

Айзикович С.М., Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Дисперсионные характеристики плоских продольных упругих волн, распространяющихся в пористой жидконасыщенной среде с полостями // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 175–186. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.10

Aizikovich S.M., Erofeev V.I., Leonteva A.V. Dispersive characteristics of flat longitudinal elastic waves extending in porous liquid-saturated medium with cavities. PNRPU Mechanics Bulletin. 2016. No. 4. Pp. 175-176. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.10



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.10

УДК 534.1

ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПОРИСТОЙ ЖИДКОНАСЫЩЕННОЙ СРЕДЕ С ПОЛОСТЯМИ

С.М. Айзикович¹, В.И. Ерофеев^{2,3}, А.В. Леонтьева¹

¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия

³Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 03 июня 2016 г.
Принята: 28 ноября 2016 г.
Опубликована: 30 декабря 2016 г.

Ключевые слова:

линейная волна, продольная волна, упругая волна, пористая среда, двухфазная среда (среда Био), полости, дисперсионное соотношение, фазовая скорость, групповая скорость.

АННОТАЦИЯ

Многие сплошные на первый взгляд среды обладают многочисленными микропорами, которые содержат или не содержат жидкость. Эти поры гораздо меньше макроскопических размеров среды, но больше атомных или молекулярных размеров. Такие модели пористой среды, как модель грунта, широко применяются в геофизике. Этой моделью объясняется распространение жидкости (нефть, вода) через грунты. Такой моделью пользуются и в биологии, в частности, при описании протекания жидкости через растения, например древесину. В последние годы созданы искусственные пористые материалы, которые широко применяются в быту, в технике и других областях человеческой деятельности.

В настоящей работе рассматривается распространение плоских продольных волн в пористой жидконасыщенной среде с полостями. Предполагается, что диссипацией энергии волны в среде можно пренебречь. Изучается поведение линейных волн в полостно-пористых средах. Как известно, в пористой среде (среде Био) могут распространяться две продольные волны: одна медленная и одна быстрая. В нашей задаче распространяются три продольные волны: две волны, как в среде Био, и одна волна за счет полостности среды. Если бы в среде не было ни пор, ни полостей, то распространялась бы одна быстрая волна.

Исследование поведения линейных волн проводится путем получения и анализа дисперсионного уравнения, фазовой скорости и групповой скорости, характеризующей перенос энергии волны. Для определения степени выраженности дисперсии рассматривается плотность спектра частот. В работе построены и проанализированы дисперсионные зависимости для рассматриваемой системы. Найденны области сильной и слабой дисперсии, области нормальной и аномальной дисперсии при конкретных значениях параметров системы.

© ПНИПУ

© Айзикович Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: saizikovich@gmail.com
Ерофеев Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: erof.vi@yandex.ru
Леонтьева Анна Викторовна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: aleonav@mail.ru

Sergey M. Aizikovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: saizikovich@gmail.com
Vladimir I. Erofeev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: erof.vi@yandex.ru
Anna V. Leonteva – PhD in Technical Sciences, Senior Research Associate, e-mail: aleonav@mail.ru

DISPERSIVE CHARACTERISTICS OF FLAT LONGITUDINAL ELASTIC WAVES EXTENDING IN POROUS LIQUID-SATURATED MEDIUM WITH CAVITIES

S.M. Aizikovich¹, V.I. Erofeev^{2,3}, A.V. Leonteva¹

¹Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

²Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russian Federation

³Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 03 June 2016
Accepted: 28 November 2016
Published: 30 December 2016

Keywords:

linear wave, longitudinal wave, elastic wave, porous medium, two-phase medium (Biot's medium), cavities, dispersion relation, phase velocity, group velocity.

ABSTRACT

At first sight, many continuous media possess numerous micropores which contain or do not contain liquid. These pores are much less than the macroscopic sizes of medium, but they are bigger than nuclear or molecular ones. Such models of porous medium as soil model are widely used in geophysics. Liquid distribution (oil, water) in soil is explained by this model. This model is also used in biology, in particular, to describe the penetration of liquid through plants, for example, wood. In recent years artificial porous materials which are widely applied in everyday life, in equipment and other areas of human activities have been created.

The present work considers the distribution of flat longitudinal waves in porous liquid-saturated medium with cavities. It is supposed that the energy dissipation of a wave in the medium can be neglected. The behavior of linear waves in porous media with cavities is studied. It is known that in the porous medium (Biot's medium) two longitudinal waves can extend, one of them is slow and the other one is fast. In our problem three longitudinal waves are extending: two waves do it like in the Biot medium and the third one does it due to medium cavities. If the medium had neither pores, nor cavities, then one fast wave would extend.

The study of linear wave's behavior is conducted by receiving and analyzing the dispersive equation, phase speed and group speed characterizing the wave energy transfer. The density of spectral frequency is considered to determine the range of the dispersion degree. The work presents the formation and analysis of dispersive dependences for the considered system. Areas of strong and weak dispersion, areas of normal and abnormal dispersion at certain values of system parameters are found.

