frac{d}{d\tilde{U}} F_*(\zeta(\bar{I})) d\bar{I} = \\ &= - \int_0^{\bar{I}_{\max}} \frac{d}{d\zeta} F_*(\zeta) \frac{d\zeta}{d\tilde{U}} d\bar{I} \end{aligned}$$

или

$$\frac{dI}{d\tilde{U}} = \frac{a_1}{a_2} \int_0^{\bar{I}_{\max}} f_*(\zeta(\bar{I})) d\bar{I} \quad (9)$$

с учетом равенств (8),

$$\frac{d}{d\zeta} F_*(\zeta) = f_*(\zeta), \quad \frac{d\zeta}{d\tilde{U}} = -\frac{a_1}{a_2},$$

функция плотности вероятностей  $f_*(\zeta)$  распределения напряжения  $\sigma_*$ . Далее по заданной функциональной зависимости (см. рис. 2)

$$\bar{I} = \bar{I}(\bar{U}) \quad (10)$$

найдем производную

$$\frac{d\bar{I}}{d\zeta} = \frac{d\bar{I}}{d\bar{U}} \frac{d\bar{U}}{d\zeta} = a_2 \bar{I}'(\bar{U}),$$

в результате имеем

$$d\bar{I} = a_2 \bar{I}'(\bar{U}) d\zeta, \quad (11)$$

где

$$\bar{U} = a_1 \tilde{U} + a_2 \zeta \quad (12)$$

с учетом (8). После подстановки дифференциала (11) в (9)

$$\frac{dI}{d\tilde{U}} = a_1 \int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \bar{I}'(\bar{U}) f_*(\zeta) d\zeta$$

получим интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\frac{dI}{d\tilde{U}} = a_1 \int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \bar{I}'(a_1 \tilde{U} + a_2 \zeta) f_*(\zeta) d\zeta, \quad (13)$$

границы области интегрирования

$$\zeta_{\min} = (\bar{U}(0) - a_1 \tilde{U}) / a_2, \quad \zeta_{\max} = (\bar{U}(\bar{I}_{\max}) - a_1 \tilde{U}) / a_2.$$

Интегральное уравнение Фредгольма (13) преобразуем к каноническому виду

$$f(x) = \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} K(x-s)y(s)ds, \quad (14)$$

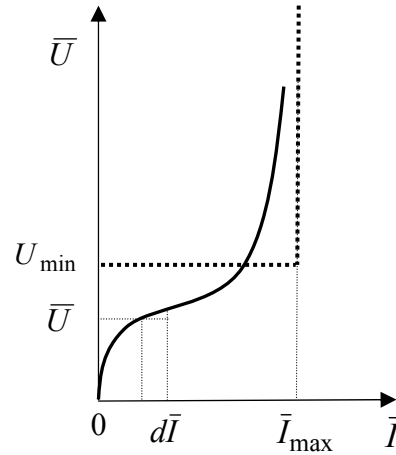


Рис. 2. Заданная «S-образная» (сплошная линия) и кусочно-постоянная аппроксимация (пунктирная линия) зависимости интенсивности свечения  $\bar{I} = \bar{I}(\bar{U})$  электролюминофора от действующего на него напряжения  $\bar{U}$   
 Fig. 2. Given "S-shaped" (continuous line) and piecewise constant approximation (dotted line) of dependence of intensity of light-emission  $\bar{I} = \bar{I}(\bar{U})$  of an electrophosphor from voltage  $\bar{U}$  operating on it

где разностное ядро

$$K(x-s) \equiv \frac{a_1}{a_2} \bar{I}'(\bar{U}) \Big|_{\bar{U}=x-s} = \frac{a_1}{a_2} \bar{I}'(x-s), \quad (15)$$

известная

$$f(x) \equiv \frac{dI(\tilde{U})}{d\tilde{U}} \Big|_{\tilde{U}=x/a_1} \quad (16)$$

и искомая

$$y(s) \equiv f_*(\zeta) \Big|_{\zeta=-s/a_2} \quad (17)$$

функции с учетом новых переменных

$$x = a_1 \tilde{U}, \quad s = -a_2 \zeta, \quad (18)$$

границы интегрирования  $s_{\min} = x - \bar{U}(\bar{I}_{\max})$ ,  $s_{\max} = x - \bar{U}(0)$  или

$$s_{\min} \rightarrow -\infty, \quad s_{\max} = x \quad (19)$$

с учетом  $\bar{U}(0) = 0$ ,  $\bar{U}(\bar{I}_{\max}) \rightarrow \infty$  (рис. 2). Различные аналитические и численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма (14) даны в [19–23].

