

Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины составного клина с жестко зашечленными образующими // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 3. – С. 131–147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Stress-strain state near the wedge top with rigid fastening of sides. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 3. Pp. 131-147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.3.09

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ СОСТАВНОГО КЛИНА С ЖЕСТКО ЗАЩЕMLЕННЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 1 февраля 2016 г.
Принята: 16 сентября 2016 г.
Опубликована: 30 сентября 2016 г.

Ключевые слова:

особые точки,
представительный объем,
сингулярное напряжение,
температурная нагрузка,
критические сочетания
параметров

АННОТАЦИЯ

В отличие от обычно используемых для исследования напряженно-деформируемого состояния (НДС) вблизи особых точек деформируемых тел асимптотических методов предлагается подход, основанный на отождествлении особой точки с представительным объемом тела. Такой подход дает возможность сформулировать в особой точке задаваемые ограничения. Как правило, количество таких ограничений в особой точке оказывается большим, чем в обычной точке поверхности тела. Это обстоятельство обуславливает новую (по сравнению с классической) постановку задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ), содержащего особую точку. Проведено исследование ограничений в вершине составного клина с жестко зашечленными образующими. Установлены сочетания материальных и геометрических параметров элементов конструкции, приводящие к различным вариантам постановки для нее задачи МДТТ. Выявлены критические значения задаваемых параметров, при которых напряжения в особой точке неограниченно возрастают. С использованием итерационного численно-аналитического метода изучено НДС в вершине составного клина с развернутым углом при вершине в случае его температурной нагрузки. Показано, что полученное решение согласовано со всеми задаваемыми в особых точках – представительных объемах – ограничениями; при стремлении материальных параметров к критическому сочетанию напряжения проявляют сингулярный характер; наибольшие значения напряжения достигают не в особой точке, а в ее ближайшей окрестности. Приведено сравнение итерационного решения с решением классическим методом конечных элементов (МКЭ). Классическое решение задачи МКЭ не может быть признано приемлемым для особых точек – представительных объемов, так как оно не удовлетворяет задаваемым в них ограничениям.

© ПНИПУ

© **Пестренин Валерий Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: PestreninVM@mail.ru
Пестренина Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент e-mail: IPestrenina@gmail.com
Ландик Лидия Владимировна – заведующая лабораторией, e-mail: LidiaLandik@gmail.com

Valery M. Pestrenin – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: PestreninVM@mail.ru
Irina V. Pestrenina – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: IPestrenina@gmail.com
Lidia V. Landik – Laboratory Head, e-mail: LidiaLandik@gmail.com

STRESS-STRAIN STATE NEAR THE WEDGE TOP WITH RIGIDLY FASTENED SIDES

V.M. Pestrenin, I.V. Pestrenina, L.V. Landik

Perm State National Research University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 1 February 2016
Accepted: 16 September 2016
Published: 30 September 2016

Keywords:

singular points,
a representative volume,
a singular stress,
temperature load, the critical
combination of parameters

ABSTRACT

Deformable bodies containing wedge form elements with rigidly fastened sides under temperature loading are investigated. Stress-strain state research method based on identifying a singular point with a representative volume of the body is offered. This approach (in contrast to the commonly used asymptotic methods) makes it possible to formulate essential restrictions at a singular point. It is shown that typically the number of restrictions in the singular point is redundant (larger than usual at the body surface). This situation causes a new (compared to classical) formulation of the problem of solid mechanics contained at a singular point. The investigation of restrictions for the composite wedge with rigidly fastened sides in the vicinity of its top is done. Combinations of material and geometric parameters of construction elements that lead to various variants for problem formulation in solid mechanics are revealed. The critical values of set parameters at which the stress at the singular point increases indefinitely are identified. Load parameters conditions under which a singular point ceases to show singular behavior are formulated. Stress distributions problem near the top of composite wedge with 180 degrees vertex angle under the temperature loading is solved by the iterative numerical-analytical method. The comparison of the solutions obtained by the iterative technique and the classical finite element method is performed. It is shown that the iterative solution matches with all the singular point definable restrictions. Outside a singular point small neighborhood it matches with classical method decisions.

