



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.3.13

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ СМЕНЫ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Д.В. Тарлаковский^{1, 2}, Г.В. Федотенков²

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 3 июня 2016 г.

Принята: 29 июля 2016 г.

Опубликована: 30 сентября 2016 г.

Ключевые слова:

нестационарные задачи теории упругости, смешанные граничные условия, подвижная граница раздела краевых условий, метод факторизации, интегральные преобразования, обобщенные функции, асимптотики

АННОТАЦИЯ

Предложена методика решения плоских нестационарных задач для упругого полупространства при наличии подвижной границы смены заданных на поверхности граничных условий смешанного типа. Движение полупространства описывают волновые уравнения относительно скалярного и ненулевой компоненты векторного упругих потенциалов перемещений. Начальные условия предполагаются нулевыми.

С использованием интегрального соотношения для нормальных перемещений границы полупространства в виде двумерной свертки напряжений с функцией влияния, вытекающего из принципа суперпозиции, свойств операции свертки по двум переменным и аппарата теории обобщенных функций получено явное решение поставленной задачи в интегральной форме. При этом получение указанного решения основано на методе расщепления функции влияния, согласно которому она представляется в виде произведения двух сомножителей, удовлетворяющих установленным необходимым условиям, поэтому для получения окончательных результатов необходима факторизация функции влияния, обладающая заданными свойствами.

Анализ изображения по Фурье и Лапласу функции влияния выявил наличие шести особых точек: два простых полюса и четыре точки ветвления.

Получение требуемой факторизации функции влияния основано на представлении ее изображения в виде произведения сомножителей, каждый из которых содержит лишь одну особую точку. При этом особые точки, являющиеся простыми полюсами, отделяются путем обычного разложения на множители, а точки ветвления – с помощью интегралов типа Коши. Описанный способ позволяет получить требуемые факторизации функции влияния в любом характерном скоростном диапазоне движения точки раздела граничных условий: дорелеевском, дозвуковом, трансзвуковом и сверхзвуковом.

В результате получены разрешающие задачу явные интегральные формулы, позволяющие определить неизвестные перемещения и напряжения в любом скоростном диапазоне движения точки раздела граничных условий.

Построены асимптотические представления напряжений и перемещений в окрестности точки смены граничных условий.

© ПНИПУ

© Тарлаковский Дмитрий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, e-mail: tdvhome@mail.ru

Федотенков Григорий Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: greghome@mail.ru

Dmitry V. Tarlakovskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, e-mail: tdvhome@mail.ru

Grigory V. Fedotenkov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: greghome@mail.ru

NON-STATIONARY PROBLEMS FOR ELASTIC HALF-PLANE WITH MOVING POINT OF CHANGING BOUNDARY CONDITIONS

D.V. Tarlakovskii^{1, 2}, G.V. Fedotenkov²

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 3 June 2016

Accepted: 29 July 2016

Published: 30 September 2016

Keywords:

non-stationary problem of the theory of elasticity, mixed boundary conditions, moving boundary conditions, method of factorization, integral transforms, generalized functions, asymptotics

ABSTRACT

The paper presents a method of solving plane unsteady problems for an elastic half-space with a mobile boundary related to changing the boundary conditions of a mixed type. The movement of the half-space is described with two wave equations in terms of elastic potentials. The initial conditions are assumed to be zero.

It became possible to obtain an explicit solution of the problem in an integral form by using integral relations for a normal displacement of the half-space boundary in the form of two-dimensional convolution of stress with the influence function (arising from the principle of superposition), properties of the convolution in two variables, and of the theory of generalized functions. At the same time, this solution is based on the method of splitting the functions of influence, according to which it is represented as a product of two factors which satisfy the necessary conditions. Thus, in order to obtain final results it is required to carry out the factorization of the influence function which has the desired properties.

The analysis of the Fourier and Laplace transformation of the influence function revealed the presence of two simple poles and four branch points.

Getting the desired factorization influence function is based on the representation of its transformation as a product of two multipliers; each of them contains only one critical point. In case when critical points are simple, the separation is performed by using a simple factorization, while the branch points are separated with the help of Cauchy-type integrals. The described method allows obtaining the required factorization of the influence function in any typical speed range of the separating point: sub Rayleigh, subsonic, transonic and supersonic ones.

As a result, it became possible to obtain the explicit integral formulas which allow solving the problem. They allow defining the unknown displacements and stresses at any speed range of the moving separating point of the boundary conditions.

Asymptotic representations of stresses and displacements are found in the neighborhood of boundary conditions change.

© PNRPU

Введение

Нестационарные задачи с подвижными точками смены граничных условий являются на сегодняшний день одними из наименее исследованных проблем механики деформируемого твердого тела. В то же время современное развитие геологии, сейсмологии, технологии обработки металлов, а также других областей науки и техники, в которых возникают нестационарные контактные задачи, потребовало изучения соответствующих смешанных задач, в которых границы раздела краевых условий являются подвижными. Подобные проблемы возникают также при исследовании процессов ударного взаимодействия упругих затупленных тел с абсолютно твердыми и деформируемыми основаниями, в задачах о воздействии подвижных нагрузок на твердые деформируемые тела, в задачах теории трещин и др.

Для подобных задач в рамках модели линейно-упругого тела критическими являются скорости поверхностных волн Рэлея, скорости волн сдвига и растяжения-сжатия.

Хотя предлагаемая методика применима для решения широкого круга задач с движущимися границами раздела краевых условий, в настоящей работе она главным образом ориентирована на дальнейшее использование при исследовании нестационарных кон-

тактных задач с подвижными границами [1–4]. В частности, предложенные подходы позволяют провести асимптотический анализ поведения контактных напряжений в окрестности подвижных границ области взаимодействия в плоских нестационарных задачах об ударе затупленного тела или оболочки по упругому полупространству [5].

Отметим, что для решения задач данного класса большое значение имеют так называемые функции влияния, соответствующие сосредоточенным кинематическим или силовым воздействиям. Они представляют собой фундаментальные решения соответствующих операторов, описывающих математическую модель исследуемого объекта. В общем случае их совокупности образуют тензор. Компоненты этого тензора используются в качестве ядер интегральных уравнений, разрешающих соответствующие задачи. Впервые задачу об определении нестационарных функций влияния рассмотрел Н. Lamb [6].

Задачи определения функций влияния являются ключевыми для построения разрешающих систем уравнений нестационарных контактных задач. Поэтому этими задачами занимались и продолжают заниматься многие отечественные и зарубежные исследователи [1, 7–16].

Решение плоских нестационарных контактных задач с подвижными границами с использованием принципа суперпозиции сводится к исследованию двумерного граничного интегрального уравнения, ядрами интегральных операторов которого являются поверхностные функции влияния взаимодействующих тел [2–5, 17–33]. Одним из эффективных аналитических методов решения интегральных уравнений этого типа является метод Винера-Хопфа [7, 8].

В данной работе для решения использован метод расщепления фундаментальных решений [8], основанный на факторизации поверхностной функции влияния для упругого полупространства.

1. Постановка задачи

В декартовой прямоугольной системе координат Oxz рассмотрим однородную изотропную линейно-упругую полуплоскость $z \geq 0$. Введем систему безразмерных величин (штрихом обозначены размерные параметры):

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{L}, \quad z = \frac{z'}{L}, \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad c_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad v = \frac{v'}{c_1}, \\ u &= \frac{u'}{L}, \quad w = \frac{w'}{L}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\sigma'_{zz}}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_{xz} = \frac{\sigma'_{xz}}{\lambda + 2\mu}, \quad \varphi = \frac{\varphi'}{L^2}, \quad \psi = \frac{\psi'}{L^2}, \end{aligned}$$

где L – характерный линейный размер; λ , μ и ρ – параметры Ламе и плотность материала полупространства; c_1 и c_2 – скорости волн растяжения-сжатия и сдвига; τ и t – безразмерное и размерное время; v – некоторая скорость; u и w – компоненты вектора перемещения вдоль осей Ox и Oz ; σ_{zz} и σ_{xz} – нормальные и касательные напряжения; φ и ψ – скалярный и ненулевая компонента векторного потенциала упругих смещений.

