

Горохов В.А., Казаков Д.А., Капустин С.А., Чурилов Ю.А. Алгоритмы численного моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций в рамках соотношений механики поврежденной среды // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 86–105. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.06

Gorokhov V.A., Kazakov D.A., Kapustin S.A., Churilov Yu.A. Algorithms for numerical simulation of structures deformation and fracture within relations of damaged medium mechanics. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 4. Pp. 86-105. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.06



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.06

УДК 539.3

## АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ В РАМКАХ СООТНОШЕНИЙ МЕХАНИКИ ПОВРЕЖДЕННОЙ СРЕДЫ

В.А. Горохов, Д.А. Казаков, С.А. Капустин, Ю.А. Чурилов

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 03 июня 2016 г.  
Принята: 15 октября 2016 г.  
Опубликована: 30 декабря 2016 г.

#### Ключевые слова:

пластичность, малоцикловая усталость, термосиловое нагружение, деформирование, накопление повреждений, разрушение, трещина, механика поврежденной среды

### АННОТАЦИЯ

Статья посвящена описанию реализованных в вычислительном комплексе УПАКС (ВК УПАКС) алгоритмов, позволяющих в приемлемое для инженерных расчетов время осуществлять исследование процессов зарождения и развития усталостных трещин при малоцикловых термосиловых нагружениях путем их прямого численного моделирования на основе МКЭ. Исследования проводятся в рамках соотношений механики поврежденной среды с использованием гипотез о многостадийном характере развития повреждений в процессе разрушения материала.

Представлено описание алгоритма прогнозирования процессов деформирования и накопления повреждений в элементах конструкций при малоцикловых термосиловых нагружениях, сочетающего возможности детального описания особенностей процессов деформирования и накопления повреждений на первых стадиях разрушения с минимизацией объема вычислений при численном моделировании названных процессов на основе МКЭ.

Для исследования третьей стадии разрушения предложен алгоритм моделирования развития трещины в элементах конструкций на основе результатов численного моделирования процесса на первых двух стадиях без изменения исходной топологии КЭ области исследуемых конструкций.

Представлены результаты численного моделирования процесса упругопластического разрушения экспериментального образца с концентратором в условиях плоского изгиба, выполненные на основе программных средств ВК УПАКС. Сравнение численных результатов с результатами эксперимента показало их хорошее согласование, подтвердившее работоспособность предложенного алгоритма.

© Горохов Василий Андреевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: vas-gor@rambler.ru

Казаков Дмитрий Александрович – кандидат технических наук, заведующий лабораторией, e-mail: kazakov@mech.unn.ru

Капустин Сергей Аркадьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, e-mail: sergei.kapustin@mail.ru

Чурилов Юрий Анатольевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: chyuan@rambler.ru

Vasilii A. Gorokhov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: vas-gor@rambler.ru

Dmitri A. Kazakov – PhD in Technical Sciences, Head of Laboratory, e-mail: kazakov@mech.unn.ru

Sergei A. Kapustin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Laboratory, e-mail: sergei.kapustin@mail.ru

Yuri A. Churilov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: chyuan@rambler.ru

На примерах моделирования процесса малоциклового разрушения цилиндрического образца с выточкой проведена верификация программных средств, реализующих предложенные алгоритмы в составе программных средств ВК УПАКС, подтвердившая возможность их эффективного использования для моделирования процессов малоциклового разрушения элементов конструкций.

© ПНИПУ

## ALGORITHMS FOR NUMERICAL SIMULATION OF STRUCTURES DEFORMATION AND FRACTURE WITHIN RELATIONS OF DAMAGED MEDIUM MECHANICS

V.A. Gorokhov<sup>1</sup>, D.A. Kazakov<sup>1</sup>, S.A. Kapustin<sup>1</sup>, Yu.A. Churilov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Research Institute of Mechanics National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 03 June 2016  
Accepted: 15 October 2016  
Published: 30 December 2016

#### Keywords:

plasticity, low-cycle fatigue, thermo-force loading, deformation, damage accumulation, fracture, crack, mechanics of damaged medium.

### ABSTRACT

The article describes the algorithms implemented in computational complex UPAKS (VC UPAKS) which allow studying the start and development of fatigue cracks under low-cycle thermopower loadings by a direct numerical simulation based on the finite element method within the time acceptable for engineering computations. The studies are carried out in the framework of damaged medium mechanics and use the hypotheses on the multi-stage nature of damage development in the process of material failure. The paper presents an algorithm of predicting deformation processes and damage accumulation in structural elements at low-cycle thermopower loadings, which combines the possibility to have a detailed description of deformation and damage accumulation in the early fracture stages while minimizing the number of computations in the numerical modeling of these processes on the basis of FEM. To investigate the third stage of fracture process, the authors have developed an algorithm for crack propagation modeling in structural elements on the basis of results of the process simulation in the first two stages without changing the initial topology of finite elements of the studied structure.

The results of simulation of elastic-plastic fracture of the experimental sample with a concentrator under a plain bending which have been made using VC UPAKS are given. The comparison of numerical results with experiments has shown their good compliance which proves that the efficiency of the proposed algorithm.

By using the simulation examples/cases of low-cycle fracture of a cylindrical recessed sample the authors verified the software that implements the proposed algorithms as part of VC UPAKS software. It proved that they can be effectively used to simulate low-cycle fracture processes of structure elements.

© PNRPU

## Введение

Интенсивное развитие современной вычислительной техники и численных методов позволяют использовать для оценки прочности конструкций при малоцикловых термосиловых нагружениях подходы, основанные на непосредственном моделировании процессов деформирования и накопления повреждений в материале конструкций с использованием в качестве определяющих уравнений соотношений механики поврежденной среды (МПС) [1–11].

Необходимость применения таких подходов диктуется современными представлениями о явлении разрушения как процессе, определяемом многостадийным развитием повреждений в материале в процессе его деформирования. Согласно таким представлениям процесс разрушения происходит в результате реализации основных стадий:

– первой стадии, характеризующейся зарождением и развитием микропор и микродефектов до образования макроскопического дефекта;

– второй стадии, в пределах которой происходит устойчивое развитие образовавшихся макродефектов до критического значения, соответствующего нарушению сплошности материала в рассматриваемой точке;

– третьей стадии, характеризуемой слиянием образовавшихся макродефектов в одну или несколько магистральных трещин, приводящих к разделению на части (фрагментации) рассматриваемого элемента конструкции.

Соотношение между длительностью этих стадий изменяется в широких пределах в зависимости от физико-химической природы, структуры и условий нагружения [12].

Согласно сложившимся традициям исследование процессов на первых двух стадиях осуществляется на основе различных моделей термопластичности и накопления повреждений, позволяющих описать развитие процесса повреждений в начально-бездефектном материале, а на третьей стадии с использованием методов механики разрушения, предполагающих наличие начального дефекта в виде трещины [13, 14]. Однако трещина зарождается и развивается в объемах материала, подготовленных к разрушению на первой стадии. Поэтому моделирование реальных процессов разрушения конструкций должно обеспечивать возможность описания протекания этих процессов как на начальной, так и на заключительной стадиях. С этой целью могут быть использованы подходы, основанные на применении соотношений МПС, позволяющие прогнозировать развитие дефектов в материале от момента их зарождения до предельного раскрытия магистральной трещины.

Реализация таких подходов при решении практических задач требует наличия надежных моделей, описывающих процессы упругопластического деформирования и накопления повреждений материалов на основе различных механизмов разрушения, эффективных методик решения нелинейных краевых задач, сформулированных на основе соотношений МПС, и разработки специальных алгоритмов, позволяющих моделировать процесс развития повреждений от исходного неповрежденного состояния до предельного раскрытия магистральной трещины.