But the classical asymptotic solution of the finite element method in the singular point small neighborhood cannot be declared allowed, since it does not satisfy the constraints formulated for such points. This makes it possible to evaluate the region near the critical point, which has no correct asymptotic solution. The typical size of such region is of five to ten characteristic size of the representative volume of the deformable body material. When material parameters approximate to the critical combination, the stress components demonstrate the singular character. The greatest stress value is reached not at the singular point, but at its proximate neighborhood.

© PNRPU

Введение

При исследовании напряженного состояния вблизи особых точек однородных и составных деформируемых тел (вершин клиньев, конусов, трещин, ребер (пересечений образующих поверхностей) и т.п.) обычно рассматривается локальная задача в криволинейной системе координат, полюс которой помещается в особую точку [1–17 и др.]. Асимптотическое решение такой задачи разыскивается в виде разложения по собственным функциям однородных задач с множителями r^{λ_k} , где r – расстояние до особой точки, а λ_k – соответствующее собственное значение. По значениям λ_k выносятся суждения о характере напряженного состояния вблизи особой точки. В рассматриваемом подходе, во-первых, не принимаются и не могут быть приняты во внимание ограничения, задаваемые непосредственно в особой точке. В полюсе тензорные характеристики (напряжения, деформации, перемещения) не определены, так как здесь отсутствует взаимно-однозначное соответствие между физической точкой тела и ее криволинейными координатами. Во-вторых, особая точка рассматривается как математическая (не имеющая линейных размеров), поскольку допускается, что параметр r может принимать сколь угодно малые значения. Такое представление о точке сплошной среды не соответствует ее по-

студентам, согласно которым точкой является представительный объем материала тела, имеющий конечный характерный размер. Данное несоответствие приводит к тому, что при построении решения асимптотическим методом в окрестности особой точки используется представление о напряжениях и деформациях в элементарных объемах с характерными размерами, меньшими характерных размеров макроскопических представительных объемов изучаемых тел. Фактически это означает переход на микро-уровень с сохранением физических уравнений макроуровня. Данное обстоятельство ограничивает достоверное применение асимптотических методов областью вне малой окрестности особой точки. Внутри такой окрестности возможность использования асимптотического решения требует дополнительного изучения.

Отождествление особой точки с представительным объемом тела дает возможность сформулировать в ней задаваемые ограничения (граничные условия, условия непрерывности параметров состояния на поверхностях соединения, кинематические ограничения и т.п.). При этом оказывается, что необычность особых точек проявляется в том, что количество независимых ограничений в них оказывается большим, чем количество ограничений в обычных точках границы тела, поэтому задачи для тел с особыми точками являются переопределенными. Ограничения на параметры состояния в особых точках представляют собой систему линейных неоднородных алгебраических равенств. Изучение этих равенств позволяет в зависимости от геометрических и материальных параметров элементов конструкции установить возможные варианты постановки задачи механики деформируемого твердого тела, содержащего особую точку, выявить критические сочетания конструктивных параметров и параметров нагрузки. Все это необходимо для построения решения, удовлетворяющего всем ограничениям в особой точке и согласующегося вне малой окрестности с решениями, получающимися классическими методами.

В настоящей работе развиваемый авторами подход [18–20] применяется для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) в вершине и ее окрестности составного клина с жестко защемленными образующими. Асимптотическое решение подобной задачи рассматривалось, например, в работах [7–9].