© PNRPU

Введение

Впервые модель, состоящая из твердого каркаса с многочисленными связанными между собой порами, была предложена в сороковые годы XX в. Морисом Био (Maurice A. Biot) [1], поэтому такие среды часто называют средами Био. В работе [1], как и в последующих работах цикла [2–8], пористость материала предполагалась постоянной, что не соответствует физической реальности. Несмотря на это допущение, работы М. Био, как пионерские, несомненно, внесли большой вклад в теорию пороупругости, в частности, в них выявлен новый физический эффект – существование двух продольных волн – быстрой и медленной.

Формула изменения пористости при малых деформациях впервые предложена Я.И. Френкелем и опубликована в статье [9], являющейся второй классической работой в этой области.

В работе Л.Я. Косачевского [10] последовательно изложена линейная теория деформирования двухфазной среды, учитывающая результаты работ М. Био и Я.И. Френкеля, получено выражение для энергии, коэффициенты которого зависят от таких параметров среды, как исходная пористость, коэффициент сжимаемости и др.

Развитие основных положений механики и физики пористых материалов содержится в монографиях [11–15].

Вопросам распространения волн в пористых материалах посвящены, в частности, работы [16–25].

С 1999 г. регулярно проводятся крупные многопрофильные международные конференции по механике пористых материалов («Poromechanics») [26–30].

В монографии [31] отмечается, что во многих природных средах (туф, пемза и т.д.), а также в искусственных композитах в сочетании с пористостью встречаются многочисленные, часто заполненные жидкостью, полости. Таким образом, изучение пористо-полостных твердых сред представляет большой интерес с точки зрения теории и практики.

1. Постановка задачи

Пусть имеется полубесконечная или в форме слоя среда Био, в которой существуют полости с жидкостью. Считается, что поры цилиндрической формы, а полости – шарообразной. Под действием упругой волны полости будут колебаться, оказывая, в свою очередь, влияние на распространение волны.

Уравнения, описывающие деформацию пористой жидконасыщенной среды с полостями, наполненными жидкостью, в лагранжевых координатах приведена в [31]. В этой системе считаем, что вязкость отсутствует, а всеми типами нелинейности пренебрегаем. Рассматриваем плоскую продольную волну, распространяющуюся вдоль оси x_3 . Ограничиваясь вторыми производными и линейными членами, получим следующую систему, описывающую распространение плоской продольной волны в среде Био:

$$\begin{cases} \rho_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} - (\lambda_2 + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - Q \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + N(\lambda_2 + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0, \\ \rho_{22} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - Q \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - R \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \omega_s^2 v - \frac{4\pi r_2}{\rho_0} \left[(\lambda_2 + 2\mu) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - Nv \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} (Qv_3 + Ru_3) \right] = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где u_3 , v_3 – перемещения твердой и жидкой фаз соответственно вдоль направления оси x_3 ; v – объем полости, возмущенной волной; ρ_{11} , ρ_{22} – эффективные начальные плотности массы твердой и жидкой фазы соответственно; $\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12}$, $\rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12}$, $\rho_{12} < 0$, ρ_1 , ρ_2 – массы твердой и жидкой фазы соответственно; ρ_{12} – присоединенная плотность массы; λ_2 , μ – коэффициенты Ламе; Q , R – известные коэффициенты, характеризующие жидконасыщенную среду, их значения даны в [10]; N – количество полостей в единице объема; ω_s – резонансная частота, $\omega_s^2 = (3\gamma p_0 + 4\mu)/(r_2^2 \rho_0)$; r_2 – радиус полостей; ρ_0 – плотность твердой фазы; p_0 – начальное давление в жидкости внутри полости; γ – показатель адиабаты жидкости.

2. Дисперсионные свойства системы

Для получения дисперсионного уравнения подставляем в систему линейных дифференциальных уравнений (1) решение в виде монохроматических волн:

$$\begin{cases} u_3 = u_3^0 \exp(i\omega t - ikx), \\ v_3 = v_3^0 \exp(i\omega t - ikx), \\ v = v^0 \exp(i\omega t - ikx), \end{cases}$$

группируем слагаемые при амплитудах u_3^0 , v_3^0 , v^0 , выписываем соответствующий определитель и приравниваем его нулю. Раскрывая определитель, получаем дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} & -\rho_0 \rho \omega^6 + (\rho(\rho_0 \omega_s^2 + n) + \rho_0 q_1 k^2) \omega^4 + \\ & + ((-\rho_0 \omega_s^2 q_1 + n q_2) k^2 + \rho_0 q k^4) \omega^2 - (\rho_0 \omega_s^2 q + n R^2) k^4 = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2, \quad \kappa = \lambda_2 + 2\mu, \quad q_1 = \rho_{11} R + \rho_{22} \kappa - 2\rho_{12} Q, \\ q_2 &= \rho_{12} Q - (\rho_{11} - \rho_{22}) R, \quad q = Q^2 - \kappa R, \quad n = 4\pi r_2 N \kappa. \end{aligned}$$

Выбрав в качестве характерных величин частоты и волнового числа резонансную частоту и отношение резонансной частоты к скорости распространения упругой продольной волны в воде

