

Устинов К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 3. Точное аналитическое решение для частного случая // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.– 2016. – № 3. – С. 222–240. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.15

Ustinov K.B. On delamination of a stripe along the boundary between two elastic layers. Part 3, exact analytical solution for a particular case. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 3. Pp. 222-240. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.15



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.3.15

УДК 593.3

О РАССЛОЕНИИ ПОЛОСЫ ПО ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА УПРУГИХ СВОЙСТВ ЧАСТЬ 3. ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ

К.Б. Устинов^{1, 2}

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия,

²Московский авиационный институт, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 22 марта 2016 г.

Принята: 29 июля 2016 г.

Опубликована: 30 сентября 2016 г.

Ключевые слова:

отслоение, интерфейсная трещина, матричная факторизация, упругая заделка, матрица упругой податливости

АННОТАЦИЯ

Получено аналитическое решение однородной задачи изотропной теории упругости в постановке плоской деформации о полубесконечной трещине, проходящей вдоль границы, разделяющей два упругих слоя одинаковой толщины с отличающимися свойствами, для равного нулю второго параметра Дундурса (безразмерной комбинации упругих констант материалов). Данная задача является частным случаем задачи о полубесконечной трещине, проходящей вдоль границы, разделяющей два упругих слоя с произвольными соотношениями толщины и упругих свойств. Решения для случаев трещин нормального отрыва и сдвига в предположении возможности пренебрежения влиянием нормальных напряжений на сдвиговые смещения и сдвиговых напряжений на нормальные смещения даны в первой и второй частях статьи (Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 4; 2016, № 2). Рассматриваемое решение для частного случая получено путем применения преобразования Лапласа и сведения задачи к матричной задаче Римана-Гильберта. Ограничение, состоящее в необходимости равенства толщин, и ограничение на сочетание упругих постоянных материалов определяются методом решения, позволяющим осуществить факторизацию матричного коэффициента задачи в замкнутой форме.

Получены асимптотические выражения для смещений берегов трещины вдали от ее вершины, соответствующие смещениям эквивалентной пластины (балки) при граничных условиях типа обобщенной упругой заделки, т.е. условиям пропорциональности нормального и тангенциального смещений и угла поворота в точке заделки действующим компонентам главного вектора и изгибающего момента нагрузки. Получены выражения для компонент матрицы коэффициентов упругой заделки, связывающей указанные кинематические и силовые величины. Также получены выражения для коэффициента интенсивности напряжений и скорости высвобождения энергии.

© ПНИПУ

© Устинов Константин Борисович – доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, e-mail: ustinov@ipmnet.ru

Konstantin B. Ustinov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, e-mail: ustinov@ipmnet.ru

ON DELAMINATION OF A STRIPE ALONG THE BOUNDARY BETWEEN TWO ELASTIC LAYERS PART 3. EXACT ANALYTICAL SOLUTION FOR A PARTICULAR CASE

K.B. Ustinov

¹A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS. Moscow, Russian Federation

²Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 22 March 2016

Accepted: 29 July 2016

Published: 30 September 2016

Keywords:

delamination, interface crack, matrix factorization, elastic clamping, matrix of elastic compliance

ABSTRACT

The analytical solution has been obtained for a homogeneous problem of elasticity in plane strain setting of semi-infinite crack separating two isotropic layers of equal thicknesses and different but related with a particular restriction (corresponding to vanishing of the second Dundurs parameter) elastic constants. The problem under consideration is a particular case (allowing us to obtain the exact analytical solution) of the general problem on semi-infinite crack separating two isotropic layers of different thickness and arbitrary combination of elastic constants posed. The solutions for the cases of normal and shear crack were obtained under the assumption of the possibility to neglect cross-terms related to the influence of the normal stresses on the shear displacements and the shear stresses on the normal displacements. In this part of the work the solution for the case in question has been derived by means of Laplace transformation; and reducing it to a homogeneous Riemann-Hilbert problem with the matrix coefficient. The restriction imposed on elastic constants and the demand of equal thicknesses are determined by the used method allowing the factorization of the matrix coefficient.

The asymptotical expression has been derived for the relative displacements of the crack faces far from its tip, corresponding to a beam deflection with the boundary condition of the type of generalized elastic clamping, i.e. the proportionality of the displacement and angle of rotation of the clamping point to the total vector and bending moment of the applied load by means of the matrix of coefficients of compliance. The analytical expressions for these coefficients have been obtained. The asymptotical expression for the stress field near the crack tip (stress intensity factor and energy release rate) has also been derived.

© PNRPU

1. Постановка задачи. Исходная конфигурация

В первой части [1] была сформулирована задача теории упругости в постановке плоской деформации о полубесконечной трещине, проходящей вдоль границы, разделяющей два изотропных упругих слоя с произвольными соотношениями толщин и упругих постоянных. Самоуравновешенная нагрузка, характеризуемая главным вектором и изгибающим моментом, предполагалась приложенной на бесконечности со стороны трещины. Путем применения преобразования Лапласа задача была сведена к задаче Римана-Гильберта с матричным коэффициентом. Далее приводится изложение точного решения поставленной задачи для частного случая: слоев одинаковой толщины, на соотношение упругих констант которых наложено некоторое ограничение. Исходная конфигурация задачи представлена на рис. 1.

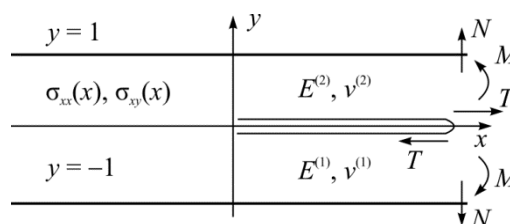


Рис. 1. Расслоение составного слоя. Геометрия задачи
Fig. 1. Delamination of contained layer. Geometry of the problem

Здесь и далее $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений, u, v – компоненты вектора смещения; все величины, относящиеся к нижней полосе $-1 < y < 0$, обозначаются индексом 1, все величины, относящиеся к верхней полосе $0 < y < 1$ – индексом 2.

Для рассматриваемой однородной задачи предполагается, что все поверхности свободны от напряжений,

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad \text{при } y = 1, \quad y = -h, \quad \text{и при } y = 0, \quad x > 0, \quad (1)$$

а нагрузка с эквивалентными главным вектором (T, N) и моментом M приложена на бесконечности, так что (здесь по сравнению с [1] изменены знаки)

$$-M = \int_{-\infty}^0 x \sigma_{yy}(x, 0) dx, \quad N = \int_{-\infty}^0 \sigma_{yy}(x, 0) dx, \quad T = \int_{-\infty}^0 \sigma_{xy}(x, 0) dx \quad (2)$$

Условия сопряжения на границе имеют вид

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)} \quad \text{при } y = 0, \quad x < 0. \quad (3)$$

Модифицированные для условий плоской деформации модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов обозначим $E^{(i)}, \nu^{(i)}, i = 1, 2$ соответственно. С обычными модулями Юнга $E_0^{(i)}$ и коэффициентами Пуассона $\nu_0^{(i)}$ они связаны соотношениями

$$E^{(i)} = \frac{E_0^{(i)}}{(1 - \nu_0^{(i)})(1 + \nu_0^{(i)})}, \quad \nu^{(i)} = \frac{\nu_0^{(i)}}{1 - \nu_0^{(i)}} \quad (4)$$

Путем применения преобразования Лапласа [1] задача сведена к задаче Римана-Гильберта с матричным коэффициентом. Запишем ее для условий одинаковых толщин полосы, равных единице и дополнительного ограничения на сочетание упругих слоев, необходимого для получения аналитического решения, а именно

$$\frac{1}{2} \frac{\mu^{(1)}(1 - 2\nu^{(2)}) - \mu^{(2)}(1 - 2\nu^{(1)})}{\mu^{(1)}(1 - 2\nu^{(2)}) - \mu^{(2)}(1 - 2\nu^{(1)})} = 0 \quad (5)$$

Данное условие соответствует равенству нулю второго параметра Дундурса (параметра упругого несоответствия) [9, 10]; при выполнении данного условия при сингулярности отсутствует осцилляция.