Для описания процессов пластического деформирования материалов могут быть использованы любые модели термопластичности, позволяющие описать основные закономерности пластического деформирования материалов при циклических нагружениях [9–11, 15–20] а также кинетические уравнения разрушения, позволяющие учесть двухстадийный характер развития повреждений [9–11].

В настоящей статье рассмотрены алгоритмы, позволяющие в приемлемое для инженерных расчетов время проводить моделирование процессов деформирования и разрушения в элементах конструкций при малоцикловых термосиловых нагружениях в рамках соотношений механики поврежденной среды. Алгоритмы реализованы в составе программных средств вычислительного комплекса ВК УПАКС [21] решения на основе МКЭ задач деформирования и разрушения конструкций при квазистатических термосиловых нагружениях.

## **1. Методические основы моделирования процессов накопления повреждений при малоцикловых термосиловых нагружениях**

Исследование процессов упруговязкопластического деформирования и разрушения материалов конструкций осуществляется в ВК УПАКС на основе составной иерархической модели поврежденного материала в рамках соотношений МПС [9, 11]. В основу модели положена возможность представления сложного процесса развития взаимосвязанных эффектов деформирования и разрушения в виде последовательности формально независимых элементарных актов, описываемых соответствующими частными моделями пластичности и накопления повреждений. Учет взаимодействия и взаимного влияния таких элементарных актов при описании реальных процессов осуществляется в составной модели, обеспечивающей последовательную инициализацию частных моделей и коррекцию входящих в них параметров

(напряжений, поврежденности, параметров, характеризующих историю упруговязкопластического деформирования материала). При этом описание взаимодействия различных видов поврежденности и влияния их на процесс деформирования строится на основе инвариантной по отношению к природе этих повреждений скалярной меры поврежденности  $\omega$  впервые введенной Л.М. Качановым и Ю.Н. Работновым [1, 2]. Величина  $\omega$  меняется от значения  $\omega = 0$  для неповрежденного материала до  $\omega = 1$  – для полностью разрушенного материала.

Непосредственное влияние поврежденности на процесс деформирования учитывается в уравнениях равновесия путем введения зависимости упругих характеристик материала от текущего значения функции  $\omega$ . В связи с этим при формулировке составной модели поврежденного материала в рассмотрение введены две характеристики напряжений: эффективные  $\sigma_{ij}$ , действующие на поврежденных площадках, и приведенные  $\sigma_{ij}^*$ , статически эквивалентные первым, но отнесенные к неповрежденным площадкам. Первые фигурируют во всех частных моделях, определяющих состояние материала в точке тела, вторые используются на уровне описания конструкции при формулировке уравнений равновесия и статических граничных условий.

Общие соотношения модели поврежденного материала, устанавливающие связь между изменениями приведенных напряжений  $\Delta\sigma_{ij}$  и деформаций  $\Delta e_{ij}$  на элементарном шаге изменения внешних воздействий, а также параметрами, характеризующими текущее состояние материала на элементарном шаге изменения внешних воздействий. Они имеют вид уравнений упругости с дополнительными членами  $\Delta d_{ij}$ , обусловленными эффектами температуры, необратимого деформирования и деградации свойств материала, связанной с накоплением повреждений.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij}^* &= 2G(\Delta e_{ij} - \Delta d_{ij}) + \delta_{ij} \left( K - \frac{2}{3}G \right) (\Delta e_{ii} - \Delta d_{ii}), \\ \Delta d_{ij} &= \Delta e_{ij}^* + \omega (\Delta e_{ij} - \Delta e_{ij}^*), \\ \Delta e_{ij}^* &= \Delta e_{ij}^p + \Delta e_{ij}^c - \frac{\Delta G^* \bar{\sigma}'_{ij}}{2G^* \bar{G}^*} + \delta_{ij} \left[ \Delta(\alpha T) - \frac{\Delta K^* \bar{\sigma}}{3K^* \bar{K}^*} \right], \\ \Delta G^* &= G^* - \bar{G}^*; \quad G^* = (1 - \omega)G; \quad \bar{G}^* = (1 - \bar{\omega})\bar{G}, \\ \Delta K^* &= K^* - \bar{K}^*; \quad K^* = (1 - \omega)K; \quad \bar{K}^* = (1 - \bar{\omega})\bar{K}, \\ \Delta(\alpha T) &= \alpha T - \bar{\alpha} \bar{T}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\bar{K} = K(\bar{T})$ ,  $K = K(T)$ ,  $\bar{G} = G(\bar{T})$ ,  $G = G(T)$  – модули объемной и сдвиговой деформации неповрежденного материала, отнесенные к уровню температур в исходном (в начале шага) и текущем (в конце шага) состояниях;  $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{T})$ ,  $\alpha = \alpha(T)$  – значения коэффициентов температурного расширения;  $\bar{\omega}, \omega$  – значения мер поврежденности в исходном и текущем состояниях;  $\bar{\sigma}'_{ij}, \bar{\sigma}$  – значения девиаторных и шаровой составляющих тензора эффективных напряжений в исходном состоянии.

Фигурирующие в общей модели величины изменения пластических деформаций  $\Delta e_{ij}^p$  и деформаций ползучести  $\Delta e_{ij}^c$ , описываемые соответствующими частными моделя-

ми, однозначно определяются уровнями эффективных напряжений  $\sigma_{ij}$  и температур  $T$  в исходном и текущем состояниях, а также наборами скалярных и тензорных параметров, являющихся функционалами процесса и характеризующих истории упругопластического деформирования и ползучести соответственно.

Определяющие соотношения в этих моделях записываются для неповрежденного материала и формально не включают в себя какой-либо зависимости от текущей поврежденности. Влияние последней проявляется лишь через уровень зависящих от  $\omega$  эффективных напряжений  $\sigma_{ij}$ .

Исследование поведения конструкций на основе рассмотренного подхода строится путем пошагового интегрирования инкрементальных уравнений, описывающих их равновесное состояние в метрике текущей деформированной конфигурации с использованием специальной комбинированной шаговой схемы [9, 11]. Численное решение линейризованных задач осуществляется МКЭ на основе изопараметрических квадратичных КЭ с сирендиповой аппроксимацией поля перемещений [11]. Вся физическая информация в элементе (температура, напряжения, деформации и т.д.) определяется на основе квадратичной интерполяции соответствующих параметров в «физических» узлах элемента.

Для исследования процессов деформирования и разрушения конструкций от неповрежденного состояния до предельного раскрытия магистральной трещины, при котором происходит исчерпание конструкцией ее несущей способности, на основе рассмотренных методических положений может быть непосредственно использован описанный в [9, 11] общий алгоритм решения нелинейных задач деформирования и разрушения конструкций, заключающийся в пошаговом интегрировании определяющих уравнений для последовательности изменения внешних воздействий, соответствующих текущим этапам нагружения. При этом на каждом этапе решается нелинейная краевая задача для соответствующего изменения внешних воздействий с учетом всей предшествующей истории необратимого деформирования и накопленной поврежденности материала. Дальнейшее преобразование нелинейных уравнений на основе известных схем линейризации приводит к необходимости решать на каждом шаге целую последовательность линейных краевых задач.

Непосредственное применение описанного алгоритма для исследования поведения конструкций для достаточно протяженных траекторий нагружения (таких как малоцикловые нагружения) представляется весьма затруднительным, как из-за большой трудоемкости вычислений, связанной с необходимостью проследивать решение задач для большого числа шагов по нагрузке, так и из-за возможности накопления численной погрешности. Кроме этого, применение его для моделирования третьей стадии процессов разрушения (анализа траекторий развития трещин) также требует учета ряда дополнительных обстоятельств и введения в общий алгоритм решения задачи некоторых изменений.