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_s}, \quad \bar{k} = \frac{k}{\omega_s / c},$$

где $\bar{\omega}$, \bar{k} – безразмерные величины частоты и волнового числа соответственно, получаем дисперсионное соотношение (2) в безразмерном виде (черта опущена):

$$\omega^6 - (1 + a_1 + a_2 k^2) \omega^4 + ((a_2 - a_1 a_4) k^2 - a_3 k^4) \omega^2 + (a_3 + a_1 a_5) k^4 = 0, \quad (3)$$

где a_i ($i=1...5$) – безразмерные коэффициенты:

$$a_1 = \frac{n}{\rho_0 \omega_s^2}, \quad a_2 = \frac{q_1}{\rho c^2}, \quad a_3 = \frac{q}{\rho c^4}, \quad a_4 = \frac{q_2}{\rho c^2}, \quad a_5 = \frac{R^2}{\rho c^4}.$$

Уравнение (3) имеет шестой порядок по ω и четвертый порядок по k . Дисперсионные кривые имеют три ветви, две из которых исходят из начала координат и одна из точек $(0, \pm \sqrt{1 + a_1})$. Для безразмерных частоты и волнового числа получены следующие характеристики при различных значениях параметра a_5 уравнения (3) (рис. 1).

Из рисунков видно, что внутренние ветви, теряя гладкость, стремятся к нулю. В начале координат происходит четкое разделение дисперсионных кривых на три пары, из которых одна начинает вытягиваться вдоль оси x , а другая меняет форму, принимая вид ломаной, касается третьей. В точке касания происходит разрыв дисперсионной кривой. При дальнейшем увеличении параметра одна ветвь кривой исчезает с действительной плоскости, а две другие, разделившись на две общие части, продолжают отдаляться друг от друга.