Итак, матричную задачу Римана-Гильберта на мнимой оси ($p \in L$) для указанных ограничений запишем в виде (без нарушения общности, будем полагать $\alpha > 0$ – данное условие позволит избежать необходимости рассмотрения различных случаев выделения ветвей функций, содержащих радикалы [5, 6])

$$\mathbf{F}_+(p) = \mathbf{K}(p)\mathbf{F}_-(p), \quad (6)$$

$$\mathbf{K}(p) = \begin{pmatrix} (\sin p \cos p + p) / d & \alpha p^2 / d \\ -\alpha p^2 / d & (\sin p \cos p - p) / d \end{pmatrix}, \quad p \in L \quad (7)$$

$$d = \sin^2 p - p^2, \quad (8)$$

$$\eta = E^{(2)} / E^{(1)}, \quad \alpha = \frac{\eta - 1}{\eta + 1} = \frac{E^{(2)} - E^{(1)}}{E^{(2)} + E^{(1)}}, \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_+(p) = \frac{E^{(2)}}{2(1+\eta)} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{matrix} v^{(2)}(x,0) - v^{(1)}(x,0) \\ u^{(2)}(x,0) - u^{(1)}(x,0) \end{matrix} \right\} e^{-px} dx, \quad (10)$$

$$\mathbf{F}_-(p) = \int_{-\infty}^0 \left\{ \begin{matrix} \sigma_{yy}(x,0) \\ \sigma_{xy}(x,0) \end{matrix} \right\} e^{-px} dx, \quad (11)$$

с условиями в опорных точках (в нуле и на бесконечности)

$$\mathbf{F}_-(p) = \left\{ \begin{matrix} N - Mp + o(p) \\ T + o(1) \end{matrix} \right\}, \quad \operatorname{Re} p \rightarrow 0-, \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_-(p) = \frac{1}{\sqrt{-2p}} \left\{ \begin{matrix} K_I \\ K_{II} \end{matrix} \right\} + O(p^{-3/2}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow -\infty. \quad (13)$$

Значение $\eta=1$ ($\alpha=0$) соответствует расщеплению однородной полосы [11–13].

Основная сложность состоит в факторизации матричного коэффициента $K(p)$, т.е. представлении его в виде

$$\mathbf{K}(p) = \mathbf{X}_+(p) \mathbf{X}_-^{-1}(p), \quad (14)$$

где функции $\mathbf{X}_\pm(p)$ аналитичны в правой и левой полуплоскости комплексного переменного p , и $\det \mathbf{X}_\pm(p) \neq 0$ в соответствующих плоскостях вплоть до границы. В настоящее время общее точное аналитическое решение задачи для произвольной матрицы неизвестно, однако для указанных ограничений задача решается применением метода [3–6] (см. также литературу, указанную в [1]).

После нахождения $\mathbf{X}_\pm(p)$ окончательное решение задачи дается с помощью теоремы Лиувилля:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_+(p) &= \mathbf{X}_+^{-1}(p) \mathbf{\Pi}(p), \quad \operatorname{Re}(p) > 0 \\ \mathbf{F}_-(p) &= \mathbf{X}_-^{-1}(p) \mathbf{\Pi}(p), \quad \operatorname{Re}(p) < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{\Pi}(p)$ – векторная функция, подлежащая определению.

2. Решение задачи Римана-Гильберта

Матрицы $\mathbf{X}_\pm^{\pm 1}(t)$ могут быть представлены в виде [3–6]

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_+^{\pm 1}(p) &= \Lambda_+^{\pm 1}(p) \left[\mathbf{I} \operatorname{ch}(\varphi\beta_+) \pm \mathbf{B}(p) \operatorname{sh}(\varphi\beta_+) \right], \\ \mathbf{X}_-^{\pm 1}(p) &= \Lambda_-^{\pm 1}(p) \left[\mathbf{I} \operatorname{ch}(\varphi\beta_-) \pm \mathbf{B}(p) \operatorname{sh}(\varphi\beta_-) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь \mathbf{I} – единичная матрица,

$$\mathbf{B}(p) = \varphi^{-1}(p) \begin{pmatrix} 1 & \alpha p \\ -\alpha p & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(p) = \sqrt{1 - \alpha^2 p^2} \quad (17)$$

Функции $\Lambda_{\pm}(p)$, $\beta_{\pm}(p)$ являются решениями скалярных задач Римана-Гильберта

$$\Lambda_{-}^{-1}(p)\Lambda_{+}(p) = \Delta^{1/2}(p), \quad p \in L \quad (18)$$

$$\beta_{+}(p) - \beta_{-}(p) = \varphi^{-1}(p)\varepsilon(p), \quad p \in L \quad (19)$$

Здесь определитель $\Delta(p)$ и показатель $\varepsilon(p)$ матрицы $\mathbf{K}(p)$ определяются как

$$\Delta(p) = \lambda_1(p)\lambda_2(p), \quad (20)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_1(p)}{\lambda_2(p)}. \quad (21)$$

Собственные числа $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$ матрицы $\mathbf{K}(p)$ могут быть представлены в виде

$$\lambda_1(p) = -2 \operatorname{ctg}^3 p A(p/i), \quad \lambda_2(p) = 2 \operatorname{ctg} p B(p/i), \quad (22)$$

$$2A(s) = \operatorname{th} s \left(\operatorname{th} s + s\sqrt{1+\alpha^2 s^2} \operatorname{ch}^{-2} s \right) / (1-s^2 \operatorname{sh}^{-2} s), \quad (23)$$

$$2B(s) = \left(1 - s\sqrt{1+\alpha^2 s^2} \operatorname{sh}^{-1} \operatorname{ch}^{-1} s \right) / (1-s^2 \operatorname{sh}^{-2} s).$$

Таким образом, исследуемая задача отличается от задач, решенных в [7, 8], видом функций $A(s), B(s)$, определяемых формулами (23).

С учетом (20)–(22) скалярные задачи Римана-Гильберта могут быть записаны в виде

$$\Lambda_{-}^{-1}(p)\Lambda_{+}(p) = 2i \operatorname{ctg}^2 p \sqrt{A(p/i)B(p/i)}, \quad p \in L, \quad (24)$$

$$\beta_{+}(p) - \beta_{-}(p) = \varphi^{-1}(p) \frac{1}{2} \ln \left(-\operatorname{ctg}^2 p \frac{A(p/i)}{B(p/i)} \right), \quad p \in L. \quad (25)$$

Решение задачи (18) или (24) запишем в виде, аналогичном данному в работах [3–6] через интегралы типа Коши:

$$\Lambda_{+}(p) = \frac{\pi \Gamma^2(1/2 + p/\pi)}{\Gamma^2(1 + p/\pi)} J_{+}(p), \quad \Lambda_{-}(p) = \frac{p^2 \Gamma^2(1/2 - p/\pi)}{2\pi i \Gamma^2(1 - p/\pi)} J_{-}(p), \quad (26)$$

$$J_{\pm}(p) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [A(s)B(s)] \frac{ds}{is - p} \right\}, \quad (27)$$

внеинтегральные члены получены факторизацией тангенса через гамма-функцию.