Движение полуплоскости описывают волновые уравнения относительно потенциалов φ и ψ [3]:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}, \quad \Delta\psi = \eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Потенциалы φ и ψ связаны с компонентами вектора перемещений и тензора напряжений следующими соотношениями:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\sigma_{zz} = \Delta \varphi - 2\eta^{-2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right), \quad \sigma_{xz} = \eta^{-2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right). \quad (2)$$

Начальные условия нулевые:

$$\varphi|_{\tau=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0. \quad (3)$$

Положим, что при $x < l(\tau)$ на границе $z = 0$ заданы нормальные перемещения, а при $x > l(\tau)$ – нормальные напряжения. При этом полагаем, что касательные напряжения отсутствуют на всей границе $z = 0$:

$$w(\tau, x, z)|_{z=0} = w_-(x, \tau) \quad \text{при } x < l(\tau),$$

$$\sigma_{zz}(\tau, x, z)|_{z=0} = \sigma_+(x, \tau) \quad \text{при } x > l(\tau),$$

$$\sigma_{xz}(\tau, x, z)|_{z=0} = 0 \quad \text{при } -\infty < x < +\infty.$$

Зависимость координаты подвижной точки смены граничных условий от времени $x = l(\tau)$ полагаем заданной посредством непрерывной функции $l(\tau)$.

В задаче (1)–(3) требуется определить нормальные перемещения $w_+(x, \tau)$ и напряжения $\sigma_-(x, \tau)$:

$$w_+(x, \tau) = w(x, z, \tau)|_{z=0} \quad \text{при } x > l(\tau),$$

$$\sigma_-(x, \tau) = \sigma_{zz}(x, z, \tau)|_{z=0} \quad \text{при } x < l(\tau).$$

Кроме того, отдельного исследования требует поведение решения в окрестности точки смены граничных условий: $x = l(\tau)$.

Функции w_{\pm} и σ_{\pm} продолжим нулем на всю ось Ox :

$$f_{\pm}(x, \tau) = f(\tau, x, z)|_{z=0} H[\pm(x-l)],$$

где $f_{\pm} = w_{\pm}, \sigma_{\pm}$, а $H(x)$ – функция Хевисайда.

2. Граничное интегральное соотношение

Как известно [1], на всей границе полуплоскости $z = 0$ нормальные перемещения и напряжения связаны между собой интегральным соотношением (знак «**» означает свертку по обоим переменным)

$$w(x, \tau) = \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, \tau-t) \sigma(\xi, t) d\xi dt = G**\sigma, \quad \sigma(x, \tau) = \sigma_{zz}(x, z, \tau)|_{z=0}. \quad (4)$$

Здесь $G(x, t)$ – поверхностная функция влияния полупространства, представляющая собой нормальные перемещения $w(\tau, x, z)|_{z=0}$ как решение задачи (1)–(3) с граничными условиями $\sigma_{zz}(\tau, x, z)|_{z=0} = \delta(x)\delta(\tau)$, $\sigma_{xz}(\tau, x, z)|_{z=0} = 0$; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

В пространстве интегральных преобразований Лапласа по времени τ и Фурье по переменной x интегральный оператор в (4) переходит в произведение изображений (q – параметр преобразования Фурье, s – параметр преобразования Лапласа, верхний знак «L» в обозначении функции здесь и далее означает ее трансформанту по Лапласу, а «F» – трансформанту по Фурье) [1, 7, 8]:

$$w^{FL}(q, s) = G^{FL}(q, s)\sigma^{FL}(q, s). \quad (5)$$

Изображение Фурье–Лапласа функции влияния имеют вид [1]

$$G^{FL}(q, s) = -\eta^4 \frac{s^2 k_1(q^2, s^2)}{R_2(q^2, s^2)},$$

$$R_2(q, s) = (2q + \eta^2 s)^2 - 4qk_1(q, s)k_2(q, s), \quad k_1(q, s) = \sqrt{q + s}, \quad k_2(q, s) = \sqrt{q + \eta^2 s}.$$

3. Метод решения

Для построения решения используем граничное интегральное соотношение (5), переписав его в виде

$$w_+^{FL} + w_-^{FL} = G^{FL}(\sigma_+^{FL} + \sigma_-^{FL}). \quad (6)$$

Предположим, что функция G^{FL} допускает факторизацию

$$G^{FL} = G_+^{FL} G_-^{FL}, \quad (7)$$

причем функции G_{\pm}^{FL} и Γ_{\pm}^{FL} ($\Gamma_{\pm}^{FL} = 1/G_{\pm}^{FL}$) таковы, что их оригиналы удовлетворяют условиям

$$G_+ = \Gamma_+ = 0, \quad (x < v_+ \tau); \quad G_- = \Gamma_- = 0, \quad (x > v_- \tau), \quad (8)$$

где $v_- < v_+$ – постоянные, имеющие смысл скоростей. Полагаем также, что скорость движения точки смены граничных условий $x = l(\tau)$ удовлетворяет неравенствам

$$v_- < \dot{l}(\tau) < v_+. \quad (9)$$

В дальнейшем будем использовать следующие свойства операции свертки функций двух переменных.

Свойство 1. Пусть функция $Q(x, \tau) = 0$ при $\tau < 0$ и при $x > v_{1+}\tau$, $x < v_{1-}\tau$, а функция $S(x, \tau) = 0$ при $\tau < 0$ и при $x > v_{2+}\tau$, $x < v_{2-}\tau$, где $v_{1-} < v_{1+}$, $v_{2-} < v_{2+}$ – постоянные, тогда $Q(x, \tau) ** S(x, \tau) = 0$ при $x > \tau \max(v_{1+}, v_{2+})$ и при $x < \tau \min(v_{1-}, v_{2-})$.

Свойство 2. Пусть функция $Q(x, \tau) = 0$ при $\tau < 0$ и при $x < l(\tau)$, а функция $S(x, \tau) = 0$ при $\tau < 0$ и при $x < v_k \tau$ (v_k – постоянная) или сосредоточена на луче $x = v_k \tau H(\tau) = v_k \tau_+$. Тогда если $\dot{l} = \frac{dl}{d\tau} < v_k$, то $Q(x, \tau) ** S(x, \tau) = 0$ при $x < l(\tau)$. Аналогично, если $Q(x, \tau) = 0$ при $x > l(\tau)$ и $\dot{l} > v_k$, а функция $S(x, \tau) = 0$ при $x > v_k \tau$ или сосредоточена на луче $x = v_k \tau_+$, то $Q(x, \tau) ** S(x, \tau) = 0$ при $x > l(\tau)$.

Свойство 3. Пусть носитель функции $Q(x, \tau)$ сосредоточен на луче $x = v_1 \tau$, а носитель функции $S(x, \tau)$ – на луче $x = v_2 \tau$. Тогда носителем свертки $Q(x, \tau) ** S(x, \tau)$ этих функций является объединение указанных лучей и областей между ними:

$$\begin{aligned} \text{supp} Q(x, \tau) ** S(x, \tau) &= H(x - v_1 \tau) - H(x - v_2 \tau) \text{ при } v_2 > v_1; \\ \text{supp} Q(x, \tau) ** S(x, \tau) &= H(x - v_2 \tau) - H(x - v_1 \tau) \text{ при } v_1 > v_2. \end{aligned}$$

Доказательства этих свойств немедленно следуют из того факта, что при указанных условиях носитель подынтегральной функции в операторе свертки по двум переменным имеет своим пересечением пустое множество: $\text{supp} Q(\xi, t) \cap \text{supp} S(x - \xi, \tau - t) = \emptyset$.