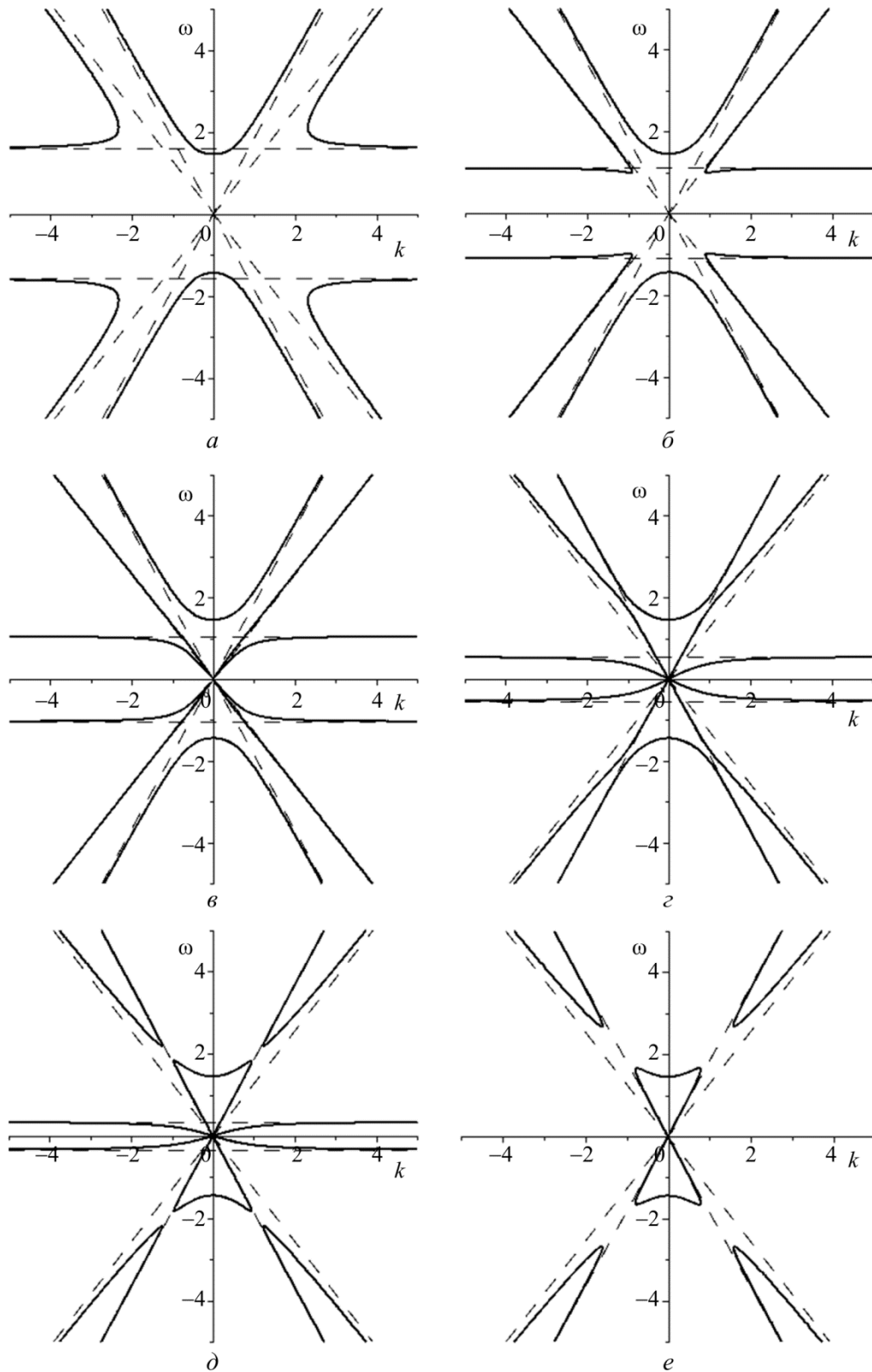


Рис. 1. Динамика дисперсионной кривой при изменении параметра a_5 ,

$$a_5^{(1)}(a) < a_5^{(2)}(b) < a_5^{(3)}(c) < a_5^{(4)}(d) < a_5^{(5)}(e) < a_5^{(6)}(f)$$

Fig. 1. Dynamics of disperse curve depending on alterations of parameter a_5 ,

$$a_5^{(1)}(a) < a_5^{(2)}(b) < a_5^{(3)}(c) < a_5^{(4)}(d) < a_5^{(5)}(e) < a_5^{(6)}(f)$$

Дисперсионная кривая, заданная уравнением (3), имеет две горизонтальные и четыре наклонные проходящие через начало координат асимптоты

$$\omega = \pm b_{\pm} k, \quad \omega = \pm \sqrt{1 + \frac{a_1 a_5}{a_3}},$$

где $b_{\pm} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + 4a_3}}$. Вертикальные асимптоты у кривой отсутствуют.

Подставляя $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ в (3), находим зависимость фазовой скорости и волнового числа:

$$v_{ph}^6 - \left(a_2 + \frac{1+a_1}{k^2} \right) v_{ph}^4 - \left(a_3 + \frac{a_1 a_4 - a_2}{k^2} \right) v_{ph}^2 + \frac{a_3 + a_1 a_5}{k^2} = 0. \quad (4)$$

При $k \rightarrow 0$ одна ветвь кривой уходит в бесконечность, а две другие принимают значения

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{a_2 - a_1 a_4}{2(1+a_1)} \pm \sqrt{\left(\frac{a_2 - a_1 a_4}{2(1+a_1)} \right)^2 + \frac{a_3 + a_1 a_5}{1+a_1}}}.$$

У кривых фазовых скоростей, определяемых зависимостью (4), наклонные асимптоты отсутствуют. Но есть шесть горизонтальных асимптот, две из которых нулевые и две – вертикальные нулевые асимптоты: $v_{ph} = \pm b_{\pm}$, $v_{ph} = 0$, $k = 0$.

Дифференцируя (3) по k и подставляя $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$, получаем связь групповой скорости и волнового числа:

$$v_{gr} = - \frac{k(a_2 \omega^4 + (2k^2 a_3 + a_1 a_4 - a_2) \omega^2 - 2(a_3 + a_1 a_5) k^2)}{\omega(-3\omega^4 + 2(a_2 k^2 + a_1 + 1) \omega^2 + a_3 k^4 + (a_1 a_4 - a_2) k^2)}. \quad (5)$$

В (5) ω определяется из дисперсионного уравнения (3). При $k \rightarrow 0$ одна ветвь кривой групповой скорости устремляется в начало координат, а две другие принимают соответствующие значения фазовых скоростей. Кривые групповых скоростей, определяемые зависимостью (5), имеют шесть горизонтальных асимптот, из которых две нулевые: $v_{gr} = \pm b_{\pm}$, $v_{gr} = 0$. Наклонные и вертикальные асимптоты отсутствуют.

Рассмотрим варианты расположения трех веток дисперсионной кривой, которые показывают характерное поведение системы. В силу симметрии графиков функций (3), (4), (5) относительно осей координат достаточно их изображения в первой четверти. Для удобства анализа представим зависимости $\omega(k)$, $v_{ph}(k)$, $v_{gr}(k)$ в одних осях (рис. 2).

На рисунке сплошной линией показана зависимость $\omega(k)$, длинным пунктиром – $v_{ph}(k)$, штрихпунктиром – $v_{gr}(k)$, коротким пунктиром отмечены асимптоты кривых. Из рисунка видно, что первая ветвь дисперсионной кривой зарождается на частоте $\omega = \omega_0 = 0$. При небольших волновых числах ($k < 1$), т.е. для длинных волн ($\lambda \gg 1$), частота стремится к значению $\omega = b_{+} k$, на бесконечности частота стремится к значению

$\omega = b_- k$. Фазовая и групповая скорости соответствующих ветвей стремятся к значению $v = b_-$ с разных сторон. Вторая ветвь дисперсионной кривой зарождается на частоте $\omega = \omega_0 \neq 0$. На бесконечности частота стремится к значению $\omega = b_+ k$. Соответствующие ветви кривых фазовой и групповой скорости стремятся к общей асимптоте $v_{ph} = v_{gr} = b_+$ с разных сторон. Третья ветвь дисперсионной кривой зарождается на частоте $\omega = \omega_0 = 0$. На бесконечности частота стремится к значению $\omega = \sqrt{1 + \frac{a_1 a_5}{a_3}}$, значения фазовой и групповой скоростей стремятся к нулю. На промежутке $(0, +\infty)$ групповая скорость меньше фазовой скорости, что говорит о нормальной дисперсии при выбранных значениях параметров системы.