Для моделирования процесса пластического деформирования материала в предлагаемом алгоритме использован реализованный в ВК УПАКС вариант модели термопластичности с комбинированным упрочнением, описывающий основные закономерности пластического деформирования при циклических нагружениях и вариант модели накопления повреждений, учитывающей двухстадийный характер развития этих процессов [9, 11, 21].

При описании процесса пластического деформирования вводится понятие поверхности текучести  $F$ , которая представляется в виде гиперсферы в пространстве девiatorов напряжений  $\sigma'_{ij}$ . Координаты центра поверхности определяются компонентами тензора остаточных микронапряжений  $\rho_{ij}$ . В модели предполагается, что в процессе развития

пластических деформаций поверхность текучести меняет свои размеры (изотропное упрочнение, описываемое изменениями радиуса поверхности текучести  $C_p$ ) и смещается в пространстве девиаторов напряжений (кинематическое упрочнение, характеризуемое изменением тензора остаточных микронапряжений  $\rho_{ij}$ ):

$$F = S_{ij}S_{ij} - C_p^2, \quad (2)$$

где  $S_{ij}$  – тензор активных напряжений,

$$S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}. \quad (3)$$

Координаты центра поверхности текучести  $\rho_{ij}$  и ее радиус  $C_p$  являются функциями процесса пластического деформирования и зависят от температуры, пластических деформаций и истории их изменения.

Для учета зависимости процесса пластического деформирования от циклических свойств материала в рассматриваемую модель также вводится дополнительная поверхность «памяти» для тензора остаточных микронапряжений радиусом  $\rho_c$

$$F_\rho = \rho_{ij} \cdot \rho_{ij} - \rho_c^2 = 0, \quad (4)$$

и член, учитывающий стремление радиуса поверхности текучести  $C_p$  при монотонном циклическом нагружении к некоторому стационарному значению  $C_s$ , зависящему не от предшествующей истории пластического деформирования, а от параметров стабильной петли, характеризуемых значением  $\rho_c$ .

В результате изменения перечисленных величин  $\Delta C_p$ ,  $\Delta \rho_{ij}$  и  $\Delta \rho_c$  на шаге нагружения представляются в виде

$$\begin{aligned} \Delta C_p &= (q_k^p \cdot H^+ + q_c^p (C_s - C_p) \cdot H^-) \Delta k_p + q_t^p \Delta T, \\ H^+ &= \begin{cases} 1, F_\rho = 0, (\Delta \rho_{ij} \rho_{ij}) > 0, \\ 0, F_\rho < 0, (\Delta \rho_{ij} \rho_{ij}) \leq 0, \end{cases} \quad H^- = 1 - H^+, \\ \Delta \rho_{ij} &= g_1^p \cdot \Delta e_{ij}^p + g_2^p \cdot \rho_{ij} \cdot \Delta k_p + g_t^p \cdot \rho_{ij} \langle \Delta T \rangle, \\ \Delta \rho_c &= \left\{ \left[ (\bar{\rho}_{ij} + \Delta \rho_{ij})(\bar{\rho}_{ij} + \Delta \rho_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}} - (\bar{\rho}_{ij} \bar{\rho}_{ij})^{\frac{1}{2}} \right\} H^+ - q_c^p \langle \bar{\rho}_c - \rho^R \rangle \Delta k_p H^-, \end{aligned} \quad (5)$$

$$k_p = \bar{k}_p + \Delta k_p; \quad \Delta k_p = \left( \frac{2}{3} \cdot \Delta e_{ij}^p \cdot \Delta e_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

где  $C_s = C_s(T, \rho_c)$  – стационарное значение радиуса поверхности текучести для данного материала;  $q_k^p(T, k_p)$ ,  $q_c^p(T)$ ,  $q_t^p(T, k_p)$ ,  $g_1^p(T)$ ,  $g_2^p(T)$ ,  $g_t^p(T)$  – материальные функции, получаемые на основе соответствующих экспериментальных данных [9].

При моделировании процесса накопления повреждений введено предположение, что разрушение материала в некоторой точке происходит при достижении критического значения  $W = W^R$  энергии пластического разрыхления  $W$ , определяемой работой тензора остаточных микронапряжений  $\rho_{ij}$  на пластических деформациях:

$$W = \int_0^{e^p} \rho_{ij} de_{ij}^p. \quad (7)$$

Предполагается также, что  $W^R$  зависит от вида напряженно-деформированного состояния (НДС), температуры  $T$ , но инвариантна по отношению к конкретным траекториям нагружения. Таким образом, разрушение представляется как процесс, характеризуемый изменением энергии разрушения  $W$  от значения  $W=0$  для неповрежденного материала до  $W = W^R$  – полного разрушения материала в рассматриваемой точке.

Для идентификации процесса накопления повреждений в модель также вводится функция поврежденности  $\psi$ , представляющая собой нормированный аналог энергии пластического разрыхления  $W$ . Изменение функции поврежденности  $\Delta\psi$  связано с изменением энергии  $\Delta W$  при фиксированном виде НДС, характеризуемым значением параметра  $\Pi$  (параметра вида НДС) соотношением

$$\Delta\psi = \frac{\Delta W}{W^R(\Pi)}, \quad (8)$$

где  $\Delta W$  – изменение энергии пластического разрыхления на элементарном шаге изменения нагрузки.

Для описания влияния текущего уровня поврежденности на характеристики процесса деформирования на второй стадии накопления повреждений в рассматриваемой модели вводится скалярная мера поврежденности  $\omega$ . Величина  $\omega$  рассматривается как величина, инвариантная по отношению к виду поврежденности, виду НДС и траекториям нагружения.

Изменение меры поврежденности  $\Delta\omega$ , в свою очередь, связано с накопленным значением  $\bar{\omega}$ , а также с изменением эффективной части функции поврежденности  $\Delta\psi^0$ , соответствующей второй стадии накопления повреждений:

$$\Delta\omega = q \cdot \bar{\omega}^{\frac{q-1}{q}} \cdot \Delta\psi^0, \quad (9)$$

где  $q = q(T)$  – функция материала.

Учет наличия фаз при описании накопления повреждений осуществляется по аналогии с моделями, описанными в [9], путем введения переменной, определяющей завершение первой фазы. В качестве такой переменной используется величина  $\psi^a$ , определяемая значением упомянутой выше функции поврежденности к концу первой фазы [11],

$$\psi^a = \psi^a(T, \rho_c) = \frac{W^a}{W^R}, \quad (10)$$

где  $W^a = W^a(T, \rho_c)$  – амплитудное значение энергии пластического разрыхления к концу первой фазы, являющееся функцией температуры  $T$  и параметра  $\rho_c$ , характеризующего размах амплитуды пластических деформаций текущего цикла нагружения [9].

При этом изменение эффективной части функции поврежденности  $\Delta\psi^0$  представляется в виде [11]

$$\Delta\psi^0 = \begin{cases} \Delta\psi/(1-\psi^a) & \text{при } \psi \geq \psi^a \quad \text{или } \bar{\omega} > 0, \\ 0 & \text{при } \psi < \psi^a \quad \text{и } \bar{\omega} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Иначе говоря, мера поврежденности в точке тела становится отличной от нуля лишь тогда, когда функция поврежденности  $\psi$  достигает некоторого амплитудного значения  $\psi^a$ .

## 2. Алгоритм прогнозирования процессов накопления повреждений при малоцикловых термосиловых нагружениях

В рамках настоящей статьи рассмотрены алгоритмы прогнозирования процессов деформирования и накопления повреждений в элементах конструкций при малоцикловых термосиловых нагружениях, сочетающие возможности детального описания особенностей процессов деформирования и накопления повреждений с минимизацией объема вычислений.