1. Постановка задачи о формировании ограничений в вершине клина

Рассматривается часть конструкции, представляющая собой плоский клин, составленный из двух изотропных линейно-упругих элементов 1, 2, скрепленных между собой (рис. 1). Образующие клина защемлены. Орты \bar{n} и \bar{m} перпендикулярны образующим, а орты \bar{n}' , \bar{m}' перпендикулярны соответственно направлениям \bar{n} , \bar{m} . Углы α , β при вершинах, составляющих клин элементов, подчинены условиям

$$0 < \alpha < 2\pi, 0 < \beta < 2\pi, 0 < \alpha + \beta \leq 2\pi. \quad (1)$$

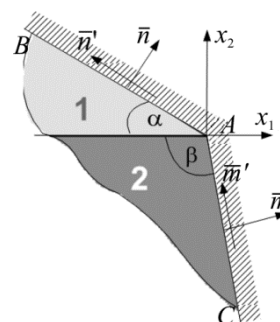


Рис. 1. Составной клин
Fig. 1. Compound wedge

Вводится ортонормированная декартова система координат x_1, x_2 с началом в точке A (вершине клина). Ось x_1 направляется по касательной к линии соединения составляющих клин элементов во внешнюю, относительно клина, область. Приняты обозначения

$\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензоров соответственно напряжений и деформаций в k -м ($k = 1, 2$) составляющем элементе клина. $E_k, G_k, \nu_k, \omega_k$ – модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона, коэффициент температурной деформации в k -м элементе клина; $\varepsilon_n^{(1)}, \varepsilon_m^{(2)}$ – относительные удлинения линейных элементов в точке A , направленных по образующим AB и AC ; φ_1 и φ_2 – изменения в процессе деформирования соответственно углов α, β ; ΔT – приращение температуры. Считается, что составной клин находится в условиях плоской деформации. Согласно принятой концепции в окрестности точки A рассматриваются две особые точки. Это представительный объем тела 1 , содержащий точку A , и представительный объем тела 2 , содержащий эту же точку. Указанные представительные объемы находятся в однородном НДС и взаимодействуют по линии соединения. Это взаимодействие характеризуется условиями:

непрерывности напряжений и деформаций на линии соединения

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \quad \varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}; \quad (2)$$

отсутствия относительных удлинений в направлении образующих составного клина

$$\varepsilon_n^{(1)} = 0, \quad \varepsilon_m^{(2)} = 0; \quad (3)$$

отсутствия сдвига между направлениями AB и AC

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0. \quad (4)$$

С введением обозначений

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}; \quad \varepsilon_{12}^{(2)} = \varepsilon_{12}; \quad \varepsilon_{12}^{(1)} = g\varepsilon_{12}; \quad g = \frac{G_2}{G_1}, \quad Q = \left[\frac{(1 + \nu_1)\omega_1}{(1 - 2\nu_1)} - \frac{g(1 + \nu_2)\omega_2}{(1 - 2\nu_2)} \right] \Delta T \quad (5)$$

равенства (2)–(4) для случая, когда $\sin \alpha \neq 0$ и $\sin \beta \neq 0$ (случай $\sin \alpha = 0$ и $\sin \beta = 0$ рассматривается в п. 2) приводятся к системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22}^{(1)} \sin^2 \alpha - g\varepsilon_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\ \varepsilon_{11} \cos^2 \beta + \varepsilon_{22}^{(2)} \sin^2 \beta + \varepsilon_{12} \sin 2\beta &= 0, \\ \varepsilon_{11}(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) + \varepsilon_{12}(1 - g) &= 0, \\ \varepsilon_{11} \left(\frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} - \frac{g\nu_2}{1 - 2\nu_2} \right) + \varepsilon_{22}^{(1)} \frac{1 - \nu_1}{1 - 2\nu_1} - \varepsilon_{22}^{(2)} \frac{g(1 - \nu_2)}{1 - 2\nu_2} &= Q. \end{aligned} \quad (6)$$

При построении равенств (5), (6) использовались физические уравнения линейной термоупругости и формула

$$\varphi \sin \gamma = \left[2\varepsilon_{rp} - (\eta_k + \eta_l)\delta_{rp} \right] k_r l_p, \quad (7)$$

определяющая сдвиг φ в произвольной точке сплошной среды между линейными элементами с направлениями \bar{k}, \bar{l} и углом γ между ними. Здесь η_k, η_l – относительные удлинения в точке сплошной среды в направлении ортов \bar{k}, \bar{l} соответственно; δ_{rp} – координаты единичного тензора.