В частном случае, когда зависимость  $\bar{I} = \bar{I}(\bar{U})$  – ступенчатая функция (см. рис. 2), тогда производная в ядре уравнения (13) выражается через дельта-функцию Дирака следующим образом:

$$\bar{I}'(\bar{U}) = \bar{I}_{\max} \delta(\bar{U} - U_{\min}),$$

и из (12) получим

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tilde{U}} &= a_1 \bar{I}_{\max} \int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \delta(a_1 \tilde{U} + a_2 \zeta - U_{\min}) f_*(\zeta) d\zeta = \\ &= \frac{a_1}{a_2} \bar{I}_{\max} \int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \delta(a_2 \zeta - (U_{\min} - a_1 \tilde{U})) f_*(\zeta) d(a_2 \zeta) \end{aligned}$$

или

$$\frac{dI}{d\tilde{U}} = \frac{a_1}{a_2} \bar{I}_{\max} f_*(\bar{\zeta}), \quad (20)$$

где  $\bar{\zeta} = (U_{\min} - a_1 \tilde{U}) / a_2$  с учетом (12), (13); искомая функция плотности вероятностей

$$f_*(\bar{\zeta}) = \kappa \frac{dI}{d\tilde{U}}, \quad (21)$$

константа  $\kappa = a_2 / (a_1 \bar{I}_{\max})$  в (21) является эффективной характеристикой составного трехфазного волокна.

### 3. Решение тестовых прямой и обратной задач

**3.1. Прямая задача.** Для случая равномерного распределения (рис. 3, в) напряжения  $\sigma_*$  по длине внешней поверхности волокна с функцией плотности вероятностей



$$f_*(\zeta) = \begin{cases} 1/(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}), & \sigma_{\min} \leq \zeta \leq \sigma_{\max}, \\ 0, & \zeta < \sigma_{\min}, \zeta > \sigma_{\max} \end{cases} \quad (22)$$

из уравнения (13) получим

$$\frac{dI}{d\tilde{U}} = \frac{a_1}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}} \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \bar{I}'(a_1\tilde{U} + a_2\zeta) d\zeta$$

ИЛИ

$$\frac{dI}{d\tilde{U}} = \frac{a_1}{a_2(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})} \int_{a_1\tilde{U} + a_2\sigma_{\min}}^{a_1\tilde{U} + a_2\sigma_{\max}} \bar{I}'(t) dt \quad (23)$$