Уравнение (6) с учетом (7) приводим к виду

$$\Gamma_+^{FL} (w_+^{FL} + w_-^{FL}) = G_-^{FL} (\sigma_+^{FL} + \sigma_-^{FL}).$$

В пространстве оригиналов получаем

$$\Gamma_+ ** w_+ + \Gamma_+ ** w_- = G_- ** \sigma_+ + G_- ** \sigma_- \tag{10}$$

С учетом (8), (9) и свойства 2 имеем

$$\Gamma_+ ** w_+ = \Gamma_+ ** w_+ H[x - l(\tau)], \quad G_- ** \sigma_- = G_- ** \sigma_- H[l(\tau) - x]. \tag{11}$$

С учетом (11) уравнение (10) представляем в виде

$$\begin{aligned} &(\Gamma_+ ** w_+ + \Gamma_+ ** w_- - G_- ** \sigma_+) H[x - l(\tau)] = \\ &= (G_- ** \sigma_- + G_- ** \sigma_+ - \Gamma_+ ** w_-) [l(\tau) - x]. \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства равна нулю при $x > l(\tau)$, а левая – при $x < l(\tau)$. Но так как они равны друг другу, то каждая из них может отличаться от нуля лишь в точках луча $x = l(\tau)$. Следовательно, каждая из них равна некоторой обобщенной функции $C[x - l(\tau), \tau]$ с носителем в точках $x = l(\tau)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Gamma_+ ** w_+ &= (G_- ** \sigma_+ - \Gamma_+ ** w_-) H[x - l(\tau)] + C[x - l(\tau), \tau], \\ G_- ** \sigma_- &= -(G_- ** \sigma_+ - \Gamma_+ ** w_-) H[l(\tau) - x] + C[x - l(\tau), \tau]. \end{aligned} \tag{12}$$

По теореме об обобщенных функциях с носителем в точках [27] функция C имеет вид

$$C[x - l(\tau), \tau] = \sum_{k=0}^n \alpha_k(t) \delta^{(k)}[x - l(t)],$$

где $\delta^{(k)}(x)$ – k -я производная дельта-функции Дирака.

Проводя свертку левых и правых частей уравнений (12) с функциями G_+ (в первом уравнении) и Γ_- (во втором уравнении) с учетом того, что $G_+ ** \Gamma_+ = G_- ** \Gamma_- = \delta(x)\delta(\tau)$, получаем искомое решение

$$\begin{aligned} w_+ &= G_+ ** \left\{ (G_- ** \sigma_+ - \Gamma_+ ** w_-) H[x-l(\tau)] + C \right\}, \\ \sigma_- &= -\Gamma_- ** \left\{ (G_- ** \sigma_+ - \Gamma_+ ** w_-) H[l(\tau)-x] - C \right\}. \end{aligned}$$

Обобщенная функция C должна определяться дополнительными условиями. В качестве этих условий примем естественные условия непрерывности нормальных перемещений при переходе через точку раздела граничных условий:

$$w_+ \Big|_{x=l(\tau)+0} = w_- \Big|_{x=l(\tau)-0}.$$

Отметим, что функция C порождает однородные решения. Действительно, если $\sigma_+ = w_- = 0$, а $C \neq 0$, то

$$\begin{aligned} w_0 = w_+ &= G_+ ** C = \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty G_+(x-\xi, \tau-t) \sum_{k=0}^n \alpha_k(t) \delta^{(k)}[\xi-l(t)] d\xi dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_0^\tau G_+[x-l(t), \tau-t] \alpha_k(t) dt, \\ \sigma_0 = \sigma_- &= P_- ** C = \sum_{k=0}^n \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_0^\tau P_-(x-l(t), \tau-t) \alpha_k(t) dt. \end{aligned} \tag{13}$$

4. Факторизация функции влияния

Как видно из предыдущего изложения, для получения окончательных результатов необходимо провести факторизацию изображения функции влияния $G^{FL}(q, s)$.

На плоскостях комплексных переменных s и q она имеет шесть особых точек:

$$s = iqv_k \quad (q = -is/v_k), \quad v_{1,2} = \pm c_R, \quad v_{3,4} = \pm 1/\eta, \quad v_{5,6} = \pm 1.$$

Особые точки первой пары являются простыми полюсами, а остальные – точками ветвления. c_R , $1/\eta$ и 1 – безразмерные фазовые скорости волн Рэлея, сдвига и растяжения-сжатия соответственно: $c_R < 1/\eta < 1$. Скорость волны Рэлея $c_R = (-z)^{-1/2}$, где z – единственный корень уравнения $R_2(z, 1) = 0$.

Представим функцию G^{FL} в виде произведения

$$G^{FL} = \prod_{k=1}^6 G_k^{FL}, \tag{14}$$

где G_k^{FL} , $\Gamma_k^{FL} = 1/G_k^{FL}$ имеют не более чем одну особую точку, как на плоскости s : $s = iqv_k$, так и на плоскости q : $q = -iq/v_k$.

Как показано в [7], носитель функций G_k , Γ_k сосредоточен на луче $x = v_k \tau$, а носители функций G , $\Gamma = 1/G$, как следует из свойства 3, есть объединения указанных лучей ($k = \overline{1, 6}$) и областей между ними.

Носитель функции, изображением которой является произведение $\prod_{k=k_1}^{k_2} G_k^{FL}$, представляет собой объединение лучей $k = k_1, \dots, k_2$ и областей между ними:

$$\text{supp} \prod_{k=k_1}^{k_2} G_k^{FL} = \left\{ (x, \tau) : \tau \min_k v_k \leq x \leq \tau \max_k v_k \right\}. \quad (15)$$

Факторизация (14) позволяет получить представление (7), обладающее свойствами (8) в любом диапазоне скоростей движения точки раздела граничных условий: дорэлеевском ($|i| < c_R$), дозвуковом ($c_R < |i| < 1/\eta$), транзвуковом ($1/\eta < |i| < 1$) и сверхзвуковом ($|i| > 1$). При этом, очевидно, функции G_+^{FL} и G_-^{FL} должны состоять из произведений таких сомножителей G_k^{FL} , которые с учетом (15) обеспечат выполнение требований (8) (таблица).

Носители и особые точки сомножителей представления (7)
 Supports of functions and special points of multiplier representations (7)