В соответствии с рассмотренными выше предположениями о многостадийном характере развития повреждений в материале в процессе его деформирования в пределах первой стадии в процессе упруговязкопластического деформирования происходит преобразование структуры материала, приводящее к возникновению эффектов упрочнения и разупрочнения, а также зарождению рассеянных по объему материала повреждений в виде микропор, микротрещин, характеризуемых функцией поврежденности материала  $\psi$ . Влияние накопленных повреждений на упругие характеристики материала на этой стадии, до достижения величиной  $\psi$  некоторого амплитудного значения  $\psi = \psi^a$ , незначительно, и мера повреждения  $\omega$  в пределах этой стадии принимается равной нулю.

При циклических нагружениях в пределах этой стадии может происходить стабилизация процесса циклического деформирования, проявляющаяся в стабилизации амплитудных значений напряжений, деформаций, пластических деформаций. На участке процесса от начала стабилизации до конца первой стадии накопления повреждений, соответствующего значению  $\psi = \psi^a$ , параметры процесса пластического деформирования практически постоянны (амплитудные значения напряжений, деформаций, пластических деформаций, компонентов тензора  $\rho_{ij}$ ), а интегральные параметры  $k_p$  (длина траектории пластической деформации),  $\psi$ , характеризующие накопление повреждений, меняются по закону, близкому к линейному. Поэтому на этом участке можно с достаточной степенью достоверности прогнозировать значения перечисленных выше параметров путем их линейной экстраполяции на определенное число циклов вперед, исключив соответствующую часть трудоемкого процесса пошагового интегрирования уравнений исходной задачи.

Стабилизация процесса деформирования при малоцикловых нагружениях обычно наступает по истечении первых 10–20 циклов либо не наступает вообще. В последнем случае применение каких-либо процедур прогнозирования процесса теряет смысл.

Завершение периода стабилизации процесса циклического деформирования соответствует началу заметного влияния развивающейся поврежденности на характеристики процесса деформирования, т.е. началу второй фазы развития повреждений. При этом



в отдельных точках конструкции будет происходить перераспределение действующих напряжений и деформаций и прогноз дальнейшего протекания процесса циклического деформирования может привести к неверным результатам. В связи с этим в качестве конечной точки, характеризующей состояние материала, до которого целесообразно экстраполировать решение, можно выбрать значение функции поврежденности  $\psi = \psi^a$ , соответствующее концу первой стадии накопления повреждений.

На второй стадии разрушения при  $\psi \geq \psi^a$  в материале происходит коллективное взаимодействие развивающихся микропор и микротрещин, приводящее к значительному влиянию накопленной поврежденности на макроскопические характеристики материала (модуль упругости, скорость звука и т. д.) и соответствующему росту меры повреждения  $\omega$ . На этой стадии прогнозирование параметров процесса циклического деформирования с использованием схем линейной экстраполяции весьма проблематично, хотя и в этих случаях можно применить прогнозирование на основе нелинейных алгоритмов.

Перечисленные обстоятельства послужили основой создания алгоритмов прогнозирования процессов деформирования и накопления повреждений в элементах конструкций при малоцикловых термосиловых нагружениях [22].

В основу таких алгоритмов положена возможность линейной экстраполяции по циклам нагружения параметров, характеризующих упругопластическое состояние и поврежденность материала в узлах конструкции, на основе установления закономерностей изменения этих параметров на различных участках процесса циклического деформирования.

В качестве начальной точки экстраполяции выбирается число циклов, соответствующее началу стабилизации процесса циклического деформирования (точки выхода на линейный участок изменения функции  $\psi(n)$ ,  $n$  – номер цикла нагружения). В конструкции такое условие должно выполняться одновременно для всех физических узлов области. При этом допуск  $\delta$  на отклонение функции  $\psi(n)$  от линейного изменения может быть установлен опытным путем.

В качестве конечной точки экстраполяции в рассмотренном алгоритме выбрано состояние, соответствующее наступлению второй стадии накопления повреждений, то есть когда функция  $\psi$  достигнет амплитудного значения  $\psi = \psi^a$ . При этом для получения предельного состояния материала исследуемого объекта, соответствующего завершению второй стадии процесса (достижению в наиболее нагруженной точке конструкции значения меры поврежденности  $\omega = 1$ ), потребуется продолжить процесс пошагового интегрирования исходных уравнений на основе обычной схемы либо применить алгоритм на основе рассмотренной ниже схемы нелинейного прогнозирования. Суть этой схемы заключается в экстраполяции параметров поврежденности материала  $\psi$  и  $\omega$  на число циклов EXT2, определяемое заданным изменением меры поврежденности  $\Delta\omega^{\max}$  в наиболее нагруженном узле конструкции, с последующим уточнением ее равновесного состояния. Значения параметров EXT2<sub>*i*</sub> для *i*-го узла конструкции можно получить из (9) и (11):

$$\text{EXT2}_i = \frac{\Delta\psi_i^{\max}}{\Delta\psi_i}, \quad (12)$$

$$\Delta\psi_i^{\max} = \Delta\psi_i^{0\max} (1 - \psi_i^a); \Delta\psi_i^{0\max} = \frac{\Delta\omega^{\max}}{\frac{p-1}{p\bar{\omega}_i^P}}.$$

Здесь  $\Delta\psi_i$  – приращение функции поврежденности последнего просчитанного цикла. Число циклов экстраполяции EXT2 определяется как минимальное из  $EXT2_i$  в узлах конструкции:

$$EXT2 = \min(EXT2_i). \quad (13)$$

После вычисления величины EXT2 осуществляется экстраполяция параметров поврежденности в физических узлах конструкции:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \bar{\psi}_i + EXT2 \cdot \Delta\psi_i; \\ \Delta\psi_i^0 &= \frac{\Delta\psi_i \cdot EXT2}{1 - \psi_i^a}, \\ \omega_j &= \bar{\omega}_j + \Delta\omega_j; \Delta\omega_j = p\bar{\omega}_j^P \Delta\psi_i^0. \end{aligned} \quad (14)$$

Экстраполяция второго уровня может производиться неоднократно, пока в некотором физическом узле конструкции мера поврежденности  $\omega$  не достигнет критического значения, что будет свидетельствовать о появлении макроскопической трещины. При этом для грубой оценки предельного состояния вместо этого алгоритма можно принять  $\psi = 1$  и сразу получить приближенную оценку предельного числа циклов.

Очевидно, что правомерность применения предложенных алгоритмов прогнозирования и области его применения существенно зависят от возможности реализации указанных выше условий стабилизации параметров циклического деформирования материалов при различных режимах циклических нагружений.

Применительно к случаям малоциклового пластического деформирования элементов конструкций в условиях однородного НДС, которое обычно стремятся реализовать при проведении соответствующих экспериментов, можно выделить ряд типовых режимов с характерными для каждого из них закономерностями изменения пластических деформаций. В частности, известны жесткие нагружения с заданной амплитудой изменения деформаций и мягкие нагружения, в которых задаются амплитуды изменения компонент тензора напряжений, причем в пределах каждой из перечисленных групп могут быть реализованы различные варианты конкретных режимов, определяемых различными значениями параметров асимметрии цикла.

В связи с этим была проведена серия численных экспериментов, позволившая установить основные закономерности кинетики процессов малоциклового деформирования стали 12X18Н10Т на основе анализа результатов численного моделирования для некоторых наиболее важных типов нагружения в условиях однородного напряженного состояния.

В результате проведенных исследований установлено, что в случаях жестких симметричных и несимметричных нагружений стабилизация петель пластического гистерезиса наступает достаточно быстро после нескольких первых циклов. При этом для симметричных режимов петли располагаются симметрично относительно начала координат,

а для несимметричных – смещены вдоль оси деформаций на величину, соответствующую степени асимметрии цикла. Ширина петель не меняется и определяется амплитудными значениями торцевых перемещений.