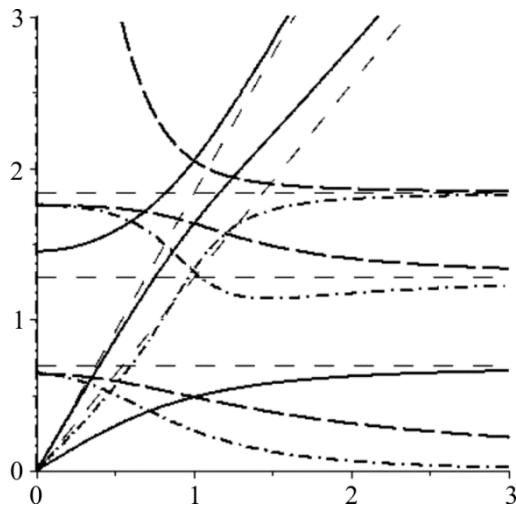


Рис. 2. Зависимости $\omega(k)$, $v_{ph}(k)$, $v_{gr}(k)$
 Fig. 2. Dependences of $\omega(k)$, $v_{ph}(k)$, $v_{gr}(k)$

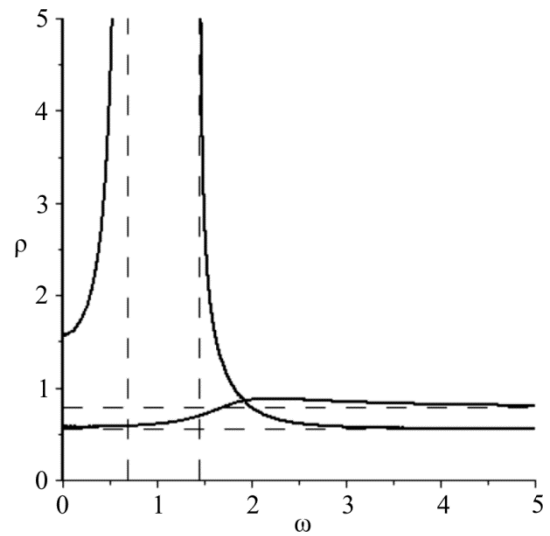


Рис. 3. Плотность спектра частот $\rho(\omega)$
 Fig. 3. Density of spectral frequencies $\rho(\omega)$

Плотность спектрального распределения [32] позволяет определить промежутки частот, на которых проявляется явление дисперсии волн. Вычисляется плотность спектрального распределения по следующей формуле:

$$\rho(\omega) = \text{const}' t \frac{dk}{d\omega},$$

где константу можно выбрать равной единице, так как на качественный вид кривой она не повлияет. С точностью до множителя плотность является величиной обратной к групповой скорости. Из графика плотности спектра частот несложно определить, при приближении к каким частотам спектр становится непрерывным. Плотность спектрального распределения для каждой ветви дисперсионной кривой изображена на рис. 3.

Из рисунка видно, что спектр частот сгущается и становится непрерывным при $\omega \rightarrow \sqrt{1 + \frac{a_1 a_5}{a_3}} - 0$. Спектр собственных частот $\omega \in \left[0, \sqrt{1 + \frac{a_1 a_5}{a_3}} \right)$. Значит, для медленной волны (на рис. 1 – третья ветка) дисперсия проявляется на высоких частотах. Также из

рис. 3 видно, что спектр частот становится непрерывным при $\omega \rightarrow \sqrt{1+a_1} + 0$. Спектр собственных частот лежит в диапазоне $(\sqrt{1+a_1}, +\infty)$. Значит, у быстрой волны, которая возникает из-за полостности среды, дисперсия проявляется на низких частотах. Небольшое увеличение плотности спектрального распределения у первой ветки дисперсионной кривой, соответствующей быстрой волне, возникшей в результате пористости среды, соответствует незначительной дисперсии. Спектр собственных частот $\omega \in [0, +\infty)$.

При изменении одного из параметров дисперсионная кривая претерпевает разрыв. Значение параметра $a_5 = a_5^*$, $a_5^* = a_3 + (a_2 + a_4)b_{\pm}^2$, при котором происходит разрыв дисперсионной кривой. Значение координат точки разрыва (k, ω) можно найти из условия пересечения кривой (3) со своей асимптотой или из условия пересечения двух веток дисперсионной кривой. Дисперсионная кривая после разрыва представлена на рис. 4.

Дисперсионная кривая (рис. 4) по-прежнему имеет три ветви, но их вид качественно изменился. Появилась ветка с двумя частотами зарождения и «свободная» ветка. На бесконечности кривая сохранила линейную асимптотику. Участки первой и второй веток дисперсионной кривой «перепрыгнули» асимптоту $\omega = b_{\pm}k$. Кривая групповой скорости приобретает асимптоты, аналитический вид которых не удастся отыскать. Дисперсия приобрела аномальный характер (рис. 4) на тех участках дисперсионной кривой, которые сменили расположение относительно асимптоты $\omega = b_{\pm}k$.