Решение задачи (19) также запишем в виде, аналогичном данному в работах [3–6]:

$$\beta_{+}(p) = \beta_{0+}(p) - \beta_{s+}(p) - \beta_{T+}(p), \quad \beta_{-}(p) = \beta_{0-}(p) - \beta_{s-}(p), \quad (28)$$

Вспомогательные функции

$$\beta_{s+}(p) = \frac{1}{4} \int_L \frac{dt}{\varphi(t)(t-p)} = -\frac{\ln(\alpha p + i\sqrt{1-\alpha^2 p^2})}{2\sqrt{1-\alpha^2 p^2}}, \quad \beta_{s-}(p) = -\beta_{s+}(-p), \quad (29)$$

$$\beta_{T+}(p) = -\frac{1}{2} \int_L \frac{\operatorname{sgn}(t/i) dt}{\varphi(t)(t-p)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\alpha^2 p^2}} \ln \frac{\sqrt{1-\alpha^2 p^2} + 1}{\alpha p} \quad (30)$$

введены таким образом, чтобы правая часть выражения

$$\beta_{0+}(p) - \beta_{0-}(p) = \varphi^{-1}(p) \varepsilon(p) + \beta_{S+}(p) + \beta_{S-}(p) + \beta_{T+}(p), \quad p \in L \quad (31)$$

удовлетворяла условиям Гёльдера. Тогда решение задачи [3–6].

$$\beta_{0\pm}(p) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \alpha^2 s^2)^{-1/2} \ln \left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}} \frac{\alpha s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1 + \alpha^2 s^2} + 1} \right] \frac{ds}{is - p} \quad (32)$$

Информация о порядке ведения функций $\beta_{S\pm}(p)$, $\beta_{T-}(p)$ содержится в работах [3–6].

Посредством формул (16)–(32) матричная задача факторизации (14) является решенной. Остается определить векторную функцию $\Pi(p)$, входящую в (15). Для этого, а также для получения асимптотических выражений для напряжений и смещений понадобятся асимптотические разложения интегралов (27), (32) и их комбинаций.

3. Разложение вблизи нуля

Вблизи $p = 0$ разложения имеют вид

$$\Lambda_+(p) = \frac{\sqrt[4]{12-9\alpha^2}}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{4 \ln 2}{\pi} + \delta_1 \right) p \right] + O(p^2), \quad (33)$$

$$\Lambda_-(p) = \frac{p^2}{i\sqrt{2}\sqrt[4]{12-9\alpha^2}} \left[1 + \left(\frac{4 \ln 2}{\pi} + \delta_1 \right) p \right] + O(p^4), \quad (34)$$

$$\delta_1(\alpha) = \left. \frac{d \ln J_+(p)}{dp} \right|_{p=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \ln \left[\sqrt{A(s)B(s)} \right] \frac{ds}{s}, \quad (35)$$

$$\exp[\pm \beta_{0+}(p)] = \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{4-3\alpha^2}} [1 \pm \delta_2 p] + O(p^2), \quad (36)$$

$$\exp[\pm \beta_{0-}(p)] = \frac{\sqrt[4]{4-3\alpha^2}}{\sqrt[4]{3}\sqrt{\alpha}} [1 \pm \delta_2 p] + O(p^2), \quad (37)$$

$$\delta_2(\alpha) = \left. \frac{d \ln \beta_+(p)}{dp} \right|_{p=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \left\{ (1 + \alpha^2 s^2)^{-1/2} \ln \left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}} \frac{\alpha s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1 + \alpha^2 s^2} + 1} \right] \right\} \frac{ds}{s}. \quad (38)$$

Для удобства проведения дальнейших преобразований введем обозначение

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) &= \frac{4 \ln 2}{\pi} + \delta_1(\alpha) + \delta_2(\alpha) = \\ &= \frac{4 \ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \left\{ \ln \sqrt{A(s)B(s)} + (1 + \alpha^2 s^2)^{-1/2} \ln \left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}} \frac{\alpha s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1 + \alpha^2 s^2} + 1} \right] \right\} \frac{ds}{s}. \end{aligned} \quad (39)$$

Подстановка результатов разложения (34), (37) в (16) дает (здесь выписаны только члены, дающие вклад в интересующие искомые величины)

$$\mathbf{X}_-(p) = -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2a}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{ia}{\sqrt{4-3a^2}} \end{pmatrix} p^2 + \begin{pmatrix} \frac{e^{3i\pi/4}}{2\sqrt{6\alpha}}(\alpha + 2i\delta) & \frac{e^{i\pi/4}\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}} \left(\sqrt{3} - \frac{3i\alpha}{\sqrt{4-3a^2}} \right) \\ O(1) & O(1) \end{pmatrix} p^3 + O(p^4). \quad (40)$$

4. Разложение вблизи минуса бесконечности

По свойствам интегралов типа Коши (например, [6]) поведение $\beta_{0-}(p)$ из (32) при больших p определяется как

$$\beta_{0-}(p) = -\frac{q(\alpha)}{p} + O(p^{-2}), \quad p \rightarrow -\infty \quad (41)$$

$$q(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \alpha^2 s^2)^{-1/2} \ln \left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}} \frac{\alpha s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1 + \alpha^2 s^2 + 1}} \right] ds.$$

С учетом (17) для больших отрицательных p справедливы оценки

$$\operatorname{ch} \varphi \beta_{0-}(p) = \cos q + O(p^{-2}), \quad \operatorname{sh} \varphi \beta_{0-}(p) = -i \sin q + O(p^{-2}). \quad (42)$$

Разложение второй формулы (16) по большим отрицательным p с учетом (42) дает

$$\mathbf{X}_-(p) = -ip^{-3/2} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + O(p^{-5/2}). \quad (43)$$

5. Определение векторной функции $\mathbf{\Pi}(p)$

Для определения векторной функции $\mathbf{\Pi}(p)$ (15) существенным является вырожденность главного члена разложения матрицы $\mathbf{X}_-(p)$ для больших p . Действительно, для вектора

$$\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (44)$$

справедливо равенство

$$\mathbf{X}_-(p)\mathbf{C}_0 = O(p^{-5/2}). \quad (45)$$

Следующий член разложения $\mathbf{X}_-(p)$ уже не вырожден. Из (13) следует, что функция $\mathbf{\Pi}(p)$ не может иметь членов порядка p^0 , причем старший член должен иметь вид

$b p^{-1} C_0$. Из требования ограниченности решения $F_-(p)$ в нуле (12), следует наиболее общий вид для $\Pi(p)$:

$$\Pi(p) = A_0 p^{-2} + b C_0 p^{-1}. \quad (46)$$

Здесь A_0, b – векторная и скалярная константы, которые можно определить из условия (12), используя (15), (40):

$$A_0 = \frac{e^{3i\pi/4}}{\sqrt{2a}} \begin{pmatrix} a\sqrt{3}N \\ -iT \end{pmatrix}. \quad (47)$$

$$b = \frac{e^{i\pi/4}\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{2}} \left[i2\sqrt{3}(M + \delta N) + \alpha\sqrt{3}(N - iT) + \sqrt{4 - 3\alpha^2}T \right]. \quad (48)$$

6. Определение параметров разрушения

К параметрам разрушения относятся коэффициент интенсивности напряжений (КИН) и скорость высвобождения энергии при росте трещины.