i	$\text{supp } G_+$	$\text{supp } G_-$	$\text{supp } \Gamma_+$	$\text{supp } \Gamma_-$
	Особые точки G_+	Особые точки G_-	Особые точки Γ_+	Особые точки Γ_-
$ i < c_R$	$c_R \tau \leq x \leq \tau$	$-\tau \leq x \leq -c_R \tau$	$\tau/\eta \leq x \leq \tau$	$-\tau \leq x \leq -\tau/\eta$
	$s = iq c_R \quad (q = -is/c_R)$ $s = iq/\eta \quad (q = -is\eta)$ $s = iq \quad (q = -is)$	$s = -iq c_R \quad (q = is/c_R)$ $s = -iq/\eta \quad (q = is\eta)$ $s = -iq \quad (q = is)$	$s = iq/\eta \quad (q = -is\eta)$ $s = iq \quad (q = -is)$	$s = -iq/\eta \quad (q = is\eta)$ $s = -iq \quad (q = is)$
	$\tau/\eta \leq x \leq \tau$	$-\tau \leq x \leq c_R \tau$	$\tau/\eta \leq x \leq \tau$	$-\tau \leq x \leq -\tau/\eta$
$c_R < i < 1/\eta$	$s = iq/\eta \quad (q = -is\eta)$ $s = iq \quad (q = -is)$	$s = \pm iq c_R \quad (q = \mp is/c_R)$ $s = -iq/\eta \quad (q = is\eta)$ $s = -iq \quad (q = is)$	$s = iq/\eta \quad (q = -is\eta)$ $s = iq \quad (q = -is)$	$s = -iq/\eta \quad (q = is\eta)$ $s = -iq \quad (q = is)$
	$x = \tau$	$-\tau \leq x \leq \tau/\eta$	$x = \tau$	$-\tau \leq x \leq \tau/\eta$
	$s = iq \quad (q = -is)$	$s = \pm iq c_R \quad (q = \mp is/c_R)$ $s = \pm iq/\eta \quad (q = \mp is\eta)$ $s = -iq \quad (q = is)$	$s = iq \quad (q = -is)$	$s = \pm iq/\eta \quad (q = \mp is\eta)$ $s = -iq \quad (q = is)$
$1/\eta < i < 1$	$x = \tau = 0$	$-\tau \leq x \leq \tau$	$x = \tau = 0$	$-\tau \leq x \leq \tau$
	\emptyset	$s = \pm iq c_R \quad (q = \mp is/c_R)$ $s = \pm iq/\eta \quad (q = \mp is\eta)$ $s = \pm iq \quad (q = \mp is)$	\emptyset	$s = \pm iq/\eta \quad (q = \mp is\eta)$ $s = \pm iq \quad (q = \mp is)$
	$-c_R \tau \leq x \leq \tau$	$-\tau \leq x \leq -\tau/\eta$	$\tau/\eta \leq x \leq \tau$	$-\tau \leq x \leq -\tau/\eta$
$-1/\eta < i < -c_R$	$s = \pm iq c_R \quad (q = \mp is/c_R)$ $s = iq/\eta \quad (q = -is\eta)$ $s = iq \quad (q = -is)$	$s = -iq/\eta \quad (q = is\eta)$ $s = -iq \quad (q = is)$	$s = iq/\eta \quad (q = -is\eta)$ $s = iq \quad (q = -is)$	$s = -iq/\eta \quad (q = is\eta)$ $s = -iq \quad (q = is)$
	$-\tau/\eta \leq x \leq \tau$	$x = -\tau$	$-\tau/\eta \leq x \leq \tau$	$x = -\tau$
	$s = \pm iq c_R \quad (q = \mp is/c_R)$ $s = \pm iq/\eta \quad (q = \mp is\eta)$ $s = iq \quad (q = -is)$	$s = -iq \quad (q = is)$	$s = \pm iq/\eta \quad (q = \mp is\eta)$ $s = iq \quad (q = -is)$	$s = -iq \quad (q = is)$
$-1 < i < -1/\eta$	$-\tau \leq x \leq \tau$	$x = \tau = 0$	$-\tau \leq x \leq \tau$	$x = \tau = 0$
	$s = \pm iq c_R \quad (q = \mp is/c_R)$ $s = \pm iq/\eta \quad (q = \mp is\eta)$ $s = \pm iq \quad (q = \mp is)$	\emptyset	$s = \pm iq/\eta \quad (q = \mp is\eta)$ $s = \pm iq \quad (q = \mp is)$	\emptyset
	$-c_R \tau \leq x \leq \tau$	$-\tau \leq x \leq -\tau/\eta$	$\tau/\eta \leq x \leq \tau$	$-\tau \leq x \leq -\tau/\eta$

При $\dot{l} > 1$ факторизация совпадает с самой факторизуемой функцией $G_+^{FL} = \Gamma_+^{FL} = 1 \Rightarrow G_+ = \Gamma_+ = \delta(x)\delta(\tau)$, $G_-^{FL} = G^{FL}$, $\Gamma_-^{FL} = \Gamma^{FL}$, а решение выражается формулами

$$w_+ = 0, \\ \sigma_- = \Gamma * w_- H[l(\tau) - x].$$

Здесь учтено, что согласно (6) $w_- H(x - l) = 0$, а также тот факт, что при $\dot{l} > c_1$ возмущения не успевают достичь тех точек границы полуплоскости, для которых $x > l(\tau)$. Следовательно, $\sigma_+ = 0$, $w_+ = 0$, что влечет равенство нулю также и функции C .

Рассмотрим вариант движения точки раздела граничных условий с дорелеевской скоростью: $|\dot{l}| < c_R$. При этом согласно таблице факторизацию следует провести так, чтобы особые точки функции G_+^{FL} оказались в верхней (нижней) полуплоскости переменного s (q), а особые точки функции G_-^{FL} – в нижней (верхней) полуплоскости переменного s (q). Для этого представим функцию G^{FL} так:

$$G^{FL} = G_1^{FL} G_2^{FL}, \\ G_1^{FL} = -\frac{\eta^4}{2(\eta^2 - 1)} \frac{k_1(q^2, s^2)}{(q^2 + s^2/c_R^2)}, \quad G_2^{FL} = 2(\eta^2 - 1) \frac{s^2(q^2 + s^2/c_R^2)}{R_2(q^2, s^2)}.$$

При этом функция G_2^{FL} не имеет полюсов $q = \pm is/c_R$. Функция G_1^{FL} легко факторизуется простым разложением на множители:

$$G_1^{FL} = G_{1+}^{FL} G_{1-}^{FL}, \quad G_{1-}^{FL} = \frac{\eta^4 c_R}{2(1 - \eta^2)} \frac{\sqrt{s + iq}}{(s + iq c_R)}, \quad G_{1+}^{FL} = \frac{c_R \sqrt{s - iq}}{(s - iq c_R)}. \quad (16)$$

Факторизацию функции G_2^{FL} в виде $G_{2+}^{FL} G_{2-}^{FL}$, где G_{2+}^{FL} имеет особые точки, $q = -is\eta$, а $G_{2-}^{FL} - q = is$, $q = is\eta$, проведем с помощью интеграла типа Коши [28, 29]. Заметим, что при $s > 0$ $R^2(q^2, s^2) \sim 2q^2 s^2 (\eta^2 - 1)$ при $|q| \rightarrow \infty$. Следовательно, $G_2^{FL} \rightarrow 1$ при $|q| \rightarrow \infty$ ($s > 0$). Значит, $\ln G_2^{FL} \rightarrow 0$ при $|q| \rightarrow \infty$ ($s > 0$). Представляя факторизацию для $G_2^{FL} = G_{2+}^{FL} G_{2-}^{FL}$ в виде

$$\ln G_2^{FL}(\xi, s) = g(\xi, s) = \ln G_{2+}^{FL}(q, s) + \ln G_{2-}^{FL}(q, s) = U_+(q, s) - U_-(q, s), \\ U_+(q, s) = \ln G_{2+}^{FL}(q, s), \quad U_-(q, s) = -\ln G_{2-}^{FL}, \quad \xi \in R,$$

приходим к классической задаче о скачке кусочно-аналитической функции при переходе через действительную ось комплексного переменного q [28, 29], решение которой имеет вид

$$U(q, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi,$$

при этом $U = U_+$ при $\text{Im } q > 0$ и $U = U_-$ при $\text{Im } q < 0$.

Следовательно,

$$G_{2\pm}^{FL}(q, s) = e^{U_{\pm}},$$

$$U_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi \quad (\text{Im } q > 0), \quad U_- = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi \quad (\text{Im } q < 0). \quad (17)$$

Функция U_+ аналитическая в верхней полуплоскости и имеет две особые точки $q = -is$, $q = -is\eta$ в нижней полуплоскости. Проведя разрез по мнимой оси в плоскости q , соединяющий эти точки и замыкая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость с учетом того, что $g(\xi, s) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, путь интегрирования для U_+ в (17) можно пере-

нести на берега указанного разреза. Рассмотрим интеграл $\int_{\gamma} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi$, где контур γ состоит из отрезка действительной оси $[R, -R]$, полуокружности C_R радиусом R , двух окружностей $c_{1\rho}$, $c_{2\rho}$ малым радиусом ρ , окружающих особые точки $q = -is$, $q = -is\eta$, и берегов разреза (рис. 1). Внутри области, ограниченной контуром γ и при $\text{Im } q > 0$, подынтегральная функция однозначная и аналитическая, следовательно, $\int_{\gamma} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi = 0$.