В случаях мягких симметричных нагружений по мере увеличения числа циклов координаты центров петель гистерезиса практически не меняются, при этом последовательно уменьшается ширина петель, асимптотически приближаясь к некоторому стационарному значению, зависящему от амплитудных значений торцевых нагрузок, которое для рассмотренных задач достигалось при  $n \approx 20$  циклов.

Для перечисленных (жестких и мягких симметричных) вариантов нагружений, с момента стабилизации процесса циклического деформирования, в пределах первой стадии накопления повреждений изменение функции поврежденности  $\Delta\psi_n$  за цикл нагружения  $n$  практически постоянно.

Также было установлено, что при мягких несимметричных нагружениях характерные особенности процесса малоциклового деформирования проявляются в смещении петель гистерезиса вдоль оси деформаций и уменьшении ширины петель с ростом числа циклов. При этом по мере увеличения значения параметра асимметрии цикла ширина петли и размах деформации за цикл монотонно убывают, а смещение петель меняется от нуля для симметричного цикла при  $R_\sigma = 0$  ( $R_\sigma = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2p_{\max}}$ ,  $p_{\max}$  – максимальное напряжение в цикле;  $p_{\min}$  – минимальное напряжение в цикле) и достигает максимального значения в диапазоне  $0 < R_\sigma < 0,5$  ( $R_\sigma = 0,5$  – значение параметра асимметрии пульсирующего цикла).

При циклическом деформировании реальных конструкций из-за неоднородности НДС в различных точках материала и возможности перераспределения напряжений и деформаций в процессе пластического деформирования редко реализуется какой-либо один тип нагружения, хотя особенности каждого из них могут превалировать в зависимости от режима нагружения самой конструкции.

Полученные результаты позволили рекомендовать предложенный выше алгоритм прогнозирования для моделирования процессов малоциклового деформирования для всех рассмотренных типов нагружения в пределах первой стадии накопления повреждений.

В пределах второй стадии накопления повреждений развивающаяся поврежденность начинает приводить к деградации исходных свойств материала и нарушению условий стационарности процесса циклического деформирования, поэтому для моделирования процесса на этой стадии приходится использовать традиционную схему пошагового интегрирования уравнений либо применять прогнозирование на основе нелинейных алгоритмов.

### **3. Моделирование процессов развития магистральных трещин в рамках соотношений механики поврежденной среды**

Завершение второй стадии накопления повреждений в наиболее нагруженной точке конструкции (предельного состояния материала объекта) еще не приводит к нарушению ее несущей способности (предельного состояния объекта), так как за ней следует третья стадия, характеризующаяся слиянием образовавшихся макродефектов в одну или несколько магистральных трещин и продолжающимся сопротивлением конструкции приложенным

воздействиям. При этом результаты моделирования поведения конструкции на первых двух стадиях могут служить отправной точкой для моделирования последующего развития трещин.

В соответствии с рассмотренными выше модельными представлениями в процессе упругопластического деформирования материала конструкции в отдельных зонах могут зарождаться и развиваться зоны повреждений, интенсивность которых характеризуется мерой поврежденности  $\omega$ . Увеличение меры  $\omega$  в физическом узле конструкции приводит к снижению упругих характеристик материала (модулей  $G$  и  $K$ ) в этом узле и тем самым к снижению его сопротивляемости. При этом в районе таких узлов происходит перераспределение напряжений по объему материала. К моменту завершения в узле второй стадии накопления повреждений (достижения предельного значения  $\omega = 1$ ) материал в районе такого узла полностью перестает сопротивляться дальнейшему деформированию, перераспределяя воспринимаемую ранее нагрузку на ближайшие соседние узлы. В результате в соседних узлах возрастает интенсивность роста поврежденности, и при достижении критического значения меры  $\omega = 1$  материал в районе таких узлов также выключается из работы.

Вообще говоря, для дальнейшего моделирования процесса необходимо вводить в районе разрушения элементарную трещину путем введения вместо одного разрушенного узла двух несвязанных узлов и продолжить вычислительный процесс с измененной топологией расчетной области. Однако реализация такого подхода сопряжена со значительными трудностями, так как при этом для каждого случая локального нарушения прочности приходилось бы перестраивать сетку КЭ разбиения исследуемой области, а следовательно, менять структуру информационных массивов, осуществлять переинтерполяцию физических величин на новую сеточную область, не нарушая при этом условий равновесного состояния в локальной зоне повреждения и конструкции в целом.

В предлагаемом алгоритме для моделирования процесса развития магистральной трещины предложено использовать способ «выключения» узлов при достижении в них критического значения меры  $\omega$ . Напряжения в таком узле принимаются равными нулю, а влияние трещины на окружающую зону материала компенсируется дополнительными силами, определяемыми изменением полных деформаций в рассматриваемом узле и не нарушающими равновесного состояния в районе введенной несплошности [11].

Таким образом, процесс последовательного «выключения» соседних узлов в процессе нагружения конструкции позволяет моделировать процесс развития магистральной трещины без изменения исходной топологии дискретной области. При этом параметры, определяющие предельное состояние исследуемой конструкции, могут быть получены на основе реализованных в ВК УПАКС условий исчерпания конструкцией ее несущей способности [9, 11, 21].

В качестве иллюстрации работоспособности предложенного алгоритма для моделирования процессов зарождения и развития магистральных трещин ниже представлены результаты численного моделирования процесса упругопластического разрушения экспериментального образца с концентратором в условиях плоского изгиба, выполненные на основе программных средств ВК УПАКС [21].

Образец, представляющий собой прямоугольную призму длиной  $l = 65$  мм и поперечным сечением  $b = 20$  мм  $h = 10$  мм с поперечным надрезом глубиной  $\delta = 4$  мм, постоянной по всей ширине образца, шарнирно оперт на две жесткие опоры, расположенные

друг от друга на расстоянии  $l_0 = 50$  мм. Образец выполнен из алюминиевого сплава АК-4 и нагружен вертикальной силой  $P$ , равномерно распределенной по его ширине вдоль линии в среднем поперечном сечении образца.

В эксперименте нагружение образца осуществлялось за счет перемещения захватов испытательной машины УМЭ-10Т через индентор, установленный по ширине образца в его центральном сечении.

При проведении численного исследования реальное нагружение моделировалось вертикальными перемещениями, приложенными через компенсирующую прокладку по узкой полосе на верхней грани образца. Аналогичные компенсирующие прокладки устанавливались также в районе опор для исключения возникновения нежелательных при проведении численных исследований пластических деформаций.

Численное моделирование процессов деформирования и разрушения образца осуществлялось в пространственной постановке для симметричной  $1/4$  его части, ограниченной плоскостями симметрии в продольном и поперечном направлениях, с использованием реализованных в ВК УПАКС двадцатиузловых изопараметрических конечных элементов.

Размер шага по нагрузке выбирался на основе проведения предварительных расчетов из условия удовлетворительного описания кривой  $P-V$  ( $V$  – вертикальное смещение верхней точки центрального сечения образца), характеризующей процесс разрушения образца.

В процессе проведения численного моделирования была получена исчерпывающая информация о распределении всех параметров, характеризующих изменение НДС в материале образца в процессе его нагружения (интенсивности напряжений  $\sigma_u$ , главных напряжений  $\sigma_i$  ( $i = 1-3$ ), параметра Одквиста  $k_p$ , параметра вида НДС  $\Pi$ , меры поврежденности  $\omega$ ).

На рис. 1 показаны картина распространения трещины в поперечном сечении образца для значения нагрузки  $t = \frac{V}{V_M} \approx 1,1$  и фотография разрушенного в результате эксперимента образца.