Подстановка (46)–(48) и (41), (42) во второе уравнение (15) для $p \rightarrow -\infty$ дает

$$F_-(p) = \frac{1}{\sqrt{-2p}} \left[k_M M + \left(k_T + \frac{\alpha}{2} k_M \right) T + k_N N \right]. \quad (49)$$

С использованием теоремы абелевого типа [14, 15] немедленно получаем асимптотику напряжений при $x \rightarrow -0$:

$$\sigma_-(x) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi x}} \left[k_M M + \left(k_T + \frac{\alpha}{2} k_M \right) T + k_N N \right]. \quad (50)$$

Отсюда КИН

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = k_M M + \left(k_T + \frac{\alpha}{2} k_M \right) T + k_N N. \quad (51)$$

Здесь введены обозначения

$$k_M = \sqrt{6} \begin{pmatrix} \cos \alpha q - \sin \alpha q \\ \cos \alpha q + \sin \alpha q \end{pmatrix}, \quad k_T = \frac{\sqrt{4 - 3a^2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos \alpha q - \sin \alpha q \\ \cos \alpha q - \sin \alpha q \end{pmatrix},$$

$$k_N = \delta k_M - \frac{\alpha\sqrt{3}}{\sqrt{4 - 3a^2}} k_T \quad (52)$$

Полагая

$$\pi/4 - \alpha q = \omega, \quad (53)$$

формулы (52) представим в виде, аналогичном [16, 19]:

$$k_M = \sqrt{12} \begin{pmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \end{pmatrix}, \quad k_T = \sqrt{4 - 3a^2} \begin{pmatrix} -\sin \omega \\ \cos \omega \end{pmatrix} \quad (54)$$

На основании обобщения формулы Ирвина [20, 21] следует, что скорость высвобождения энергии

$$J = (K_I^2 + K_{II}^2) \frac{E^{(1)} + E^{(2)}}{2E^{(1)}E^{(2)}} = \frac{E^{(1)} + E^{(2)}}{2E^{(1)}E^{(2)}} \left\{ 12 \left(M + \delta N - \frac{\alpha}{2} T \right)^2 + (4 - 3a^2) \left(T + \frac{\alpha\sqrt{3}}{\sqrt{4 - 3a^2}} N \right)^2 \right\}. \quad (55)$$

При отсутствии нормальной силы выражение (55) совпадает с выражениями, даваемыми в [10, 19]. Зависимости входящих в данные выражения величин δ и ω от первого параметра Дундурса α представлены на рис. 2 и 3.

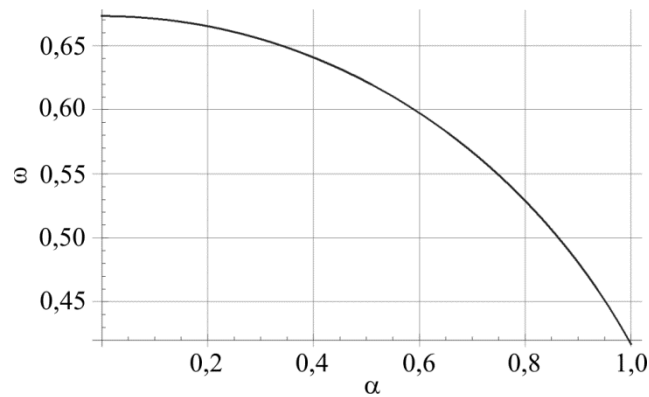


Рис. 2. Зависимость величины δ от первого параметра Дундурса α
 Fig. 2. Dependence between value δ and Dundurs first parameter α

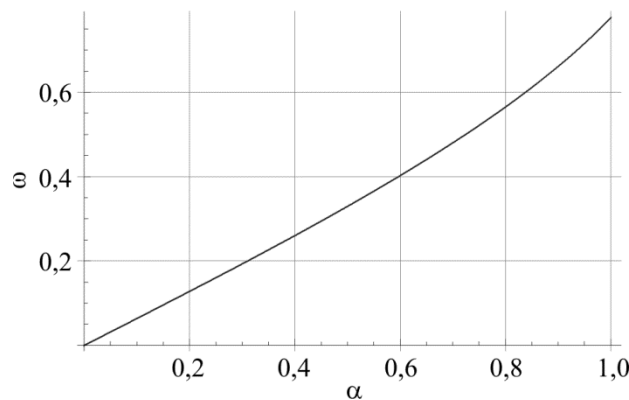


Рис. 3. Зависимость величины ω от первого параметра Дундурса α
 Fig. 3. Dependence of value ω on Dundurs first parameter α

7. Разложение решения матричной задачи Римана вблизи нуля и вычисление параметров эффективной упругой заделки

Подстановка (46)–(48) и (16) в первое выражение (15) с последующим разложением по малым p дает

$$F_+(p) = \sum_{n=-3}^0 G^{(n)} p^{-n} + O(p). \quad (56)$$

Здесь

$$\mathbf{G}^{(-3)} = \begin{pmatrix} -6N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}^{(-2)} = \begin{pmatrix} 6M - 3\alpha T \\ 3\alpha N \end{pmatrix}, \quad (57)$$

$$\mathbf{G}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 6\delta M + \left(\frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} - 3\delta \right) \alpha T + \left(2 + 3\delta^2 - 3(\beta''_0 + J''_0) + \frac{3}{4}\alpha^2 \left(1 + \ln \frac{3\alpha^2}{4-3\alpha^2} \right) \right) N \\ 2T - 3\alpha M \end{pmatrix} \quad (58)$$

$$\mathbf{G}^{(0)} = \begin{pmatrix} g_{1M}M + g_{1N}N + g_{1T}T \\ g_{2M}M + g_{2N}N + g_{2T}T \end{pmatrix}, \quad (59)$$

$$g_{1M} = -2 + 3\delta^2 + 3(\beta''_0 + J''_0) - \frac{3}{4}\alpha^2 \left(\ln \frac{3\alpha^2}{4-3\alpha^2} - 1 \right), \quad (60)$$

$$g_{2M} = \alpha \left(\frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} - 3\delta \right), \quad (61)$$

$$g_{1T} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \sqrt{4-3\alpha^2} \delta - \frac{3\alpha}{2} (\delta^2 + \beta''_0 + J''_0) - \frac{3}{8}\alpha^3 \left(\ln \frac{3\alpha^2}{4-3\alpha^2} + 1 \right), \quad (62)$$

$$g_{2T} = (4-3\alpha^2) \left(\frac{4\ln 2}{\pi} + \delta_1 \right) - (2-3\alpha^2) \delta - \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha^2 \sqrt{4-3\alpha^2}, \quad (63)$$

$$g_{1N} = 2\delta^3 - \frac{24\zeta(3)}{\pi^3} + 3\alpha^2 \left(\frac{3}{2} \delta - \frac{4\ln 2}{\pi} - \delta_1 \right) - (J'''_0 + \beta'''_0), \quad (64)$$

$$g_{2N} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \sqrt{4-3\alpha^2} \delta + \frac{3\alpha}{2} \left(-\frac{2}{3} - \delta^2 + \beta''_0 + J''_0 \right) - \frac{3}{8}\alpha^3 \left(\ln \frac{3\alpha^2}{4-3\alpha^2} + 1 \right). \quad (65)$$

Здесь $\zeta(p)$ – дзета функция Римана $\zeta(3) \approx 1,2021$; функции $J''_0, \beta''_0, J'''_0, \beta'''_0$ находятся по формулам прил. 2 работы [1]. Для использующихся в дальнейшем величин получаем

$$J'''_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d^3}{ds^3} \left\{ \ln \sqrt{A(s)B(s)} \right\} \frac{ds}{s}. \quad (66)$$

$$\beta'''_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d^3}{ds^3} \left\{ (1 + \alpha^2 s^2)^{-1/2} \ln \left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}} \frac{\alpha s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1 + \alpha^2 s^2 + 1}} \right] \right\} \frac{ds}{s}. \quad (67)$$

Величина δ_1 определяется формулой (35).