При $R \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow 0$ интегралы по C_R , $c_{1\rho}$, и $c_{2\rho}$ исчезают:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0}} \int_{\gamma} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi + \int_{-is}^{-is\eta} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi + \int_{-is\eta}^{-is} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi = \int_{-is}^{-is\eta} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi + \int_{-is\eta}^{-is} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi.$$

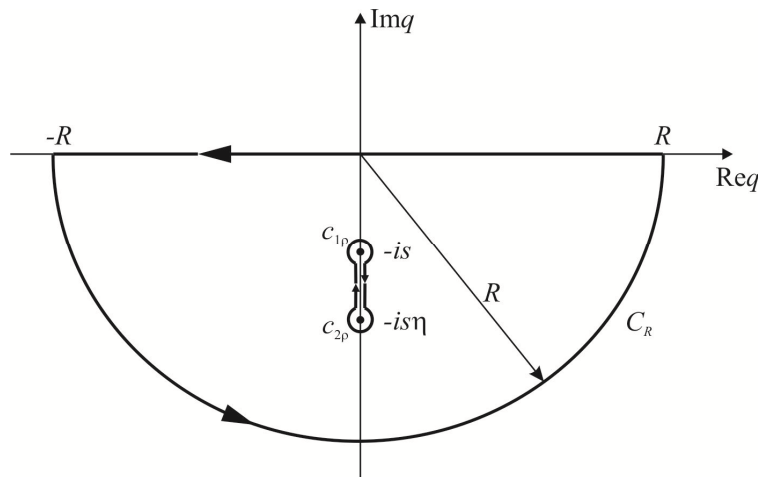


Рис. 1. Контурсы интегрирования в комплексной плоскости
Fig. 1. Contours of integration in the complex plane

Так как на правом берегу разреза $\sqrt{\xi^2 + s^2} = -i\sqrt{-\xi^2 - s^2}$, а на левом $\sqrt{\xi^2 + s^2} = i\sqrt{-\xi^2 - s^2}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi, s)}{\xi - q} d\xi = \int_{-is}^{-is\eta} \ln \left[2(\eta^2 - 1) \frac{s^2 (\xi^2 + s^2/c_R^2)}{(2\xi^2 + \eta^2 s^2)^2 + 4i\xi^2 \sqrt{-\xi^2 - s^2} k_2(\xi^2, s^2)} \right] \frac{d\xi}{\xi - q} -$$

$$- \int_{-is}^{-is\eta} \ln \left[2(\eta^2 - 1) \frac{s^2 (\xi^2 + s^2/c_R^2)}{(2\xi^2 + \eta^2 s^2)^2 - 4i\xi^2 \sqrt{-\xi^2 - s^2} k_2(\xi^2, s^2)} \right] \frac{d\xi}{\xi - q} =$$

$$= \int_{-is}^{-is\eta} \ln \frac{(2\xi^2 + \eta^2 s^2)^2 - 4i\xi^2 \sqrt{-\xi^2 - s^2} k_2(\xi^2, s^2)}{(2\xi^2 + \eta^2 s^2)^2 + 4i\xi^2 \sqrt{-\xi^2 - s^2} k_2(\xi^2, s^2)} \frac{d\xi}{\xi - q} = \frac{2}{i} \int_{-is}^{-is\eta} \operatorname{arctg} \frac{4\xi^2 \sqrt{-\xi^2 - s^2} k_2(\xi^2, s^2)}{(2\xi^2 + \eta^2 s^2)^2} \frac{d\xi}{\xi - q}.$$

Проводя замену переменной $\xi = -i\alpha s$, для U_+ получаем

$$U_+ = \frac{1}{\pi} \int_1^\eta \frac{\varphi(\alpha) d\alpha}{\alpha - iq/s}, \quad \varphi(\alpha) = \operatorname{arctg} \frac{4\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - 1} \sqrt{\eta^2 - \alpha^2}}{(\eta^2 - 2\alpha^2)^2}.$$

Аналогично для функции U_- путь интегрирования в (17) можно перенести на берега разреза, соединяющего точки $q = is$ и $q = is\eta$. Для этого необходимо замкнуть контур интегрирования в верхнюю полуплоскость и применить теорему Коши ($\operatorname{Im} q < 0$). Тогда с учетом замены $\xi = i\alpha s$ имеем

$$U_- = \frac{1}{\pi} \int_1^\eta \frac{\varphi(\alpha) d\alpha}{\alpha + iq/s}.$$

Найдем теперь оригиналы функций, входящих в представления (16), (17).

Сначала найдем оригиналы функций, образующих представления G_{1+}^{FL} , G_{1-}^{FL} , $\Gamma_{1+}^{FL} = 1/G_{1+}^{FL}$, $\Gamma_{1-}^{FL} = 1/G_{1-}^{FL}$ (знак « \div » означает взаимно однозначное соответствие между оригиналами и изображениями, штрихом обозначена производная функции):

$$\sqrt{s \pm iq} \div -\frac{\delta(x \pm \tau)}{2\sqrt{\pi\tau^{3/2}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{s \pm iq}} \div \frac{\delta(x \pm \tau)}{\sqrt{\pi\tau}},$$

$$\frac{1}{s \pm iq c_R} \div \delta(x \pm c_R \tau), \quad s \pm iq c_R \div \delta'(\tau) \delta(x) \mp c_R \delta'(x) \delta(\tau),$$

Теперь используем теорему о свертке [27] и свойство 3:

$$-\frac{\delta(x \pm \tau)}{2\sqrt{\pi\tau^{3/2}}} ** \delta(x \pm c_R \tau) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{1 - c_R}}{(x \pm c_R \tau)^{3/2}} [H(\tau \pm x) - H(c_R \tau \pm x)],$$

$$\frac{\delta(x \pm \tau)}{\sqrt{\pi\tau}} ** [\delta'(\tau) \delta(x) \mp c_R \delta'(x) \delta(\tau)] = \pm \frac{\sqrt{\tau - c_R} \sqrt{-x}}{\sqrt{-\pi x \tau}} \delta'(x \pm \tau).$$

Следовательно,

$$G_{1+} = -\frac{c_R}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{1 - c_R}}{(x - c_R \tau)^{3/2}} [H(\tau - x) - H(c_R \tau - x)],$$

$$G_{1-} = -\frac{\eta^4 c_R}{4\sqrt{\pi}(1-\eta^2)} \frac{\sqrt{1-c_R}}{(x+c_R\tau)^{3/2}} [H(\tau+x) - H(c_R\tau+x)],$$

$$\Gamma_{1+} = \frac{c_R\sqrt{-x}-\sqrt{\tau}}{c_R\sqrt{-\pi x\tau}} \delta'(x-\tau), \quad \Gamma_{1-} = \frac{2(1-\eta^2)}{\eta^4 c_R} \frac{\sqrt{\tau}-c_R\sqrt{-x}}{\sqrt{-\pi x\tau}} \delta'(x+\tau).$$

Для определения оригиналов функций $G_{2\pm}^{FL}(q, s) = e^{U_{\pm}}$ используем метод совместного обращения интегральных преобразований Фурье–Лапласа [7]. Сделаем замену $q = \lambda s$:

$$G_{2\pm}^{FL}(\lambda s, s) = g^L(s) h_{\pm}(\lambda), \quad g^L(s) = 1, \quad h_{\pm}(\lambda) = e^{h_{\pm}(\lambda)}, \quad h_{1\pm}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\eta} \frac{\varphi(\alpha) d\alpha}{\alpha \mp i\lambda},$$

$$g(\tau) = \delta(\tau), \quad g'(\tau) = \delta'(\tau).$$

Тогда с учетом замены $\lambda = \tau/iz$ аналитическое представление [7] для $G_{2\pm}(\tau, x)$ принимает вид (крышечка над функцией означает ее аналитическое представление)

$$\hat{G}_{2\pm}(\tau, z) = \delta'(\tau) * f_{2\pm}(\tau, z), \quad f_{2\pm}(\tau, z) = \frac{i}{2\pi z} h_{\pm}(\tau/z), \quad z = x + iy,$$

а оригинал определяется формулой

$$G_{2\pm}(\tau, x) = \delta'(\tau) * f_{2\pm}(\tau, x),$$

$$f_{2\pm}(\tau, x) = \lim_{y \rightarrow +0} [\hat{f}_{2\pm}^+(\tau, z) - \hat{f}_{2\pm}^-(\tau, \bar{z})], \quad (18)$$

$$\hat{f}_{2\pm}^+(\tau, z) = f_{2\pm}(\tau, z) \quad (y > 0), \quad \hat{f}_{2\pm}^-(\tau, z) = f_{2\pm}(\tau, z) \quad (y < 0).$$

Согласно формулам Сохоцкого [28, 29] граничные значения функции $h_{1\pm}(\tau/z)$ при $y \rightarrow \pm 0$ таковы:

$$h_{1\pm}(\tau/z) = h_{1\pm}(\tau/x) + \begin{cases} \mp i\varphi_1(\tau/x), & y \rightarrow +0, \\ \pm i\varphi_1(\tau/x), & y \rightarrow -0, \end{cases}$$

где $\varphi_1(\tau/x) = \varphi(\tau/x)H(\pm\tau/x-1)H(\eta\mp\tau/x)$, а интеграл $h_{1\pm}(\tau/x)$ понимается в смысле главного значения по Коши.