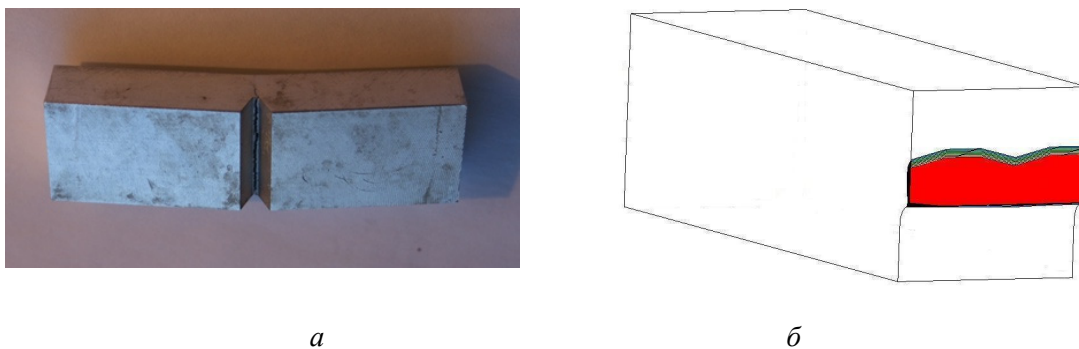


Рис. 1. Фотография разрушенного образца (а) и картина распространения трещины по результатам численного моделирования (б)  
 Fig. 1. Picture of fractured sample (a) and crack growth according to results of numerical modeling (b)

На рис. 2 показан график зависимости силы  $P$  от перемещения контролируемой точки  $V$ , построенный на основе результатов численного моделирования, в виде пунктирной линии и результатов эксперимента, обозначенных сплошной линией.

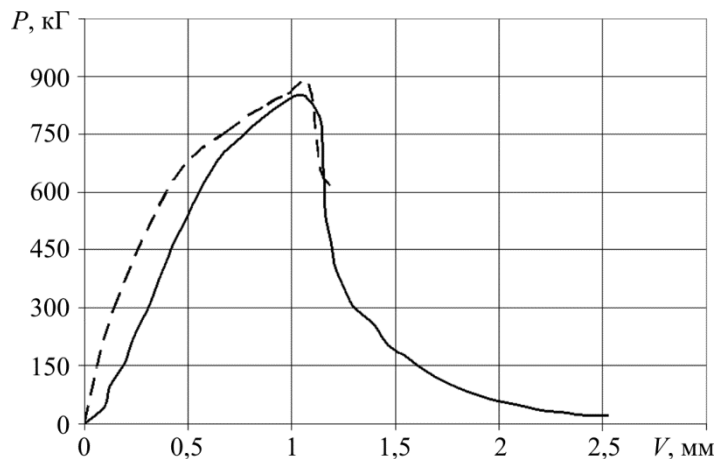


Рис. 2. Зависимости силы  $P$  от перемещения контролируемой точки  $V$  (сплошная линия – эксперимент, пунктирная линия – численное моделирование)

Fig. 2. Dependences between force  $P$  and displacement of controlled point  $V$  (solid line shows the experiment, dotted line shows numerical modelling)

Приведенные результаты позволяют судить о том, что результаты численного моделирования процесса разрушения на основе рассмотренного выше алгоритма хорошо согласуются с экспериментальными данными. Максимальное значение силы  $P$ , отличающееся в расчете от экспериментального значения на величину  $\delta \approx 3\%$ , достигается в расчете и эксперименте при перемещениях, отличающихся не более чем на  $3,6\%$ .

#### 4. Оценка работоспособности и вычислительной эффективности предложенных алгоритмов моделирования процессов малоциклового разрушения

С целью оценки работоспособности и вычислительной эффективности описанного выше алгоритма прогнозирования процессов развития повреждений при малоцикловых нагружениях рассмотрен ряд примеров численного моделирования процессов малоциклового деформирования элементов конструкций, выполненных с помощью программных средств ВК УПАКС. Численное решение задач осуществлялось в осесимметричной постановке с использованием изопараметрических КЭ осесимметричного тела с квадратичным законом распределения функций перемещений.

В качестве одного из таких примеров ниже представлены результаты численного исследования процессов малоциклового деформирования и разрушения цилиндрического образца, выполненного из нержавеющей стали 12Х18Н10Т, с кольцевой выточкой, расположенной в среднем по длине образца. Длина рабочей части образца  $L = 30$  мм, диаметр рабочей части  $\varnothing = 58$  мм, радиус выточки  $R = 8,5$  мм. Необходимые для расчетов материальные функции материала получены на основе экспериментальной информации, приведенной в [9].

Образец, предварительно нагретый до температуры  $T = 350$  °С, находился в условиях жесткого симметричного циклического нагружения с амплитудой перемещений на торцевой поверхности образца  $u_x^a = \pm 0,095$  мм.

Численное моделирование осуществлялось для двух вариантов задачи. В первом варианте исследование процесса производилось до момента образования трещины без использования процедуры экстраполяции, а во втором принималось  $KCL = 20$  ( $KCL$ -заданное в условиях задачи минимальное число циклов, начиная с которого допускается экстраполяция).

В результате проведенных исследований было установлено, что на первом цикле нагружения при значении  $u_x = 0,019$  мм в наиболее нагруженной точке, расположенной на наружной поверхности центрального сечения образца (в дальнейшем точка *B*), появились пластические деформации, которые к концу первой четверти цикла при  $u_x = +0,095$  мм (в дальнейшем – максимальной точки цикла) охватили практически все сечение образца.

При дальнейшем нагружении зона пластичности распространялась по объему образца и стабилизировалась при  $n \approx 15$  циклов.

В результате решения первого варианта задачи было установлено, что в точке *B* первая стадия накопления повреждений завершилась при  $N_1^1 = 740$  циклов, причем при дальнейшем увеличении числа циклов процесс повреждений в этой точке развивался наиболее интенсивно. При значении  $n = N_r^1 = 1040$  циклов мера поврежденности в этой точке достигла предельного значения  $\omega \geq 0,99$ .

Для второго варианта задачи экстраполяция параметров процесса была произведена при  $n = N_0^2 = 20$  циклов на  $n = N_E^2 = 750$  циклов, после чего при  $n = N_1^2 = 770$  циклов в точке *B* завершилась первая стадия накопления повреждений. Прогнозируемое число циклов до разрушения материала в этой точке оказалось равным  $n = N_r^2 = 1067$ .

Параметры циклического деформирования для различных вариантов расчета  
Parameters of cyclic deformation for different computation variants

| <i>i</i>    | 1     | 2     |
|-------------|-------|-------|
| $N_L$       | 5000  | 20    |
| $N_0$       | –     | 20    |
| $N_E$       | –     | 750   |
| $N_1$       | 740   | 770   |
| $N_r$       | 1040  | 1067  |
| $\psi(800)$ | 0,700 | 0,673 |
| $k_p(800)$  | 30,46 | 29,79 |
| $E_f$       | –     | 0,721 |
| $E_r$       | –     | 2,60  |

Результаты расчетов представлены в таблице, содержащей наиболее интересные для анализа задачи параметры, подсчитанные в точке *B*, для рассмотренных вариантов задачи:

$N_0^i$  – номер цикла, начиная с которого произведена экстраполяция;

$N_E^i = KC$  – число циклов экстраполяции;

$N_1^i$  – номер цикла завершения первой стадии накопления повреждений (появление меры повреждений  $\omega > 0$ );

$N_r^i$  – общее число циклов до разрушения;

$\psi^i(n)$  – значение функции поврежденности для цикла с номером  $n$ ;

$k_p^i(n)$  – значение параметра  $k_p$  для цикла с номером  $n$ ;

$E_f^i$  – мера эффективности процедуры экстраполяции  $Ef = KC / N_r^1$ , где  $N_r^1 = N_r$  для варианта 1;

$E_r^i$  – мера погрешности прогнозирования момента разрушения (при достижении мерой поврежденности значения  $\omega = 0,99$ );  $E_r^i = \left| (N_r^1 - N_r^i) / N_r^1 \right| 100\%$ .