Выражение (56) представляет собой трансформанту Лапласа от асимптотики производной половины скачка смещений. В соответствии со свойствами преобразования Лапласа (напр. [22]) трансформанта разности между смещениями на бесконечности и смещениями в нуле определяется делением образа на p :

$$\int_{-\infty}^0 \left\{ \begin{matrix} v^{(2)}(x,0) - v^{(1)}(x,0) \\ u^{(2)}(x,0) - u^{(1)}(x,0) \end{matrix} \right\} e^{-px} dx = \frac{2(E^{(1)} + E^{(2)})}{E^{(1)}E^{(2)}} \sum_{n=-3}^0 \mathbf{G}^{(n)} p^{-n-1} + O(p), \quad (68)$$

Асимптотики смещений вычисляются отсюда с помощью обратного преобразования Лапласа

$$\left\{ \begin{matrix} v^{(2)}(x,0) - v^{(1)}(x,0) \\ u^{(2)}(x,0) - u^{(1)}(x,0) \end{matrix} \right\} = \frac{2(E^{(1)} + E^{(2)})}{E^{(1)}E^{(2)}} \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{n=-3}^0 \mathbf{G}^{(n)} p^{-n-1} e^{px} + o(1). \quad (69)$$

Здесь L – контур, проходящий параллельно мнимой оси плоскости комплексной переменной p и расположенный между мнимой осью и ближайшей особой точкой. Этот контур может быть деформирован в соответствии с правилами интегрирования в комплексной плоскости. Находя оригинал по изображению, можно видеть, что скачок смещений согласно (57)–(69) представляет собой полином третьей степени, соответствующий изгибу оси балки. Наличие членов нулевой и первой степени по x (минус первой и минус второй степени по p для трансформанты) свидетельствует о том, что граничные условия для эквивалентной балки не являются условиями жесткой заделки в месте сопряжения.

Члены разложения вертикального смещения v , содержащие $\mathbf{G}^{(-3)}$, $\mathbf{G}^{(-2)}$, и горизонтального смещения u , содержащие $\mathbf{G}^{(-1)}$ (57), соответствуют членам для смещения балки-стержня под действием силы и момента. Оставшиеся члены соответствуют постоянным смещениям и повороту. Как следует из полученного решения, эти члены пропорциональны действующему главному вектору усилия и изгибающему моменту. Это позволяет выписать матрицу коэффициентов податливости [17, 18].

Здесь следует помнить, что формулы (56)–(69) соответствуют смещениям нижней границы полосы (балки), горизонтальное же смещение центральной оси балки отличается на величину произведения поворота в данной точке на половину толщины полосы. Также следует учесть, что продольные силы приложены к краям полос, а не к центрам, как в балочных теориях.

По-видимому, для матрицы коэффициентов податливости следует использовать симметризованную матрицу полученных коэффициентов [19]. Окончательно, выражение для матрицы коэффициентов упругой заделки записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v'_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{2(E^{(1)} + E^{(2)})}{E^{(1)}E^{(2)}} \mathbf{K} \begin{pmatrix} T \\ M \\ P \end{pmatrix}, \quad (70)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} g_{2T} & \alpha \left(\frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} - 3\delta \right) & \frac{\alpha}{8} \left(\sqrt{4-3\alpha^2} - \sqrt{12}\delta \right)^2 \\ \alpha \left(\frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} - 3\delta \right) & 6\delta & \frac{3}{2}\alpha^2 + 6\delta^2 \\ \frac{\alpha}{8} \left(\sqrt{4-3\alpha^2} - \sqrt{12}\delta \right)^2 & \frac{3}{2}\alpha^2 + 6\delta^2 & g_{1N} \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Зависимость коэффициентов упругой заделки K_{22} , K_{11} , K_{33} от параметра α , зависящего, в свою очередь, от отношения упругих модулей η (9), представлены на рис. 4, 5 и 6 соответственно. На этих же рисунках представлены зависимости тех же коэффициентов, по-

считанные в приближении упрощенных моделей [1, 2], построенных в предположении возможности пренебрежения перекрестными членами в (7), для различных величин толщины h , а для величины K_{22} – для случая полосы, отслаивающейся от полуплоскости [7].

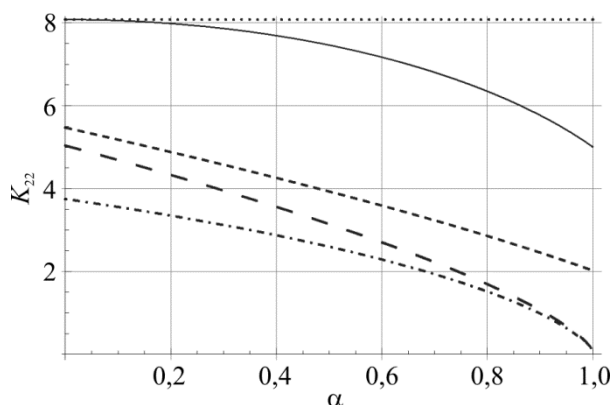


Рис. 4. Зависимость коэффициента упругой заделки K_{22} от параметра α . Сплошная линия – полученное решение; точечная линия – приближенное решение [1] для $h=1$; пунктирная линия (короткие штрихи) – то же для $h=2$; пунктирная линия (длинные штрихи) – то же для $h=10$; штрихпунктирная линия – решение для слоя на полуплоскости [7]

Fig. 4. Dependence of coefficient of elastic constraint K_{22} on parameter α . Solid graph shows the resulted solution; dotted line shows an approximate solution [1] for $h=1$; dotted line (short dashes) is the same for $h=10$; the dotted line (long dashes) is the same for ; dash-dot line shows the solution for the layer on the half-plane [7]

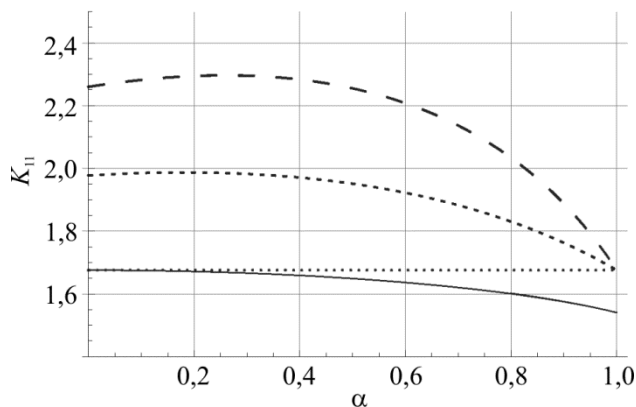


Рис. 5. Зависимость коэффициента упругой заделки K_{11} от параметра α . Сплошная линия – полученное решение; точечная линия – приближенное решение [2] для $h=1$; пунктирная линия (короткие штрихи) – то же для $h=2$; пунктирная линия (длинные штрихи) – то же для $h=10$

Fig. 5. Dependence of coefficient of elastic constraint K_{11} on parameter α . Solid graph shows the resulted solution; dotted line shows an approximate solution [2] for $h=1$; dotted line (short dashes) is the same for $h=2$; the dotted line (long dashes) is the same for $h=10$

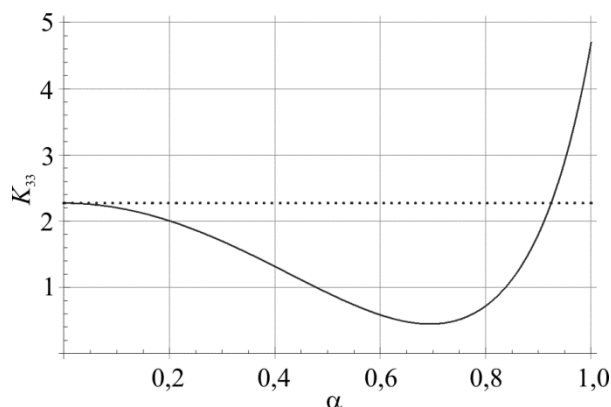


Рис. 6. Зависимость коэффициента упругой заделки K_{33} от параметра α .