Тогда

$$f_{2\pm}(\tau, x) = e^{h_{\pm}(\tau/x)} \lim_{y \rightarrow +0} \left[\frac{i}{2\pi z} e^{\mp i\varphi_1(\tau/x)} - \frac{i}{2\pi \bar{z}} e^{\pm i\varphi_1(\tau/x)} \right] =$$

$$= e^{h_{\pm}(\tau/x)} \delta(x) \cos \varphi_1(\tau/x) \pm \frac{\sin \varphi_1(\tau/x)}{\pi x} e^{h_{\pm}(\tau/x)}.$$

Замечая, что справедливы следующие соотношения:

$$h_{1\pm}(\tau/x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad \cos \varphi_1(\tau/x) = 1 \quad \text{при } x = 0,$$

$$\sin \varphi_1(\tau/x) = \sin[\varphi(\tau/x)]H(\pm\tau/x-1)H(\eta\mp\tau/x),$$

$$\sin \varphi(\tau/x) = \frac{4\tau^2\sqrt{\tau^2-x^2}\sqrt{\eta^2x^2-\tau^2}}{\sqrt{(\eta^2x^2-2\tau^2)^4+16\tau^4(\tau^2-x^2)(\eta^2x^2-\tau^2)}} = \omega(x, \tau),$$

$$\frac{1}{x} H(\tau/x - 1) H(\eta - \tau/x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{x} H(\tau - x) H(\eta x - \tau), & x > 0, \end{cases}$$

$$-\frac{1}{x} H(-\tau/x - 1) H(\eta + \tau/x) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ \frac{1}{|x|} H(\tau - |x|) H(\eta|x| - \tau), & x < 0, \end{cases}$$

получаем следующее выражение для $f_{2\pm}(\tau, x)$:

$$f_{2\pm}(\tau, x) = \delta(x) H(\tau) + \Omega_{\pm}(x, \tau) e^{h_{\pm}(\tau/x)},$$

$$\Omega_{\pm}(x, \tau) = \frac{\omega(x, \tau)}{\pi|x|} H(\pm\tau/x - 1) H(\eta \mp \tau/x). \tag{19}$$

Учитывая, что свертка функции с производной от дельта-функции равна производной функции [27], из (18) и (19) получаем

$$G_{2\pm}(\tau, x) = \frac{\partial}{\partial \tau} f_{2\pm}(\tau, x) = \delta(x) \delta(\tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} [\Omega_{\pm}(x, \tau) e^{h_{\pm}(\tau/x)}].$$

Аналогично определяются оригиналы функций $\Gamma_{2\pm}(\tau, x) = 1/G_{2\pm}(\tau, x) = e^{-U_{\pm}}$:

$$\Gamma_{2\pm}(\tau, x) = \delta(x) \delta(\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} [\Omega_{\pm}(x, \tau) e^{-h_{\pm}(\tau/x)}].$$

Выполняя аналогичные приведенным выше действия, можно получить представление (7) для других диапазонов скорости движения точки раздела граничных условий, представленных в таблице.

5. Асимптотические представления напряжений и перемещений в окрестности точки раздела граничных условий

Построим представления для асимптотик напряжений и перемещений в окрестности границы области контакта $x = l(\tau)$. Пусть носители функций G_+ , P_- и скорость движения границы $\dot{l}(t)$ определяются неравенствами

$$G_+ : \tau/\eta < x < \tau; P_- : -\tau < x < \tau/\eta; 0 \leq \dot{l} < 1/\eta < 1. \tag{20}$$

Положим сначала, что $C = 0$ и введем обозначения

$$P_+ ** w_s = W(x, \tau), G_+ = g(x, \tau) H(x - \tau/\eta) H(\tau - x),$$

$$P_- = p(x, \tau) H(x + \tau) H(-\tau/\eta - x). \tag{21}$$

Тогда

$$w_+ = - \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} W(x - \xi, \tau - t) g(\xi, t) H[x - \xi - l(\tau - t)] H(\xi - t/\eta) H(t - \xi) d\xi dt, \tag{22}$$

$$\sigma_- = \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty W(x-\xi, \tau-t) p(\xi, t) H[l(\tau-t)-x+\xi] H(\xi+t) H(-t/\eta-\xi) d\xi dt. \quad (23)$$

Предположим, что $l(\tau)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа о среднем приращении. Тогда

$$l(\tau-t) = l(\tau) - \dot{l}(\tau_*)t, \quad \tau_* \in [\tau-t, \tau]. \quad (24)$$

Как видно из (22), с учетом (20) и (24) на носителе подынтегрального выражения выполняются неравенства

$$x-l(\tau) > \xi - \dot{l}(\tau_*)t > t/\eta - \dot{l}(\tau_*)t \geq 0 \quad (25)$$

Если $x-l(\tau) \rightarrow +0$, то из соотношений (25) следует, что при определении соответствующей асимптотики можно полагать $\xi, t \rightarrow +0$. При этом для значений x, τ , где $W(x, \tau)$ непрерывна, $W(x-\xi, \tau-t) \rightarrow W(x, \tau)$. Тогда из (22) получаем

$$w_+ \sim -W(x, \tau) \iint_{D_1} g(\xi, t) d\xi dt,$$

где область D_1 определяется неравенствами (рис. 2)

$$t/\eta < \xi < c_1 t, \quad 0 < \xi < x-l(\tau) + \dot{l}(\tau)t.$$

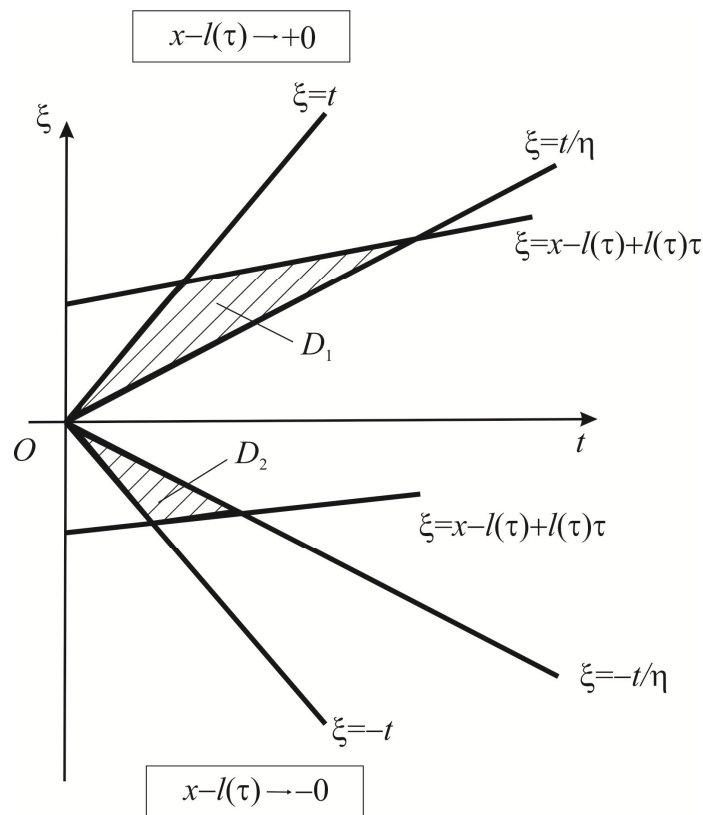


Рис. 2. Области интегрирования
Fig. 2. Domains of integration

С учетом (20) и (24) на носителе подынтегрального выражения в (23) выполняются неравенства

$$l(\tau) - x > \dot{l}(\tau_*)t - \xi > \dot{l}(\tau_*)t + t/\eta \geq 0.$$

Поэтому при построении соответствующей асимптотики для σ_- при $l(\tau) - x \rightarrow +0$ следует положить $\xi, t \rightarrow +0$.