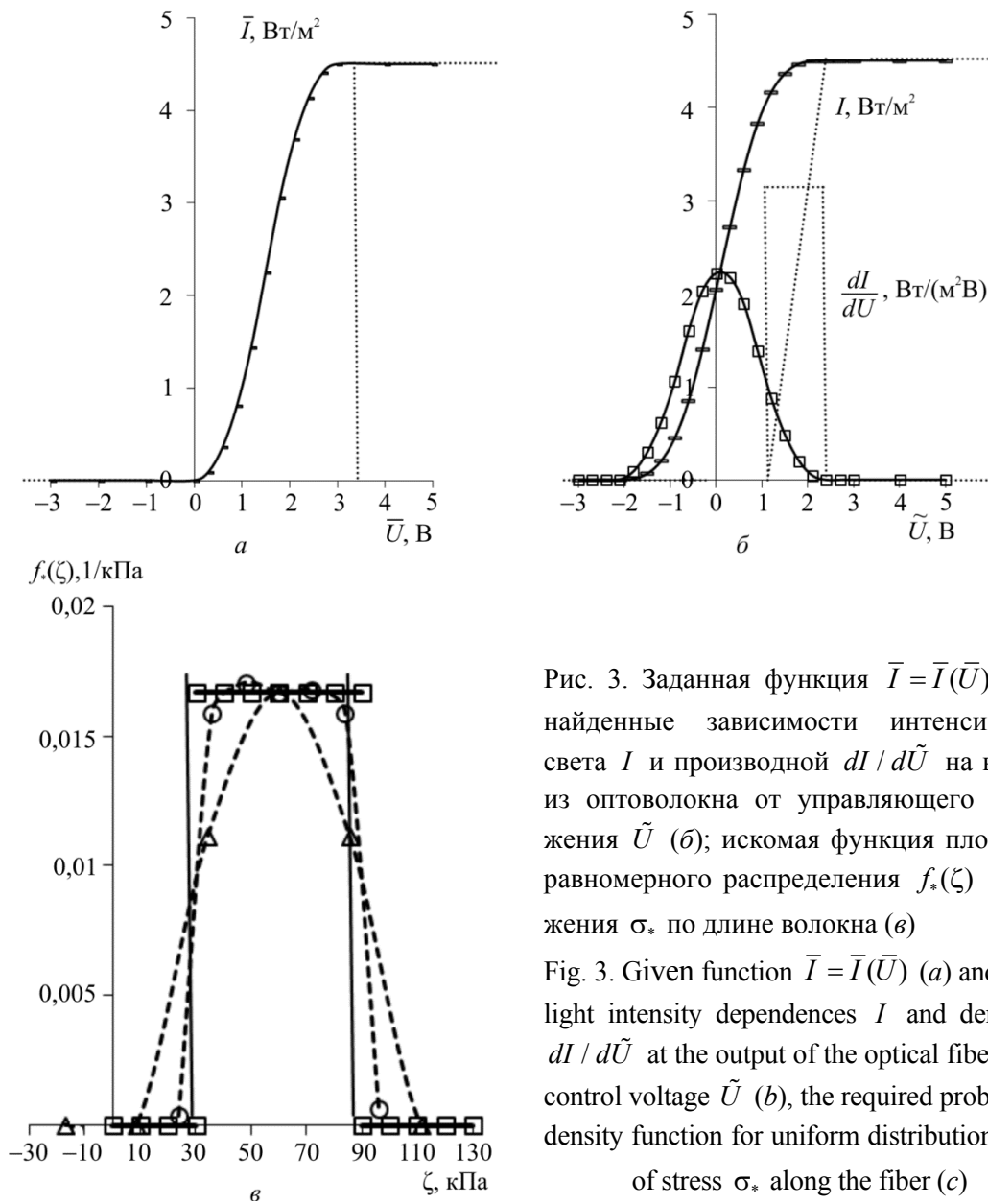


Рис. 3. Заданная функция  $\bar{I} = \bar{I}(\bar{U})$  (а) и найденные зависимости интенсивности света  $I$  и производной  $dI/d\tilde{U}$  на выходе из оптоволокна от управляющего напряжения  $\tilde{U}$  (б); искомая функция плотности равномерного распределения  $f_*(\zeta)$  напряжения  $\sigma_*$  по длине волокна (в)

Fig. 3. Given function  $\bar{I} = \bar{I}(\bar{U})$  (a) and found light intensity dependences  $I$  and derivative  $dI/d\tilde{U}$  at the output of the optical fiber of the control voltage  $\tilde{U}$  (b), the required probability-density function for uniform distribution  $f_*(\zeta)$  of stress  $\sigma_*$  along the fiber (c)

с параметром интегрирования  $t = a_1\tilde{U} + a_2\zeta$ , связью дифференциалов  $d\zeta = dt / a_2$ ; в результате из (23) следует решение

$$\frac{dI}{d\tilde{U}} = \frac{a_1(\bar{I}_{\max}(\tilde{U}) - \bar{I}_{\min}(\tilde{U}))}{a_2(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})}, \quad (24)$$

где

$$\bar{I}_{\min}(\tilde{U}) \equiv \bar{I}(a_1\tilde{U} + a_2\sigma_{\min}), \quad \bar{I}_{\max}(\tilde{U}) \equiv \bar{I}(a_1\tilde{U} + a_2\sigma_{\max})$$

находим по заданной функции  $\bar{I} = \bar{I}(\bar{U})$  на рис. 3, а.