Анализ представленных в таблице данных позволяют судить о приемлемой точности и достаточно высокой эффективности прогнозирования на основе предложенного алгоритма процессов накопления повреждений при жестких симметричных нагружениях в условиях неоднородного напряженного состояния. Для рассматриваемой задачи с помощью такого алгоритма удалось сэкономить более 70 % трудоемкости вычислительного процесса, необходимой для определения начала малоциклового разрушения образца.

Исследование процесса дальнейшего разрушения образца осуществлялось на основе продолжения решения второго варианта задачи для третьей стадии разрушения с использованием рассмотренного выше алгоритма моделирования развития магистральных трещин. После завершения второй стадии разрушения материала образца в точке *B*, с увеличением числа циклов поврежденность развивалась в виде магистральной трещины вдоль поперечного сечения средней части образца. Конфигурация трещины для циклов  $n = 1122$ , 1181 и 1237, соответствующих различным уровням продвижения трещины, изображена на рис. 3.

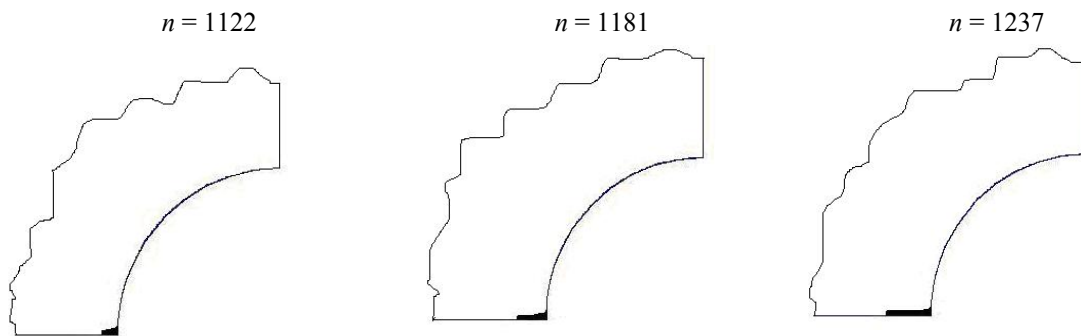


Рис. 3. Конфигурация трещины на различных циклах нагружения  
Fig. 3. Crack configuration at different loading cycles

Предельное число циклов до полного разрушения образца (потери несущей способности) составило  $N_r \approx 1250$  циклов.

Изменение состояния материала образца в процессе его малоциклового деформирования сопровождалось перераспределением напряжений и деформаций в образце и, в частности, изменением осевой силы, действующей по его торцам.

График изменения отношения осевой силы  $P$ , вычисленной по значению приведенных напряжений на торце образца в конце текущей четверти цикла, к ее значению  $P_0$  в конце первой четверти первого цикла в зависимости от числа циклов  $n$  показан на рис. 4 сплошной линией.

На графике можно выделить три характерных участка, отражающих специфику поведения конструкции в условиях упругопластического малоциклового деформирования:

– первый участок ( $n = 1-40$ ) циклов, характеризуемый ростом торцевой силы за счет упрочнения материала в зонах пластичности;



- второй участок ( $n = 40-1050$ ), в пределах которого торцевая сила меняется незначительно;
- третий участок ( $n \geq 1050$ ), характеризуемый заметной деградацией свойств материала, развитием магистральной трещины в центральном сечении образца и снижением торцевой силы.

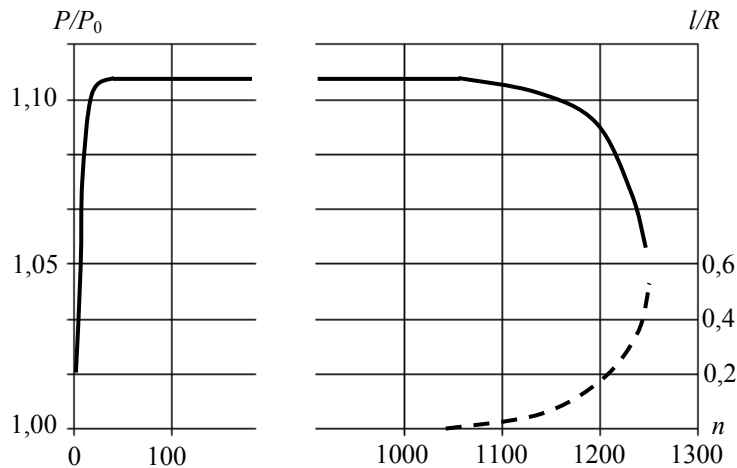


Рис. 4. Отношения силы  $P$ , вычисленной по значению приведенных напряжений на торце образца, в конце текущей четверти цикла, к ее значению  $P_0$  в конце первой четверти первого цикла (сплошная линия) и длины трещины  $l$  к радиусу выточки  $R$  (пунктирная линия) в зависимости от числа циклов  $n$   
 Fig. 4. Ratios between force  $P$  calculated based on adjusted stresses at the sample end, at the end of the current quarter cycle to its value  $P_0$  at the end of the first quarter cycle (solid line) and the crack length  $l$  to the radius of the recess  $R$  (dashed line) depending on the number of cycles  $n$

На рис. 4 пунктирной линией изображен график изменения относительной длины трещины (отношения длины трещины  $l$  к радиусу выточки  $R$ ) от числа циклов  $n$ .

## Заключение

В статье представлено описание алгоритмов численного моделирования процессов зарождения и развития усталостных трещин при малоцикловых термосиловых нагружениях в рамках соотношений механики поврежденной среды, основанных на учете многостадийного характера развития повреждений в процессе разрушения материала.

Рассмотрен алгоритм прогнозирования процессов деформирования и накопления повреждений в элементах конструкций при малоцикловых термосиловых нагружениях, сочетающий возможности детального описания особенностей процессов деформирования и накопления повреждений на первых стадиях разрушения с минимизацией объема вычислений при численном моделировании названных процессов на основе МКЭ. Для моделирования третьей стадии разрушения предложен алгоритм, позволяющий описать процесс развития трещины в элементах конструкций на основе результатов численного моделирования процесса на первых двух стадиях без изменения исходной топологии КЭ области исследуемых конструкции.

Алгоритмы реализованы в составе программных средств ВК УПАКС.

С целью обоснования эффективности и области применения предложенных алгоритмов в статье представлены результаты численного решения ряда задач квазистатического и малоциклового разрушения элементов конструкций.