Тогда

$$\sigma_- \sim W(x, \tau) \iint_{D_2} p(\xi, t) d\xi dt,$$

где область D_2 определяется неравенствами (см. рис. 2)

$$-t < \xi < -t/\eta, \quad \xi > x - l(\tau) + \dot{l}(\tau)t.$$

Рассмотрим однородные решения, определяемые формулами (13). С учетом обозначений (21) из (13) с заменой $\tau - t = t$ получаем

$$w_0 = \sum_{k=0}^n \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_0^\tau g[x - l(\tau - t), t] \alpha_k(\tau - t) H_1(t; x, \tau, \eta) dt,$$

$$\sigma_0 = \sum_{k=0}^n \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_0^\tau p[x - l(\tau - t), t] \alpha_k(\tau - t) H_2(t; x, \tau, \eta) dt,$$

где

$$H_1(t; x, \tau, \eta) = H[x - l(\tau - t) - t/\eta] H[t - x + l(\tau - t)],$$

$$H_2(t; x, \tau, \eta) = H[x - l(\tau - t) + t] H[-t/\eta - x + l(\tau - t)].$$
(26)

При $x - l(\tau) \rightarrow \pm 0$ $l(\tau - t) \sim l(\tau) - \dot{l}(\tau)t$ и функции (26) можно заменить асимптотиками

$$H_1(t; x, \tau, \eta) \sim H[x - l(\tau) + t(i - 1/\eta)] H[-x + l(\tau) + t(1 - i)],$$
(27)

$$H_2(t; x, \tau, \eta) \sim H[x - l(\tau) + t(i + 1)] H[-x + l(\tau) - t(1/\eta + i)].$$
(28)

Из (20) и (27) следует, что при $x - l(\tau) \rightarrow +0$ однородное решение w_0 имеет следующую асимптотику:

$$w_0 \sim \sum_{k=0}^n \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_{\tau_{w1}}^{\tau_{w2}} g(x - l(\tau - t), t) \alpha_k(\tau - t) dt, \quad \tau_{w1} = \frac{x - l(\tau)}{1 - i}, \quad \tau_{w2} = \frac{x - l(\tau)}{1/\eta - i}.$$

Аналогично из (20) и (28) при $l(\tau) - x \rightarrow +0$ следует, что асимптотика для σ_0 имеет вид

$$\sigma_0 \sim \sum_{k=0}^n \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_{\tau_{\sigma1}}^{\tau_{\sigma2}} p(x - l(\tau - t), t) \alpha_k(\tau - t) dt, \quad \tau_{\sigma1} > \frac{l(\tau) - x}{1 + i}, \quad \tau_{\sigma2} < \frac{l(\tau) - x}{1/\eta + i}.$$

Заключение

Предложен метод решения нестационарных задач с подвижной точкой смены граничных условий. Получены разрешающие задачу явные интегральные формулы, позволяющие определить неизвестные перемещения и напряжения. Построены асимптотические представления напряжений и перемещений в окрестности точки смены граничных условий.

Работа выполнена в Московском авиационном институте при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-01-00091).

Библиографический список

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука: Физматлит, 1995. – 352 с.
2. Mikhailova E.Yu., Fedotenko G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) // *Mechanics of Solids*. – 2011. – Vol. 46. – No. 2. – P. 239–247. DOI: 10.3103/S0025654411020129
3. Удар деформируемым цилиндрическим телом по упругому полупространству / Амар Абдул Карим Салман, А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // *Изв. РАН. МТТ* – 2004. – № 3. – С. 82–90.
4. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства [Электронный ресурс] // *Труды МАИ*. – 2014. – № 78. – URL: <http://www.mai.ru/upload/iblock/540/540b786eac60d751a2e5f5b8f745d731.pdf>.
5. Tarlakovskiy D.V., Fedotenko G.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2009. – Vol. 162. – No. 2. – P. 246–253. DOI: 10.1007/s10958-009-9635-4
6. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface on an elastic solid // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*. – 1904. – Vol. 208. – P. 1–42.
7. Слепян Л.П., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.
8. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
9. Файншмидт В.Л., Шемякин Е.И. Распространение волн в упругом полупространстве, возбуждаемом поверхностной касательной силой // *Учен. зап. ЛГУ*. – 1954. – № 177. – Вып. 28. – С. 148–179.
10. Hu De-sui An application of Ungar's differential transform to elastodynamics // *Appl. math, and mech*. – 1989. – Vol. 10. – No. 7. – P. 645–648.
11. Kosloff D., Reshef M., Loewenthal D. Elastic wave calculations by the Fourier method // *Bull. Seismol. Soc. Amer.* – 1984. – Vol. 74. – No. 3. – P. 875–891.
12. Richards P.G. Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // *Bull. Seismol. Soc. Amer.* – 1979. – Vol. 69. – No. 4. – P. 947–956.
13. Steinfeld B., Takemiya K., Antes H. Analysis of transient 3d wave propagation in an elastic half-space. The classical approach and the direct boundary element method // *Z. angew. Math, und Mech*. – 1995. – Bd. 75. Suppl. – No. 1. – P. 283–284.
14. Melnikov Y.A. Influence functions of a point source for perforated compound plates with facial convection // *J. Eng. Math*. – 2004. – Vol. 49. – No. 3. – P. 253–270.
15. Churchman C.M., Korsunsky A.M., Hills D.A. The edge dislocation in a three-quarter plane. Pt I. Influence functions // *Eur. J. Mech. A*. – 2006. – Vol. 25. – No. 1. – P. 42–50.

16. Tarlovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3D Motion of an Elastic Spherical Shell // *Mechanics of Solids*. – 2015. – Vol. 50. – No. 2. – P. 208–217. DOI: 10.3103/S0025654415020107
17. Зеленцов В.Б. Нестационарная динамическая контактная задача теории упругости об ударе параболического штампа в упругую полуплоскость // *Изв. РАН. Мех. тверд. тела*. – 2006. – № 1. – С. 28–46.
18. Зеленцов В.Б. Об ударе плоского штампа в упругую полуплоскость // *Прикл. мат. и мех.* – 2006. – Т. 70, № 1. – С. 150–161.
19. Аргатов И.И. Медленные нестационарные вертикальные движения штампа на поверхности упругого полупространства // *Изв. РАН. Мех. тверд. тела*. – 2007. – № 5. – С. 99–116.
20. Рябченко В.П. Асимптотическое решение задачи о воздействии штампа на упругий слой, лежащий на поверхности сжимаемой жидкости бесконечной глубины // *Прикл. мех. и техн. физ.* – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 131–142.
21. Кубенко В.Д., Марченко Т.А. Плоская задача нестационарного вдавливания затупленного жесткого индентора в поверхность упругого слоя // *Прикл. мех.* – 2008. – Т. 44, № 3. – С. 55–65.
22. Shmegeera S.V. The initial boundary-value mixed problems for elastic half-plane with the conditions of contact friction // *Int. J. Solids and Struct.* – 2000. – Vol. 37. – No. 43. – P. 6277–6296.
23. Зеленцов В.Б., Батурина Н.Ю. О движении плоского штампа по границе упругой полуплоскости // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2011. – № 3. – С. 40–48.
24. Suvorov Ye.M., Tarlovskii D.V., Fedotenkov G.V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2012. – Vol. 76. – No. 5. – P. 511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015
25. Батурина Н.Ю., Митрин Б.И. Об одном приближенном решении интегрального уравнения в контактной задаче о движении штампа // *Научное обозрение*. – 2012. – № 6. – С. 71–73.
26. Tarlovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol. 43. – No. 2. – P. 145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178
27. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 508 с.
28. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
29. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
30. Гранично-элементное исследование поверхностных пористо-упругих волн / Л.А. Игумнов, И.С. Карелин, А.Н. Петров, А.Е. Петров // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб.* – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та. – 2013. – Вып. 75. – С. 134–143.
31. Plane nonstationary problem of motion of the surface load over an elastic half space / L.A. Igumnov, A.S. Okonechnikov, D.V. Tarlovskii, G.V. Fedotenkov // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2014. – Vol. 203. – No. 2. – P. 193–201.
32. Igumnov L.A., Belov A.A., Petrov A.N. Boundary-Element Modeling of the Dynamics of Elastic and Viscoelastic Bodies and Media // *Advanced Materials – Studies and Application*. Nova Science Publishers. – 2015. – P. 301–318.
33. Igumnov L.A., Markov I.P., Amenitsky A.V. A three-dimensional boundary element approach for transient anisotropic viscoelastic problems // *Key Engineering Materials*. – 2014. – Vol. 685. – P. 267–271.