На рис. 3, б построены зависимости интенсивности света  $\bar{I}$  и производной  $dI/d\tilde{U}$  (24) на выходе из оптоволокна от управляющего напряжения  $\tilde{U}$  с параметрами датчика:  $a_1 = 0,972$ ,  $a_2 = 0,235 \cdot 10^{-4}$  В/Па, границами действующего напряжения:  $\sigma_{\min} = 30$  кПа,  $\sigma_{\max} = 90$  кПа при заданном равномерном законе распределения  $f_*(\zeta)$  (22). Пунктирные графики на рис. 3 приведены для случая, когда функция  $\bar{I} = \bar{I}(\bar{U})$  задана в виде ступенчатой функции (рис. 3, а) с параметрами  $\bar{I}_{\max} = 4,5$  Вт/м<sup>2</sup>,  $U_{\min} = 3$  В; на рис. 3, б построены соответствующие этому случаю зависимости интенсивности света  $I$  и производной  $dI/d\tilde{U}$  на выходе из оптоволокна от управляющего напряжения  $\tilde{U}$  при использовании для напряжения  $\sigma_*$  по длине волокна (рис. 3, в) равномерного закона распределения на интервале  $(\sigma_1; \sigma_2)$ , где  $\sigma_{1,2} \equiv (U_{\min} - a_1U_{2,1})/a_2$  рассчитываются по значениям  $U_1 = 0,91$  В,  $U_2 = 2,36$  В управляющего напряжения  $\tilde{U}$  (см. рис. 3, б) с учетом (21).

**3.2. Обратная задача.** При численном решении интегрального уравнения Фредгольма (14) в классе кусочно-постоянных функций определяем в узловых точках координаты  $x_i \in (x_{\min}; x_{\max})$  «невязки»

$$\delta_i = \left| f_i - \sum_{j=1}^n K_{ij} y_j \Delta_j \right|$$

между заданными значениями функции  $f_i \equiv f(x_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$  и рассчитанными по известным фиксированным значениям ядра  $K_{ij} \equiv K(x_i - s_j)$  и варьируемыми значениями  $y_j \equiv y(s_j)$  искомой функции  $y(s)$  в узловых точках координаты  $s_j$ ; граничные значения  $s_0 \equiv s_{\min}$ ,  $s_n \equiv s_{\max}$ , шаг по координате  $\Delta_j \equiv s_j - s_{j-1}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Распределение узловых точек  $x_i$ ,  $s_j$  внутри соответствующих интервалов и искомые узловые значения  $y_j$  находим из

условия минимизации суммарных невязок  $\sum_{i=1}^m \delta_i \rightarrow \min$ . Решения обратной задачи в раз-

личных приближениях: начальном ( $\Delta$ ) и уточненном ( $\circ$ ) при увеличенном числе узловых точек обозначены на рис.3, в пунктирными линиями в сравнении с «точным» решением ( $\square$ ), полученным ранее из решения прямой задачи; решения ( $\Delta$ ), ( $\circ$ ) (см. рис. 3, в) найдены по заданной функции  $\bar{I} = \bar{I}(\bar{U})$  (см. рис. 3, а) электролюминофора, зависимости производной  $dI/d\tilde{U}$  интенсивности света  $I$  на выходе из оптоволокна от управляющего напряжения  $\tilde{U}$  ( $\square$ ) (см. рис. 3, б).