Сплошная линия – полученное решение; точечная линия – приближенное решение [1]

Fig.6. Dependence of coefficient of elastic constraint K_{33} on parameter α .

Solid graph shows the resulted solution; dotted line shows an approximate solution [1]

Из представленных графиков видно, в частности, что для случая расслоения полос одинаковой толщины ($h=1$) модели [1, 2] дают точные решения для полос одинаковой жесткости и решения, близкие к точным для несильного отличия модулей (сплошная и точечные линии на рис. 4–6). С ростом различия в толщинах ($h \rightarrow \infty$) и приближении решения к случаю полосы на полуплоскости модели [1, 2] дают точные решения для весьма жестких полос (пунктирная линия с длинными штрихами и штрих-пунктирная линия на рис. 4). Отметим, что линия, соответствующая десятикратному различию в толщинах ($h=10$) на рис. 4 неотличима от линии, соответствующей асимптотике ($h \rightarrow \infty$) модели [1] (формула (56), в которой необходимо исправить опечатку – убрать двойку перед η). На рис. 5, 6 не представлены линии, соответствующие решению слоя на полуплоскости, как точного [7], так и приближенного [23], полученного в тех же предположениях, что и решения [1, 2] ввиду наличия в них логарифмической зависимости от расстояния до вершины трещины [7, 23, 24]. Полученные аналитические выражения для компонент матрицы упругой заделки представляются полезными для решения задач, связанных с отслоением покрытий [10, 18, 19, 25–27], с работой усиливающих ребер жесткости [28], с определением адгезионных свойств [29–32].

Заключение

Получено решение однородной задачи о полубесконечной трещине, проходящей вдоль интерфейса, разделяющего два упругих слоя одинаковой толщины и различных упругих свойств (однако на сочетание упругих констант наложено дополнительное ограничение, состоящее в равенстве нулю второго параметра Дундурса). Путем применения преобразования Лапласа задача сведена к матричной задаче Римана-Гильберта. Получены асимптотические выражения для смещений берегов трещины вдали от ее вершины. Показано, что ведущие члены асимптотики смещений берегов трещины соответствуют смещением балки (пластины) при граничных условиях типа обобщенной упругой заделки, т.е. условиях пропорциональности смещений и угла поворота в точке заделки действующим компонентам главных вектора и момента нагрузки. Получены выражения для компонент

матрицы коэффициентов упругой заделки. Также получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и скорости высвобождения энергии. Полученное решение представляется полезным для решения задач об отслоении покрытий.

Приложение

Решение матричной задачи Римана для рассматриваемого частного случая

Изложение следует работам [3–6]. Пусть a_{ij} ($i, j = 1, 2$) являются компонентами невырожденной матрицы $\mathbf{A}(t)$,

$$\mathbf{A}(z) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (72)$$

определенной на мнимой оси L комплексной плоскости z . Задача состоит в нахождении такой кусочно-голоморфной матрицы-функции (2x2) $\mathbf{X}(z)$ в форме

$$\mathbf{X}(z) = \begin{cases} \mathbf{X}_+(z), & z \in S^+, \\ \mathbf{X}_-(z), & z \in S^-, \end{cases} \quad (73)$$

такой, что $\mathbf{X}_+(z)$ и $\mathbf{X}_-(z)$, а также их обратные матрицы $\mathbf{X}_+^{-1}(z)$ и $\mathbf{X}_-^{-1}(z)$ были бы голоморфными в S^+ и S^- , и на контуре L выполнялось бы условие

$$\mathbf{X}_+(t)\mathbf{X}_-(t) = \mathbf{A}(t), \quad t \in L. \quad (74)$$

В общем случае решение в замкнутой форме поставленной задачи неизвестно. Однако для рассматриваемого далее частного случая эффективное решение было получено [3–6].

Под девиатором матрицы $\text{dev } \mathbf{A}$ будем понимать матрицу, получаемую из исходной матрицы \mathbf{A} вычитанием единичной матрицы \mathbf{I} , умноженной на половину ее следа s :

$$\text{dev } \mathbf{A} = \mathbf{A} - s\mathbf{I} = \begin{vmatrix} \frac{a_{11} - a_{22}}{2} & a_{12} \\ a_{21} & \frac{a_{22} - a_{11}}{2} \end{vmatrix} \quad (75)$$

$$s = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}).$$

При этом, поскольку определитель девиатора

$$\det \text{dev } \mathbf{A} = -\frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2 - a_{12}a_{21}, \quad (76)$$

выполняется следующее тождество:

$$\det \mathbf{A} = s^2 + \det \text{dev } \mathbf{A}. \quad (77)$$

Данное тождество может быть переписано в виде

$$\left[\frac{s}{(\det \mathbf{A})^{1/2}} \right]^2 - \left[\frac{(-\det \text{dev } \mathbf{A})^{1/2}}{(\det \mathbf{A})^{1/2}} \right]^2 = 1. \quad (78)$$

Определитель и показатель матрицы определяются следующим образом:

$$\Delta = \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2, \quad (79)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \ln (\lambda_1 / \lambda_2), \quad (80)$$

где λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы \mathbf{A} ,

$$\lambda_{1,2} = s \pm (-\det \operatorname{dev} \mathbf{A})^{1/2}. \quad (81)$$

Отсюда получаются следующие соотношения:

$$\Delta^{-1/2} s = \operatorname{ch} \varepsilon, \quad (82)$$

$$\Delta^{-1/2} (-\det \operatorname{dev} \mathbf{A})^{1/2} = \operatorname{sh} \varepsilon, \quad (83)$$

Подстановка последних двух выражений в (75) дает

$$\mathbf{A} = \Delta^{1/2} \left[\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon + (-\det \operatorname{dev} \mathbf{A})^{-1/2} \operatorname{dev} \mathbf{A} \operatorname{sh} \varepsilon \right], \quad (84)$$

Определив коммутанту матрицы \mathbf{A} как

$$\mathbf{R} = \operatorname{com} \mathbf{A} = (-\det \operatorname{dev} \mathbf{A})^{-1/2} \operatorname{dev} \mathbf{A}, \quad (85)$$

перепишем выражение (84) как

$$\Delta^{-1/2} \mathbf{A} = [\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon + \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon]. \quad (86)$$

Укажем на два важные свойства коммутанты: во-первых, она не меняет значения при умножении девиатора на произвольный ненулевой множитель; во-вторых, ее квадрат дает единичную матрицу