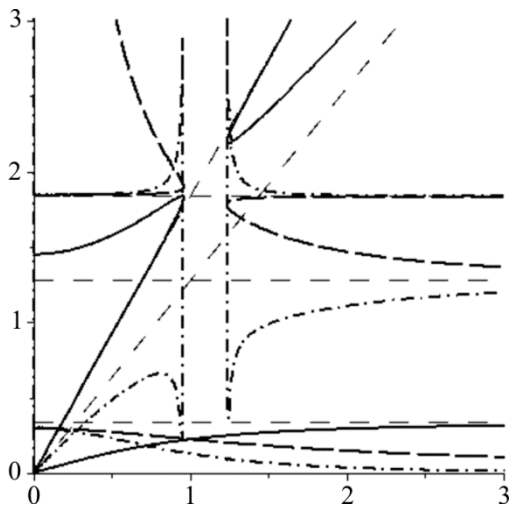


Рис. 4. Зависимости $\omega(k)$ (сплошная); $v_{ph}(k)$ (длинный пунктир); $v_{gr}(k)$ (штрихпунктир)
 Fig. 4. Dependences of $\omega(k)$ (solid line); $v_{ph}(k)$ (longdashedline); $v_{gr}(k)$ (dot-dash line)

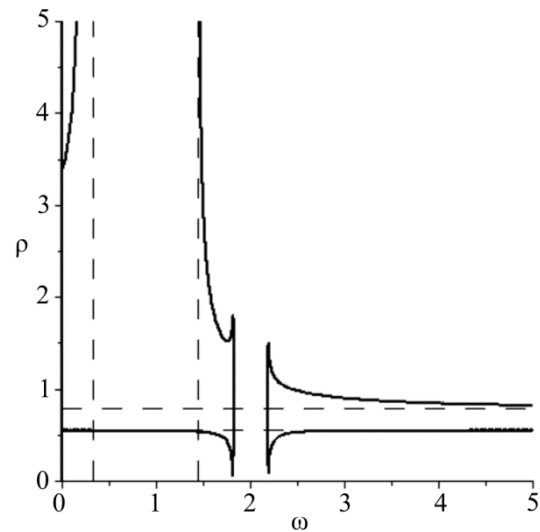


Рис. 5. Плотность спектра частот
 Fig. 5. Density of spectral frequencies

Спектр частот (рис. 5) становится непрерывным при стремлении частоты к четырем критическим частотам: $\omega \rightarrow \sqrt{1 + \frac{a_1 a_5}{a_3}} - 0$, $\omega \rightarrow \sqrt{1+a_1} + 0$, и частотам, вблизи которых дисперсионные кривые приобретают пики.

Заключение

Таким образом, в статье показано следующее:

1. В среде распространяются три продольные волны, две – быстрая и медленная за счет жидконасыщенной пористой среды и одна (на рис. 2. вторая ветка) – за счет полостности среды. При отсутствии полостей в среде дисперсионная кривая имела бы две ветви (как в среде Био): первая, которая всегда присутствует на плоскости (k, ω) , и третья, которая появляется вследствие пористости среды.

2. Волны, распространяющиеся в пористой среде с полостями, обладают значительной дисперсией. Причем быстрые волны обладают дисперсией в области низких частот, а медленные волны – в области высоких частот.

3. При фиксированных параметрах в системе может наблюдаться аномальная дисперсия на двух участках дисперсионной кривой. Существенная дисперсия проявляется вблизи четырех частот. У медленной волны на высоких частотах. У быстрой волны, которой соответствует «свободная» ветка дисперсионной кривой, дисперсия проявляется на низких частотах, а у быстрой волны, которой соответствует ветка с двумя частотами зарождения, – на частотах в области пика и в области ненулевой частоты зарождения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-19-10056).

Библиографический список

1. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. – 1941. – Vol. 12. – No. 1. – P. 155–164.
2. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // J. Appl. Phys. – 1955. – Vol. 26. – No. 1. – P. 182–185.
3. Biot M.A. General solution of the equations of elastisity and consolidation for a porous materials // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 1956. – Vol. 23. – No. 1. – P. 91–96.
4. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid – saturated solid // J. Acoust. Soc. Amer. – 1956. – Vol. 28. – No. 2. – P. 168–191.
5. Biot M.A., Willis D.G. The elastic coefficient of theory consolidation // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 1957. – Vol. 24. – No. 3. – P. 594–601.
6. Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustical propagation in porous media // J. Appl. Phys. – 1962. – Vol. 33. – No. 10. – P. 1482–1498.
7. Biot M.A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // J. Acoust. Soc. Amer. – 1962. – Vol. 34. – No. 1. – P. 1254–1264.
8. Biot M.A. Variational langrangian thermodynamics of nonisothermal fin the strain mechanics of porous solid and thermomolecular diffusion // Int. J. Solids and Struct. – 1977. – Vol. 13. – No. 6. – P. 579–597.
9. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Серия географическая и геофизическая. – 1944. – Т.8, № 4. – С. 133–149.
10. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, № 6. – С. 1115–1123.
11. Механика пористых насыщенных сред / В.Н. Николаевский, А.Т. Басниев, А.Т. Горбунов, Г.А. Зотов. – М.: Недра, 1970. – 335 с.
12. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
13. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика с применением к проблемам газовых и нефтяных пластов. – М.: Недра, 1996. – 477 с.