## Заключение

Разработана математическая модель пьезоэлектролюминесцентного оптоволоконного датчика давления, в котором механолюминесцентный эффект возникает в результате взаимодействия электролюминесцентного и пьезоэлектрического покрытий поверх оптоволоконного, наличие дополнительных управляющих электродов расширяет возможности анализа распределения давления по длине волокна. Разработан алгоритм нахождения функции распределения по длине трехфазного оптоволоконного датчика значений напряжения  $\sigma_*$ , действующего на внешнюю цилиндрическую боковую поверхность, по результатам замеряемой на торцевом сечении датчика интенсивности света из оптоволоконной фазы для случая нелинейной зависимости  $\bar{I} = \bar{I}(\bar{U})$  интенсивности света  $\bar{I}$  от действующего на электролюминофор напряжения  $\bar{U}$ ; задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (14) с разностным ядром  $K(x-s) = \frac{a_1}{a_2} \bar{I}'(x-s)$  (15), зависящим от рассчитываемых эффективных параметров  $a_1$ ,  $a_2$  датчика и от производной  $\bar{I}'(\bar{U})$  заданной функции свечения электролюминофора. Для частного случая, когда зависимость  $\bar{I} = \bar{I}(\bar{U})$  – ступенчатая функция, получено аналитическое решение для функции плотности вероятностей  $f_*(\zeta)$  напряжений  $\sigma_*$  (21); здесь ядро выражается через дельта-функцию и интегральное уравнение Фредгольма (13) сводится к алгебраическому (20). Для иллюстрации алгоритма решена «прямая» задача по нахождению из интегрального уравнения Фредгольма производной  $dI/d\tilde{U}$  интенсивности  $I$  света на выходе оптоволоконного от управляющего напряжения  $\tilde{U}$  для случая заданного равномерного закона функции плотности вероятностей  $f_*(\zeta)$  распределения напряжения  $\sigma_*$  и далее для найденной функции  $dI/d\tilde{U}$  решена «обратная» задача по нахождению функции плотности вероятностей  $f_*(\zeta)$ ; численное решение обратной задачи осуществлено в различных приближениях, распределение узловых точек  $x_i$ ,  $s_j$  внутри соответствующих интервалов и искомые узловые значения  $y_j$  находили из условия минимизации суммарных невязок по заданным и рассчитываемым значениям функции  $dI/d\tilde{U}$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-41-590726.*

## Библиографический список

1. Бростилов С.А., Мурашкина Т.И., Пивкин А.Г. Перспективы использования волоконно-оптических датчиков давления для систем контроля и испытаний космической и авиационной техники // Математическое моделирование в машино- и приборостроении: сб. науч. тр. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2013. – № 10 (спец. вып.). – С. 55–66.
2. Пат. РФ № 2488772 С2. Способ неразрушающего контроля деталей из полимерных композиционных материалов / Ю.Ф. Огнев, О.Ш. Бердиев; опубл. 27.07.2013.
3. Бадеева Е.А., Бростилов С.А., Юрова О.В. Волоконно-оптический датчик давления на основе туннельного эффекта // Современная электроника. – 2011. – № 2. – С. 26–27

4. Томышев К.А., Баган В.А., Астапенко В.А. Распределённые волоконно-оптические датчики давления для применения в нефтегазовой промышленности // Труды МФТИ. – 2012. – Т. 4, № 2. – С. 64–72.
5. Макарова Н.Ю. Моделирование выходного сигнала механолюминесцентного датчика динамического давления // Наука и образование науч. изд. – 2015. – № 6. – С. 187–200.
6. Татмышевский К.В. Научные основы расчета и проектирования механолюминесцентных чувствительных элементов датчиков импульсного давления: автореф. дис. ... докт. техн. наук. – М., 2010. – 33 с.
7. Real-time mechanoluminescence sensing of the amplitude and duration of impact stress / V.P. Chandra, V.K. Chandra, S.K. Mahobia, P. Jha, R. Tiwari, B. Haldar // Sensors and Actuators A: Physical. – 2012. – Vol. 173. – P. 9–16.
8. Detecting Mechanoluminescence From ZnS:Mn Powder Using a High Speed Camera / L. Kobakhidze, C.J. Guidry, W.A. Hollerman, R.S. Fontenot // IEEE Sensor Journal. – 2013. – Vol. 13. – No. 8. – P. 3053–3059.
9. Chandra V.P., Chandra V.K. Dynamics of the mechanoluminescence induced by elastic deformation of persistent luminescent crystals // Journal of Luminescent. – 2012. – Vol. 132. – No. 3. – P. 858-869.
10. Банишев А.Ф., Банишев А.А., Лотин А.А. Исследование люминесценции и механолюминесценции мелкодисперсного порошка  $\text{SrAl}_2\text{O}_4:(\text{Eu}^{2+}, \text{Dy}^{3+})$  в матрице полимера // Физика и химия обработки материалов. – 2012. – № 5. – С. 89-92.
11. Писаревский А.И., Татмышевский К.В., Голубев А.М. Сравнение особенностей механолюминесценции в кристаллах ZnS и  $(\text{BaSr})\text{Al}_2\text{O}_4$  // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Бауман а. Электрон. журн. – 2012. – № 1. – URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/297102.html> (дата обращения: 01.05.2015).
12. Пат. РФ Волоконно-оптический датчик давления / А.А. Паньков; заявл. RU № 2016136058 от 06.09.2016.
13. Паньков А.А. Статистическая механика пьезокомпозигов. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 480 с.
14. Паньков А.А. Электромагнитоупругость и эффективные свойства пьезокомпозигов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2012. – № 4. – С. 79–98.
15. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – Киев: Наукова думка, 1989. – 280 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т., Т. 5.
16. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
17. Дианов Д.Б., Кузьменко А.Г. Расчет цилиндрического пьезокерамического преобразователя, совершающего радиально-симметричные колебания // Акуст. журн. – 1970. – Т. 16, № 1. – С. 42–48.
18. Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для анизотропного пьезокерамического радиально-поляризованного цилиндра // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – №1. – С. 73–81.
19. Михлин С.Г., Смолицкий Х.И. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 384 с.
20. Верлань А.Ф. Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка, 1986. – 543 с.
21. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. – 2-е, стереотип. изд. – М.: Физматлит, 2002. – 360 с.
22. Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям. – М.: Физматлит, 2003. – 608 с.
23. Латыпов А.Ф. Численные методы решения линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра 1-го рода // Обратные и некорректные задачи математической физики: материалы междунар. конф., посвященной 75-летию академика М.М. Лаврентьева, 20–25 августа 2007 г. – Новосибирск, 2007.