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{I}. \quad (87)$$

Пусть имеются две матрицы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ с одинаковыми коммутантами $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}$ и, вообще говоря, различными определителями Δ_1, Δ_2 и показателями $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Используя формулы (86) и (87), их произведение можно представить как

$$\begin{aligned} (\Delta_1 \Delta_2)^{-1/2} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 &= (\Delta_1 \Delta_2)^{-1/2} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = [\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon_1 + \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon_1][\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon_2 + \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon_2] = \\ &= \mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon_1 \operatorname{ch} \varepsilon_2 + \mathbf{R}^2 \operatorname{sh} \varepsilon_1 \operatorname{sh} \varepsilon_2 + \mathbf{R} [\operatorname{sh} \varepsilon_1 \operatorname{ch} \varepsilon_2 + \operatorname{ch} \varepsilon_1 \operatorname{sh} \varepsilon_2] = \\ &= \mathbf{I} \operatorname{ch} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \mathbf{R} \operatorname{sh} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (88)$$

Из сравнения (86) и (88) следует, что показатель произведения матриц с одинаковыми коммутантами равен сумме показателей сомножителей. Факт равенства определителя произведения матриц произведению их определителей является общеизвестным.

Вычисление обратной матрицы в представлении (86) также весьма удобно. Непосредственная проверка легко убеждает, что

$$\mathbf{A}^{-1} = \Delta^{-1/2} [\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon - \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon]. \quad (89)$$

Действительно,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \Delta\Delta^{-1} = [\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon + \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon][\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon - \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon] = \mathbf{I} \operatorname{ch}^2 \varepsilon - \mathbf{R}^2 \operatorname{sh}^2 \varepsilon = \mathbf{I}. \quad (90)$$

Рассмотрим поставленную задачу. Ограничимся случаем, когда матричный коэффициент $\mathbf{A}(t)$ имеет коммутанту $\mathbf{R}(t)$ вида

$$\mathbf{R}(t) = \psi^{-1/2}(t) \begin{vmatrix} l(t) & m(t) \\ n(t) & -l(t) \end{vmatrix}, \quad (91)$$

где

$$\psi(t) = l^2(t) + m(t)n(t), \quad (92)$$

а $l(t)$, $m(t)$, $n(t)$ – полиномы.

Матрицу $\mathbf{R}(t)$ можно рассматривать как граничное значение $\mathbf{R}(z)$ вдоль мнимой оси, определенной для любых точек комплексной плоскости:

$$\mathbf{R}(z) = \psi^{-1/2}(z) \begin{vmatrix} l(z) & m(z) \\ n(z) & -l(z) \end{vmatrix}. \quad (93)$$

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_+^{\pm 1}(z) &= \Lambda_+^{\pm 1}(z) \left[\mathbf{I} \operatorname{ch} [(\psi^{1/2} \beta_+)(z)] \pm \mathbf{R}(z) \operatorname{sh} [(\psi^{1/2} \beta_+)(z)] \right], \\ \mathbf{X}_-^{\pm 1}(z) &= \Lambda_-^{\pm 1}(z) \left[\mathbf{I} \operatorname{ch} [(\psi^{1/2} \beta_-)(z)] \pm \mathbf{R}(z) \operatorname{sh} [(\psi^{1/2} \beta_-)(z)] \right]. \end{aligned} \quad (94)$$

Здесь $\Lambda_{\pm}(z), \beta_{\pm}(z)$ – функции, голоморфные справа и слева от мнимой оси. Голоморфность матриц-функций $\mathbf{X}_{\pm}^{\pm 1}(z)$ соответственно в областях S^+ и S^- доказывается, например, разложением гиперболических синуса и косинуса в степенные ряды, сходящиеся, как известно, в любых точках комплексной плоскости:

$$\operatorname{ch} [(\psi \beta)(z)] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi^j \beta^{2j}}{(2j)!}, \quad (95)$$

$$\psi^{-1/2} \operatorname{sh} [(\psi \beta)(z)] = \beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi^j \beta^{2j}}{(2j+1)!}. \quad (96)$$

Уравнения (16) удовлетворяются тождественно, если

$$\Lambda_-^{-1}(z) \Lambda_+(z) = \Delta^{1/2}(z), \quad z \in L, \quad (97)$$

$$\beta_+(z) - \beta_-(z) = \psi^{-1/2}(z) \varepsilon(z), \quad z \in L. \quad (98)$$

После проведения факторизации матрицы в форме (94) решение задачи находится по теореме Лиувилля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН № I.33.

Библиографический список

1. Устинов К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 1. Постановка задачи, случай нормального отрыва // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 226–245.
2. Устинов К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 2. Случай сдвиговой трещины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 2. – С. 131–142. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.09
3. Златин А.Н., Храпков А.А. Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 31. – С. 810–813.
4. Златин А.Н., Храпков А.А. Упругая полуплоскость, ослабленная трещиной, параллельной ее границе // ЛГУ. Исследования по упругости и пластичности. – 1990. – Т. 16. Проблемы современной механики разрушения. – С. 68–75.
5. Златин А.Н., Храпков А.А. Векторная задача Римана с ненулевым индексом показателя матрицы-коэффициента // Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. – 1985. – Т. 181. – С. 12–16.
6. Khrapkov A.A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. – S.-P., 2001.
7. Устинов К.Б. Еще раз к задаче о полуплоскости, ослабленной полубесконечной трещиной, параллельной границе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 4. – С. 138–168.
8. Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости; условия упругой заделки для пластины, эквивалентной слою // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – № 1. – С. 75–95.
9. Dundurs J., Discussion: “Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading” (Bogy, D. B., 1968, ASME J. Appl. Mech., 35, pp. 460–466) // Trans ASME J. Appl. Mech. – Vol. 36. – No. 3. – P. 650–652.
10. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers // Int. J. Fract. – 1990. – Vol. 43. – P. 1–18.
11. Ентов В.М., Салганик Р.Л. О балочном приближении в теории трещин // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 5. – С. 95–102.
12. Fitcher W.B. The stress intensity factor for the double cantilever beam // Int. J. Fract. 1983. – Vol. 22. – P. 133–143.
13. Foote R.M.L., Buchwald V.T. An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // Int. J. Fract. 1985. – Vol. 29. – P. 125–134.
14. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит. 1962. – 279 с.
15. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
16. The edge cracking and spalling of brittle plates / M.D. Thouless, A.G. Evans, M.F. Ashby, J.W. Hutchinson // Acta Metallurgica. – 1997. – Vol. 35. – P. 1333–1341.
17. Ustinov K.B., Dyskin A.V., Germanovich L.N. Asymptotic analysis of extensive crack growth parallel to free boundary // 3rd Int. Conf. Localized Damage 94. – 1994. – P. 623–630.
18. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // Int. J. Frac. – 2000. – Vol. 104. – No 2. – P. 169–179.
19. Hutchinson, J.W., Suo, Z., Mixed Mode Cracking in Layered Materials // Advances in Applied Mechanics / eds J.W. Hutchinson and T.Y. Wu. – 1992. – Vol. 29. – P. 63–191.
20. Салганик Р.Л. О хрупком разрушении склеенных тел // ПММ. – 1963. – Т. 27, вып. 5. – С. 957–962.
21. Malyshev B.M., R.L. Salganik. The strength of adhesive joints using the theory of crack // Int. J. Fracture Mechanics. – 1965. – Vol. 1. – No. 2. – P. 114–128.
22. Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. – 207 с.
23. Устинов К.Б. О сдвиговом отслоении тонкой полосы от полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – № 6. – С. 141–152.