*Алгоритмы разработаны при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-19-10237). Результаты численных экспериментов получены при финансовой поддержке ФЦП «Исследования по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы», соглашение № 14.578.21.0036 (уникальный идентификатор RFMEFI57814X0036).*

## Библиографический список

1. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
2. Работнов Ю.И. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
3. Мураками. Сущность механики поврежденности среды и ее приложение к теории анизотропных повреждений при ползучести // Теоретические основы инж. расчетов: тр. амер. о-ва инж.-мех. – 1983. – Т. 5, № 2. – С. 28–36.
4. Chaboche J.L. La mécanique de L'endommagement et son application aux prévisions de durée de vie des structures // Rech. Depospat. – 1987. – No. 4. – P. 37–54.
5. Ju J.W. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects // Int. J. Solid. and Struct. – 1989. – Vol. 25. – No. 7. – P. 803–833.
6. Wang J., Chaw C.L. Mixed mode ductile fracture studies with nonproportional loading based on continuum damage mechanics // Trans ASME. J. Eng. Mater. and Technol. – 1989. – Vol. 111. – No. 2. – P. 204–209.
7. Бех О.И., Коротких Ю.Г. Уравнения механики поврежденной среды для циклических не-изотермических процессов деформирования материалов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: всесоюз. межвуз. сб / Горьк. ун-т. – Горький, 1989. – С. 28–37.
8. Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. – М.: Машиностроение–1, 2004. – 264 с.
9. Казаков Д.А., Капустин С.А., Коротких Ю.Г. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций: моногр. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та. – 1999. – 226 с.
10. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
11. Капустин С.А., Чурилов Ю.А., Горохов В.А. Моделирование нелинейного деформирования и разрушения конструкций в условиях многофакторных воздействий на основе МКЭ. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2015. – 347 с.
12. Федоров, В.В. Кинетика повреждаемости и разрушения твердых тел: моногр. – Ташкент: Фан, 1985. – 168 с.
13. Паргон В.З., Морозов В.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
14. Механика разрушения. Разрушение конструкций: сб. ст. / отв. ред. Д. Теплина. – М.: Мир, 1980. – 256 с.
15. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 2. – С. 21–35. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.02
16. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.

17. Chaboche J.-L., Kanoute P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // *Int. J of Plasticity*. – 2012. – Vol. 35. – P. 44–66.
18. Zhu Y., Kang G., Kan Q., Bruhns O.T., Liu Y. Thermo-mechanically coupled cyclic elasto viscoplastic constitutive model of metals: Theory and application // *Int. J of Plasticity*. – 2016. – Vol. 79. – P. 111–152. DOI: 10.1016/J.IJPLAS.2015.12.005
19. Taleb L., Cailletaud G. An updated version of the multimechanism model for cyclic plasticity // *Int. J. of Plasticity*. – 2010. – Vol. 26. – P. 859–874. DOI: 10.1016/J.IJPLAS.2009.11.002
20. Cyclic deformation response of AISI 316L at room temperature: Mechanical behaviour, microstructural evolution, physically-based evolutionary constitutive modelling / M.S. Pham, S.R. Holdsworth, K.G.F. Janssens, E. Mazza // *Int. J of Plasticity*. – 2013. – Vol. 47. – P. 143–164.
21. Вычислительный комплекс УПАКС. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 147 от 31.10.2002 / Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности.
22. Капустин С.А., Горохов В.А., Чурилов Ю.А. Алгоритмы прогнозирования малоциклового прочностии конструкций на основе МКЭ // *Проблемы прочностии пластичности: межвуз. сб.* – Н. Новгород, 2011. – Вып. 73. – С. 15–25.

## References

1. Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Basics of fracture mechanics]. – Moscow: Nauka, 1974. 312 p.
2. Rabotnov Iu.I. *Polzuchest' elementov konstruksii* [Creep of Structural Elements]. – Moscow: Nauka, 1966, 752 p.
3. Murakami. *Sushchnost' mekhaniki povrezhdennosti sredy i ee prilozhenie k teorii anizotropnykh povrezhdenii pri polzuchesti* [The essence of the mechanics of damage the environment and its application to the theory of anisotropic damage during creep]. *Trudy amerikanskogo obshchestva inzhenerov-mekhanikov «Teoreticheskie osnovy inzh.raschetov»*, 1983, vol. 5, no. 2, pp. 28-36.
4. Chaboche J.L. *La mecanique de L'endommagement et san application aux previsions de duree devie des structures*. *Rech. depospat*, 1987. no. 4, pp. 37-54.
5. Ju J.W. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. *Int. J. Solid and Struct.* 1989. vol. 25, no. 7, pp. 803-833.
6. Wang J., Chaw C.L. Mixed mode ductile fracture studies with nonprapartional loading bazed on continuum damage mechanics. *Trans ASME. J. Eng. Mater and Technolog*, 1989, vol. 111, no. 2, pp. 204-209.
7. Bekh O.I., Korotkikh Iu.G. *Uravneniia mekhaniki povrezhdennoi sredy dlia tsiklicheskikh neizotermicheskikh protsessov deformirovaniia materialov* [The equations of mechanics of the damaged environment to cyclic non-isothermal processes of material deformation]. *Vsesoiuznyi mezhvuzovskii sbornik «Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Metody resheniia»*. Gor'kovskii universitet, 1989, pp. 28-37.
8. Radchenko V.P., Eremin Iu.A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruksii* [The rheological deformation and fracture of materials and structural elements], Moscow: Mashinostroenie, 2004, no. 1, 264 p.
9. Kazakov D.A., Kapustin S.A., Korotkikh Iu.G. *Modelirovanie protsessov defor-mirovaniia i razrusheniia materialov i konstruksii* [Modelling of processes of deformation and fracture of materials and structures]. *Nizhegorodskii gosudarstvennyi universitet*, 1999, 226 p.
10. Volkov I.A., Korotkikh Iu.G. *Uravneniia sostoianiia viazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniiami* [Equations of state viscoelasticoplastic environments with injuries]. Moscow: Fizmatlit, 2008, 424 p.

11. Kapustin S.A., Churilov Iu.A., Gorokhov V.A. Modelirovanie nelineinogo deformirovaniia i razrusheniia konstruktsii v usloviakh mnogofaktornykh vozdeistvii na osnove MKE [Modeling of non-linear deformation and fracture of structures in terms of multifactor impacts based on FEM]. Nizhegorodskii gosudarstvennyi universitet, 2015, 347 p.
12. Fedorov, V.V. Kinetika povrezhdaemosti i razrusheniia tverdykh tel. [The kinetics of damage and fracture of solids]. Tashkent: Fan, 1985, 168 p.
13. Parton V.Z., Morozov V.M. Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniia [The mechanics of elastic-plastic fracture]. Moscow: Nauka, 1974, 640 p.
14. Mekhanika razrusheniia. Razrushenie konstruktsii [Fracture Mechanics. Destruction of structures]. Sbornik statei. Ed. D.Teplina. Moscow: Mir, 1980, 256 p.
15. Bondar V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. Version of the theory of thermoplasticity. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 2, pp. 21-35. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.02
16. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1642-1692.
17. Chaboche J.-L., Kanoute P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions. *International Journal of Plasticity*, 2012, vol. 35, pp. 44-66.
18. Zhu Y., Kang G., Kan Q., Bruhns O.T., Liu Y. Thermo-mechanically coupled cyclic elasto viscoplastic constitutive model of metals: Theory and application. *International Journal of Plasticity*, 2016, vol. 79, pp. 111-152. DOI: 10.1016/j.ijplas.2015.12.005
19. Taleb L., Cailletaud G. An updated version of the multimechanism model for cyclic plasticity *International Journal of Plasticity*, 2010, vol. 26, pp. 859-874. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.11.002
20. Pham M.S., S.R. Holdsworth S.R., Janssens K.G.F., Mazza E. Cyclic deformation response of AISI 316L at room temperature: Mechanical behaviour, microstructural evolution, physically-based evolutionary constitutive modelling. *International Journal of Plasticity*, 2013, vol. 47, pp. 143-164.
21. Vychislitel'nyi kompleks UPAKS. Nauchno-tehnicheskii tsentr po iadernoi i radiatsionnoi bezopasnosti. Attestatsionnyi pasport programmnogo sredstva. Registratsionnyi pasport attestatsii PS № 147, 31.10.2002.
22. Kapustin S.A., Gorokhov V.A., Churilov Iu.A. Algoritmy prognozirovaniia malotsiklovoi prochnosti konstruktsii na osnove MKE [Algorithms for predicting low cycle durability of structures based on FEM]. *Mezhvuzovskii sbornik «Problemy prochnosti i plastichnosti»* Nizhnii Novgorod, 2011, iss. 73, pp. 15-25.