## References

1. Brostilov S.A., Murashkina T.I., Pivkin A.G. Perspektivy ispol'zovaniia volokonno-opticheskikh datchikov davleniia dlia sistem kontroliia i ispytanii kosmicheskoi i aviatsionnoi tekhniki [Perspectives of use of optical fiber sensors of pressure for monitoring systems and tests of the space and aircraft equipment]. Sbornik nauchnykh trudov «*Matematicheskoe modelirovanie v mashino- i priborostroenii*», Penzenskii gosudarstvennyi universitet, 2013, special iss., no. 10, pp. 55-66
2. Ognev Yu.F., Berdiev O.Sh. Sposob nerazrushaiushchego kontroliia detalei iz polimernykh kompozitsionnykh materialov [Method of non-destructive testing of details from polymeric composition materials]. *Patent RU № 2488772 C2.*; opubl. 27.07.2013
3. Badeeva E.A., Brostilov S.A., Jurova O.V. Volokonno-opticheskii datchik davleniia na osnove tunnel'nogo effekta [Pressure optical fiber sensor on the basis of tunnel effect]. *Sovremennaiia elektronika*, 2011, no. 2, pp. 26-27
4. Tomyshev K.A., Bagan V.A., Astapenko V.A. Raspredelemnnye volokonno-opticheskie datchiki davleniia dlia primeneniia v neftegazovoi promyshlennosti [The distributed pressure optical fiber sensors for application in the oil and gas industry]. *Trudy Moskovskogo fiziko-tehnicheskogo instituta*, 2012, vol.4, no. 2, pp. 64-72
5. Makarova N.Yu. Modelirovanie vykhodnogo signala mekhanoluminestsentnogo datchika dinamicheskogo davleniia [Simulation of an output signal of the mechanoluminescent sensor of dynamic pressure]. *Nauka i obrazovanie*, Moskovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet imeni N.E. Baumana, 2015, no. 6, pp. 187-200
6. Tatmyshevskii K.V. Nauchnye osnovy rascheta i proektirovaniia mekhanoluminestsentnykh chuvstvitel'nykh elementov datchikov impul'snogo davleniia [Scientific bases of calculation and design of mechanoluminescent sensitive elements of sensors of impulsive pressure]. Abstract of the Doctor's degree. Moscow, 2010. 33 p.
7. Chandra B.P., Chandra V.K., Mahobia S.K., Jha P., Tiwari R., Haldar B. Real-time mechanoluminescence sensing of the amplitude and duration of impact stress. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2012, vol. 173, pp. 9-16
8. Kobakhidze L., Guidry C.J., Hollerman W.A., Fontenot R.S. Detecting Mechanoluminescence From ZnS:Mn Powder Using a High Speed Camera. *IEEE Sensor Journal*, 2013, vol. 13, no. 8, pp. 3053-3059
9. Chandra B.P., Chandra V.K. Dynamics of the mechanoluminescence induced by elastic deformation of persistent luminescent crystals. *Journal of Luminescent*, 2012. vol. 132, no. 3, pp. 858-869
10. Banishev A.F., Banishev A.A., Lotin A.A. Issledovanie lyuminescencii i mehanolyuminescencii melkodispersnogo poroshka SrAl<sub>2</sub>O<sub>4</sub>:(Eu<sup>2+</sup>, Dy<sup>3+</sup>) v matriche polimera [Research of a luminescence and mechanoluminescence of the fine powder SrAl<sub>2</sub>O<sub>4</sub>: (Eu<sup>2+</sup>, Dy<sup>3+</sup>) in a polymer matrix]. *Fizika i himija obrabotki materialov*. 2012, no. 5, pp. 89-92
11. Pisarevskii A.I., Tatmyshevskii K.V., Golubev A.M. Sravnenie osobennostei mehanolyuminescencii v kristallakh ZnS i (BaSr)Al<sub>2</sub>O<sub>4</sub> [Comparing of features of a mechanoluminescence in crystals of ZnS and (BaSr)Al<sub>2</sub>O<sub>4</sub>]. *Nauka i obrazovanie*. Moskovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet imeni N.E. Baumana. 2012. no. 1, available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/297102.html> (accessed 01 May 2015)
12. Pan'kov A.A. Volokonno-opticheskii datchik davleniia [Fiber-optical pressure sensor] *Patent. zayavka RU №2016136058 ot 06.09.2016.*
13. Pan'kov A.A. Statisticheskaiia mekhanika p'ezokompozitov [Statistical mechanics of piezo composites]. Permskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2009, 480 p.
14. Pan'kov A.A. Elektromagnitoupругost' i effektivnye svoistva p'ezokompozitov [Electromagnetoelasticity and effective properties of piezo composites]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2012, no. 4, pp. 79-98
15. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., SHul'ga N.A. Elektrouругost' [Electroelasticity]. *Mekhanika sviazannykh polei v elementakh konstruksii*. Kiev: Naukova dumka, 1989, vol. 5, 280 p.