24. Салганик Р.Л., Устинов К.Б. Задача об упругозаданной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // Изв. РАН МТТ. – 2012. – № 4. – С. 50–62.
25. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // *Int. J. Fract.* – 2002. – Vol. 113. – P. 39–55.
26. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б., Ченцов А.В. Оценка влияния податливости подложки на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия // *Вычисл. мех. спл. сред.* – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 48–57.
27. Кургузов В.Д. Моделирование отслоения тонких пленок при сжатии // *Выч. мех. спл. сред.* – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 91–99.
28. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании // *ПММ.* – 1961. – № 25, вып. 2. – С. 342–355.
29. Dannenberg H. Measurement of Adhesion by a Blister Method // *J. Appl. Pol. Sci.* – 1961. – Vol. 5. – No. 14. – P. 125–134.
30. Williams M.L. The continuum interpretation for fracture and adhesion // *J. Appl. Pol. Sci.* – 1969. – Vol. 13. – P. 29–40.
31. Karihaloo B.L., Stang H. // *Composites: Part B.* – 2008. – Vol. 39. – P. 386–395.
32. Storakers B., Anderson B., Nonlinear plate theory applied to delamination in composites // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1988. – Vol. 36. – P. 689–718.

References

1. Ustinov K.B. O rassloenii polosy po granice razdela uprugih svojstv. Chast' 1. Postanovka zadachi, sluchaj normal'nogo otryva [On delamination of a stipe along the boundary between two elastic layers. Part 1, problem formulation, the case of normal crack] *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* 2015, no. 4, pp. 226-245 [in Russian].
2. Ustinov K.B. On delamination of a stipe along the boundary between two elastic layers. Part 1, the case of shear crack. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 2, pp. 131–142. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.09
3. Zlatin A. N., Khrapkov A. A., A Semi-Infinite Crack Parallel to the Boundary of the Elastic Half-Plane, *Sov. Phys. Dokl.*, 1986, Vol. 31, pp. 1009-1010.
4. Zlatin A. N., Khrapkov A. A., Uprugaya poluploskost, oslablennaya treshinoi, parallelnoi eyo granitse [Elastic Half-Plane Weakened by a Crack Parallel to Its Boundary], *Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti* [Studies in Elasticity and Plasticity], vol. 16: problem sovremennoi mekhaniki razrusheniya [Problems of Contemporary Fracture Mechanics], (LGU, 1990), pp. 68-75 [in Russian].
5. Zlatin A. N., Khrapkov A. A., Vektornaya zadacha Rimana s nenulevym indeksom pokazatelya matritsy-koeffitsienta [Vector Riemann Problem with Zero Index of Matrix-Coefficient Exponent] *Izv. VNIIG im. B. E. Vedeneeva*, 1985, vol. 181, pp. 12-16.
6. Khrapkov A.A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. S.-P. 2001.
7. Ustinov K.B. Eshe raz k zadache o poluploskosti, oslablennoi polubeskonechnoi treshinoi, parallelnoi granitse [Once more to the problem on a half-plane, weakened by a semi-infinite crack, parallel to its boundary] *Vestnik PNIPIU Mechanika*, 2013, no. 4. pp. 138-168 [In Russian]
8. Ustinov K.B., On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer. *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 1, pp. 62-80.
9. Dundurs J., Discussion: “Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading” (Bogy, D. B., 1968, ASME J. Appl. Mech., 35, pp. 460–466) *Trans ASME J. Appl. Mech.* vol. 36, no. 3, pp. 650-652.
10. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers. *Int. J. Fract.* 1990, vol. 43, pp. 1-18.

11. Entov V.M., Salganik R.L. O balochnom priblizhenii v teorii treshin [On beam approximation in crack theory]. *Izv. AN SSSR. Mehanika*, 1965, no. 5. pp. 95-102 [In Russian].
12. Fitcher W.B. The stress intensity factor for the double cantilever beam. *Int. J. Fract*, 1983, vol. 22, pp. 133-143.
13. Foote R.M.L., Buchwald V.T. An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam. *Int. J. Fract*, 1985, vol. 29, pp. 125-134.
14. Noble B., Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations (Pergamon Press, London etc., 1958; Mir, Moscow, 1962) 279 p.
15. Gakhov F.D. Boundary Value Problems. (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Volume 85) Oxford/London/Edinburgh/New York/Paris/Frankfurt 1966. Pergamon Press 564 p.
16. Thouless M.D., Evans A.G., Ashby M.F., Hutchinson, J.W., The edge cracking and spalling of brittle plates. *Acta Metallurgica*, 1997, vol. 35, pp. 1333-1341.
17. Ustinov K.B., Dyskin A.V., Germanovich L.N. Asymptotic analysis of extensive crack growth parallel to free boundary. 3rd Int. Conf. Localized Damage 94, 1994, pp. 623-630.
18. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression. *Int. J. Frac*, 2000, vol. 104, no. 2, pp. 169-179.
19. Hutchinson, J.W., Suo, Z., Mixed Mode Cracking in Layered Materials. *Advances in Applied Mechanics* edited by J.W. Hutchinson and T.Y. Wu, 1992, vol. 29, pp. 63-191.
20. Salganik R. L., The Brittle Fracture of Cemented Bodies. *J. Appl. Math. Mech*, 1963, vol. 27, no. 5, pp. 1468-1478.
21. Malyshev B.M., R.L. Salganik. The strength of adhesive joints using the theory of crack. *Int. J. Fracture Mechanics*, 1965, vol. 1, no. 2, pp. 114-128.
22. Doetsch G., Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniui preobrazovaniia Laplasa [Handbook der Laplace-Transformation]. *Birkhäuser, Basel, 1946; Fizmatlit, Moscow, 1958.*
23. Ustinov K.B., On Shear Separation of a Thin Strip from the Half-Plane. *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 6, pp. 713-724.
24. Salganik R.L., Ustinov K.B. Deformation problem for an elastically fixed plate modeling a coating partially delaminated from the substrate (plane strain). *Mech. of Solids*, 2012, vol. 47, no. 4, pp. 415-425
25. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *Int. J. Fract*, 2002, vol. 113, pp. 39-55.
26. Goldstein R.V., Ustinov K.B., Chentsov A.V. Otsenka vliianiia podatlivosti podlozhki na napriazheniia poteri ustoichivosti otsloivshegosia pokrytiia [Influence of substrate compliance on stresses generating stability loss of a delaminated coating]. *Vychislitel'naya Mehanika Sploshnykh Sred*, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 48-57.
27. Kurguzov V.D. Modelirovanie otsloeniyz tonkih plenok pri szhatii [Imulation of thin films delamination under compression]. *Vychislitel'naya Mehanika Sploshnykh Sred*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 91-99.
28. Popov G.Ya. Bending of a semi-infinite plate resting on a linearly deformable foundation *J Appl Math Mech*, 1961, vol. 25, is. 2, pp. 502-520.
29. Dannenberg H. Measurement of Adhesion by a Blister Method, *J. Appl. Pol. Sci.*, 1961, vol. 5, no. 14, pp. 125-134.
30. Williams M.L. The continuum interpretation for fracture and adhesion, *J. Appl. Pol. Sci.*, 1969, vol. 13, pp. 29-40.
31. Karihaloo B.L., Stang H., Composites: Part B, 2008, vol. 39, pp. 386-395.
32. Storakers B., Anderson B., Nonlinear plate theory applied to delamination in composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 1988, vol. 36, pp. 689-718.