References

1. Gorshkov A.G., Tarlovskii D.V. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi s podvizhnymi granitsami* [Dynamic contact problems with moving boundaries]. *Moscow, Nauka, Fizmatlit*, 1995, 352 p.
2. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction). *Mechanics of Solids*, 2011, Vol. 46, No. 2, pp. 239-247. DOI: 10.3103/S0025654411020129.

3. Amar Abdul Karim Salman, Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Udar deformiruemym tsilindricheskim telom po uprugomu poluprostranstvu [Beat the deformable cylindrical body on elastic half-space]. *Izv. RAN. MTT.*, 2004, no. 3, pp. 82-90.

4. Mikhailova E.Iu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nestatsionarnyi kontakt sfericheskoi obolochki i uprugogo poluprostranstva [Unsteady contact spherical shell and an elastic half-space] [URL: <http://www.mai.ru/upload/iblock/540/540b786eac60d751a2e5f5b8f745d731.pdf>]. *Trudy MAI*, 2014, no. 78.

5. Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries. *Journal of Mathematical Sciences*, 2009, vol. 162, no. 2, pp. 246-253. DOI: 10.1007/s10958-009-9635-4

6. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface on an elastic solid. *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 1904, vol. 208, pp. 1-42.

7. Slepian L.P., Iakovlev Iu.S. Integral'nye preobrazovaniia v nestatsionarnykh zadachakh mekhaniki [Integral transformations in unsteady problems of mechanics]. *Leningrad, Sudostroenie*, 1980, 344 p.

8. Poruchikov V.B. Metody dinamicheskoi teorii uprugosti [Methods of dynamic elasticity theory]. *Moskov, Nauka*, 1986, 328 p.

9. Fainshmidt V.L., Shemiakin E.I. Rasprostranenie voln v uprugom poluprostranstve, vzbuzhdaemom poverkhnostnoi kasatel'noi siloi [Wave propagation in an elastic half-excited surface tangential force]. *Uch. zap. LGU.*, 1954, no. 177, is. 28, pp. 148-179.

10. Hu De-sui An application of Ungar's differential transform to elastodynamics. *Appl. math, and mech.*, 1989, vol. 10, no. 7, pp. 645-648.

11. Kosloff D., Reshef M., Loewenthal D. Elastic wave calculations by the Fourier method. *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1984, vol. 74, no. 3, pp. 875-891.

12. Richards P. G. Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation. *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1979, vol. 69, no. 4, pp. 947-956.

13. Steinfeld B., Takemiya K, Antes H. Analysis of transient 3d wave propagation in an elastic half-space. The classical approach and the direct boundary element method. *Z. angew. Math, und Mech.*, 1995, Bd. 75. Suppl., no. 1, pp. 283-284.

14. Melnikov Y.A. Influence functions of a point source for perforated compound plates with facial convection. *J. Eng. Math.*, 2004, vol. 49, no. 3, pp. 253-270.

15. Churchman C.M., Korsunsky A.M., Hills D.A. The edge dislocation in a three-quarter plane. Pt I. Influence functions. *Eur. J. Mech. A.*, 2006, vol. 25, no. 1, pp. 42-50.

16. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3D Motion of an Elastic Spherical Shell. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 208-217. DOI: 10.3103/S0025654415020107

17. Zelentsov V.B. Nestatsionarnaia dinamicheskaiia kontaktnaia zadacha teorii uprugosti ob udare parabolicheskogo shtampa v upruguiu poluploskost' [Transient dynamic contact problem of elasticity theory of the impact of a parabolic stamp into an elastic half-plane]. *Izv. RAN. Mekh. tverd. tela.*, 2006, no. 1, pp. 28-46.

18. Zelentsov V.B. Ob udare ploskogo shtampa v upruguiu poluploskost' [On the impact of the flat punch into an elastic half-plane]. *Prikl. mat. i mekh.*, 2006, vol. 70, no 1, pp. 150-161.

19. Argatov I.I. Medlennye nestatsionarnye vertikal'nye dvizheniia shtampa na poverkhnosti uprugogo poluprostranstva [Slow stationary vertical movement of the stamp on the surface of an elastic half-space]. *Izv. RAN. Mekh. tverd. tela*, 2007, no. 5, pp. 99-116.

20. Riabchenko V.P. Asimptoticheskoe reshenie zadachi o vozdeistvii shtampa na uprugii sloi, lezhashchii na poverkhnosti szhimaemoi zhidkosti beskonechnoi glubiny [The asymptotic solution of the problem of the impact of a stamp on an elastic layer lying on the surface of a compressible fluid of infinite depth]. *Prikl. mekh. i tekhn. fiz.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 131-142.

21. Kubenko V.D., Marchenko T.A. Ploskaia zadacha nestatsionarnogo vdavlivaniia zatuplennogo zhestkogo indentora v poverkhnost' uprugogo sloia [Plane problem of non-stationary pressing a blunt hard indenter into the surface of the elastic layer]. *Prikl. mekh.*, 2008, vol. 44, no. 3, pp. 55-65.
22. Shmegeera S.V. The initial boundary-value mixed problems for elastic half-plane with the conditions of contact friction. *Int. J. Solids and Struct.*, 2000, vol. 37, no. 43, pp. 6277-6296.
23. Zelentsov V.B., Baturina N.Iu. O dvizhenii ploskogo shtampa po granitse uprugoi poluploskosti [On the motion of a plane stamp on the border of an elastic half-plane]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*, 2011, no. 3, pp. 40-48.
24. Suvorov Ye.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 511-518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015
25. Baturina N.Iu., Mitrin B.I. Ob odnom priblizhennom reshenii integral'nogo uravneniia v kontaktnoi zadache o dvizhenii shtampa [An approximate solution of the integral equation of the contact problem of the motion of the stamp]. *Nauchnoe obozrenie*, 2012, no. 6, pp. 71-73.
26. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145-152. DOI: 10.3103/S1052618814010178
27. Kech V., Teodorescu P. Vvedenie v teoriuu obobshchennykh funktsii s prilozheniiami v tekhnike [Introduction to the theory of generalized functions with applications in engineering]. *Moscow, Izd.-vo «Mir»*, 1978, 508 p.
28. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1966, 708 p.
29. Gakhov F.D. Kraevye zadachi [Boundary Value problems]. *Moscow, Nauka*, 1977, 640 p.
30. Igumnov L.A., Karelin I.S., Petrov A.N., Petrov A.E. Granichno-elementnoe issledovanie poverkhnostnykh poristo-uprugikh voln [Boundary-element study of surface-porous elastic waves] *Problemy prochnosti i plastichnosti. Mezhhuz. sb. Nizhnii Novgorod, Izd.-vo NNGU*, 2013, no. 75, pp. 134-143.
31. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Plane nonstationary problem of motion of the surface load over an elastic half space. *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 203, no. 2, pp. 193-201.
32. Igumnov L.A., Belov A.A., Petrov A.N. Boundary-Element Modeling of the Dynamics of Elastic and Viscoelastic Bodies and Media. *Advanced Materials – Studies and Application*. Nova Science Publishers, 2015, pp. 301-318.
33. Igumnov L.A., Markov I.P., Amenitsky A.V. A three-dimensional boundary element approach for transient anisotropic viscoelastic problems. *Key Engineering Materials*, 2014, vol. 685, pp. 267-271.