16. Parton V.Z., Kudrjavcev B.A. Elektromagnitouprugost' p'ezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel [Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrowire volumes]. Moscow: Nauka, 1988, 472 p.
17. Dianov D.B., Kuz'menko A.G. Raschet tsilindricheskogo p'ezokeramicheskogo preobrazovatel'ia, sovershaiushchego radial'no-simmetrichnye kolebaniia [Calculation of the cylindrical piezoceramic converter making radial and symmetric fluctuations]. *Akust. zhurn.* 1970, vol. 16, no. 1, pp. 42-48
18. Shljahin D.A. Nestatsionarnaia osesimmetrichnaia zadacha elektrouprugosti dlia anizotropnogo p'ezokeramicheskogo radial'no-poliarizovannogo tsilindra [Non-stationary axisymmetric problem of electroelasticity for the anisotropic piezoceramic radially polarized cylinder]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela.*, 2009, no. 1, pp. 73-81
19. Mikhlin S.G., Smolitskii X.L. Priblizhennyye metody resheniia differentsial'nykh i integral'nykh uravnenii [Approximate methods of the solution of the differential and integral equations]. Moscow: Nauka, 1965, 384 p.
20. Verlan' A.F., Sizikov V.S. Integral'nye uravneniia: metody, algoritmy, programmy [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kiev: Naukova Dumka, 1986, 543 p.
21. Vasil'eva A.B., Tihonov A.N. Integral'nye uravneniia [Integral equations]. Moscow: Fizmatlit, 2002, 360 p.
22. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Spravochnik po integral'nym uravneniyam [Reference book on the integral equations]. Moscow: FIZMATLIT, 2003, 608 p
23. Latypov A.F. Chislennyye metody resheniia lineinykh integral'nykh uravnenii Fredgol'ma i Vol'terra 1-go roda [Numerical methods of the solution of the linear integral equations of Fredholm and Voltaire of the 1st kind]. Materialy mezhdunarodnoi konferentsii «Obratnye i nekorrektnyye zadachi matematicheskoi fiziki », 20-25 August. Novosibirsk, 2007.