14. Coussy O. Poromechanics. – Wiley, 2004. – 312 p.
15. Coussy O. Mechanics and Physics of Porous Solids. – Wiley, 2010. – 282 p.
16. Leclario F., Cohen-Tenou djv, Aguirre Puente Y. Extension of Boit's theory of waves propagation to frozen porous media // J. Acoust. Soc. Amer. – 1994. – Vol. 96. – No. 6. – P. 3753–3768.
17. Быков В.Г. Сейсмические волны в пористых насыщенных породах. – Владивосток: Дальнаука, 1999. – 108 с.
18. Schanz M. Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: A Boundary Element Approach. – Berlin: Springer, 2001. – 170 p.
19. Марков М.Г. Распространение волны Релея вдоль границы пористой среды, насыщенной неньютоновской жидкостью // Акустический журнал. – 2005. – Т. 52, № 4. – С. 1–7.
20. Марков М.Г. Распространение упругих продольных волн в насыщенной пористой среде со сферическими неоднородностями // Акустический журнал. – 2005. – Т. 52. Приложение. – С. 132–139.
21. Хоа Н.Н., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных поверхностных кинематических возмущений в упругопористой полуплоскости // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 4. – С. 567–576.
22. Численное моделирование динамики составного пороупругого тела / Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук, Д.В. Тарлаковский, Н.А. Локтева // Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – Т. 75, № 2. – С. 130–136.
23. Гранично-элементный анализ волн на упругом, пористом и вязкоупругом полупространствах / Л.А. Игумнов, А.С. Оконечников, Д.В. Тарлаковский, А.А. Белов // Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – Т. 75, № 2. – С. 145–151.
24. Данг К.З., Тарлаковский Д.В. Действие на границу упругопористого полупространства с касательной диафрагмой нестационарной нормальной осесимметричной нагрузки // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 148–158.
25. Численно-аналитическое исследование динамики вязких пористо-упругих тел / Л.А. Игумнов, А.В. Аменицкий, А.А. Белов, С.Ю. Литвинчук, А.Н. Петров // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 108–114.
26. Poromechanics – A Tribute to Maurice A. Biot, Proceedings, Biot Conference on Poromechanics / J.-F. Thimus, Y. Abousleiman, A.H.-D. Cheng, O. Coussy, E. Detournay; eds. A.A. Balkema. – Rotterdam: Brookfield, 1998. – 648 p.
27. Poromechanics II / J.-L. Auriault, C. Geindrean, P. Royer, J.-F. Bloch, C. Boutin, L. Lewandovska; eds. A.A. Balkema. – Rotterdam: Brookfield, 2002. – 955 p.
28. Abousleiman Y.N., Cheng A.H.-D., Ulm F.-J. Poromechanics III / eds. A.A. Balkema. – Leiden, London, New York, Philadelphia, Singapore, 2005. – 828 p.
29. Poromechanics IV / eds. Ling H.I., Smyth A., Betti R. – DEStech Publications. Inc., PA, USA, 2009. – 1151 p.
30. Poromechanics V / eds. Hellmich C., Pichler B., Adam D. – ASCE, 2013 (CD).
31. Bagdoev A.G., Erofeev V., Shekoyan A.V. Wave Dynamics of Generalized Continua. – Springer, 2016. – 274 p.
32. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

References

1. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal Applied Physics*, 1941, vol. 12, no. 1, pp. 155-164.
2. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal Applied Physics*, 1955, vol. 26, no. 1, pp. 182-185.
3. Biot M.A. General solution of the equations of elastisity and consolidation for a porous materials. *Trans. ASME: Journal Applied Mechanics*, 1956, 23, no. 1, pp. 91-96.

4. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid – saturated solid. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, vol. 28, no. 2, pp. 168-191.
5. Biot M.A., Willis D.G. The elastic coefficient of theory consolidation. *Trans. ASME: Journal Applied Mechanics*, 1957, vol. 24, no. 3, pp. 594-601.
6. Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustical propagation in porous media. *Journal Applied Physics*, 1962, vol. 33, no. 10, pp.1482-1498.
7. Biot M.A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1962, vol. 34, no. 1, pp. 1254-1264.
8. Biot M.A. Variational langrangian thermodynamics of nonisothermal fin the strain mechanics of porous solid and thermomolecular diffusion. *Int. J. Solids and Struct.*, 1977, vol. 13, no. 6, pp. 579-597.
9. Frenkel' Ia.I. K teorii seismicheskikh i seismoelektricheskikh iavlenii vo vlazhnoi pochve [To the theory of the seismic and seismoelectric phenomena in the damp soil]. *Izvestiia AN SSSR. Seriya geograficheskaya i geofizicheskaya*, 1944, vol. 8, no. 4, pp. 133-149.
10. Kosachevskii L.Ia. O rasprostraneni uprugikh voln v dvukhkomponentnykh sredakh [On the propagation of elastic waves in two-component media]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, no. 23(6), pp.1115-1123.
11. Nikolaevskii V.N., Basniev A.T., Gorbunov A.T., Zotov G.A. Mekhanika poristyykh nasyshchennykh sred [Mechanics of porous saturated environments]. Moscow: Nedra, 1970. 335 p.
12. Nigmatulin R.I. Osnovy mekhaniki geterogennykh sred [Bases of mechanics of heterogeneous environments]. Moscow: Nauka, 1978. 336 p.
13. Nikolaevskiy V.N. Geomekhanika i fluiddodinamika s primeneniem k problemam gazovykh i neftiannykh plastov [Geomechanics and Fluidodynamics]. Moscow: Nedra, 1996. 477 p.
14. Coussy O. Poromechanics. *Wiley*, 2004. 312 p.
15. Coussy O. Mechanics and Physics of Porous Solids. *Wiley*, 2010. 282 p.
16. Leclario F., Cohen-Tenou djv, Aguirre Puente Y. Extension of Boit's theory of waves propagation to frozen porous media. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1994, vol. 96, no. 6, pp. 3753-3768.
17. Bykov V.G. Seismicheskie volny v poristyykh nasyshchennykh porodakh [Seismic waves in porous saturated breeds]. Vladivostok: Dal'nauka, 1999, 108 p.
18. Schanz M. Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: A Boundary Element Approach. Berlin: Springer, 2001, 170 p.
19. Markov M.G. Rasprostranenie volny Releia vdol' granitsy poristoi sredy, nasyshchennoi nen'iutonovskoi zhidkost'iu [Rayleigh wave propagation along the boundary of a non-newtonian fluid-saturated porous medium]. *Akusticheskii zhurnal*, 2005, vol.52, no. 4, pp. 1-7.
20. Markov M.G. Propagation of longitudinal elastic waves in a fluid-saturated porous medium with spherical inclusions. *Akusticheskii zhurnal*, 2005, vol. 51, pp. 132-139.
21. Hoa N.N., Tarlakovsky D.V. Rasprostranenie nestatsionarnyykh poverkhnostnykh kinemacheskikh vozmushchenii v uprugo-poristoi poluploskosti [The kinematics of pertubation in a porous elastic half-plane object]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2011, vol.17, no.4, pp. 567-576.
22. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Tarlakovsky D.V., Lokteva N.A. Chislennoe modelirovanie dinamiki sostavnogo porouprugogo tela [Numerically modeling the dynamics of a compound poroelastic body]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2013, vol. 75, no. 2, pp. 130-136.
23. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Belov A.A., Granichno-elementnyi analiz voln na uprugom, poristom i viazkouprugom poluprostranstvakh [Boundary-element analysis of waves over elastic, poro-and viscoelastichalf-spaces]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2013, vol. 75, no. 2, pp.145-151.
24. Dang Q.G., Tarlakovsky D.V. Deistvie na granitsu uprugo-poristogo poluprostranstva s kasatel'noi diafragmoi nestatsionarnoi normal'noi osesimmetrichnoi nagruzki [Influence on the border of porous elastic half-space by tangent diaphragm of normal nonstationary axial symmetric loading]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 148-158.

25. Igumnov L.A., Amenitskii A.V., Belov A.A., Litvinchuk S.Y., Petrov A.N. Chislennno-analiticheskoe issledovanie dinamiki viazkikh poristo-uprugikh tel [Numerical-analytic investigation of the dynamics of viscoelastic and porous elastic bodies]. *Journal of applied mechanics and technical physics*, 2014, vol. 55, no. 1, pp. 89-94.
26. Thimus J.-F., Abousleiman Y., Cheng A.H.-D., Coussy O., Detournay E. Poromechanics – A Tribute to Maurice A. Biot, Proceedings, Biot Conference on Poromechanics, Rotterdam: Brookfield, 1998. 648 p.
27. Auriault J.-L., Geindrean C., Royer P., Bloch J.-F., Boutin C., Lewandowska L. Poromechanics II, Rotterdam, Brookfield, 2002, 955 p.
28. Abousleiman Y.N., Cheng A.H.-D., Ulm F.-J. Poromechanics III. London, New York, Philadelphia, Singapore: Leiden, 2005, 828 p.
29. Poromechanics IV. DEStech Publications. Eds. H.I. Ling, A. Smyth, R. Betti. Inc., PA, USA, 2009. 1151 p.
30. Poromechanics V. Eds. C. Hellmich, B. Pichler, D. Adam. ASCE, 2013 (CD).
31. Bagdoev Alexander G., Erofeev Vladimir, Shekoyan Ashot V. Wave dynamics of generalized continua. Springer, 2016, 274 p.
32. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. Vvedenie v teoriiu kolebanii i voln [Introduction to the theory of fluctuations and waves]. Moscow: Nauka, 1984, 432 p.