Задача состоит в исследовании (в зависимости от материальных и геометрических параметров) существования решений системы уравнений (6) и ее аналогов в случаях $\sin \alpha = 0, \sin \beta = 0$; определении в каждом решении независимых ограничений на параметры состояния в особой точке.

2. Общее исследование системы уравнений (6)

2.1. $\sin \alpha \neq 0, \sin \beta \neq 0$.

Данное условие обеспечивает существование третьего из равенств системы уравнений (6). Эта система автономна относительно деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}^{(1)}, \varepsilon_{22}^{(2)}, \varepsilon_{12}$. Ее определитель вычисляется по формуле

$$\Delta = 2g \sin(\alpha + \beta) \left[\frac{1-v_1}{1-2v_1} \cos \alpha \sin \beta + \frac{1-v_2}{1-2v_2} \cos \beta \sin \alpha \right] - 2(1-g) \left[\left(\frac{1}{1-2v_1} - \frac{g}{1-2v_2} \right) \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \frac{1-v_1}{1-2v_1} \sin^2 \beta + \frac{g(1-v_2)}{1-2v_2} \sin^2 \alpha \right]. \quad (8)$$

Определитель (8) зависит от пяти безразмерных параметров $\alpha, \beta, g, v_1, v_2$. Если сочетание этих параметров не обращает в нуль определитель (8), уравнения (6) имеют единственное решение

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad (9)$$

где Δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) – определители матриц, получающихся последовательной заменой столбцов матрицы системы уравнений (6) столбцом свободных членов:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -2(1-g)Q \sin^2 \alpha \sin^2 \beta, \quad \Delta_2 = 2Q \cos \alpha \sin \beta (\cos \alpha \sin \beta + g \cos \beta \sin \alpha), \\ \Delta_3 &= -2Q \sin \alpha \cos \beta (\cos \alpha \sin \beta + g \cos \beta \sin \alpha), \quad \Delta_4 = Q \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (10)$$

Определители (10) одновременно обращаются в нуль в случаях:

1) $Q = 0$. Это возможно в случае отсутствия температурной нагрузки ($\Delta T = 0$) или при условии зависимости между материальными характеристиками скрепляемых тел, обращающих в нуль коэффициент при ΔT (5):

$$\frac{\omega_1(1+v_1)}{1-2v_1} - \frac{g\omega_2(1+v_2)}{1-2v_2} = 0. \quad (11)$$

Если определитель (8) в данном случае не равен нулю, все деформации (9) в особых точках обращаются в нуль. С учетом зависимости (5) в особых точках формулируются шесть ограничений на деформации. Если определитель (8) обращается в нуль, уравнения (6) становятся линейно зависимыми. Количество независимых ограничений на компоненты деформации определяется рангом матрицы системы;

2) $g = 1, \alpha + \beta = \pi$. Система (6) приводится к трем линейным неоднородным уравнениям относительно четырех компонентов деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22}^{(1)} \sin^2 \alpha - g\varepsilon_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\ \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22}^{(2)} \sin^2 \alpha - \varepsilon_{12} \sin 2\alpha &= 0, \\ \varepsilon_{11} \left(\frac{v_1}{1-2v_1} - \frac{v_2}{1-2v_2} \right) + \varepsilon_{22}^{(1)} \frac{1-v_1}{1-2v_1} - \varepsilon_{22}^{(2)} \frac{(1-v_2)}{1-2v_2} &= Q. \end{aligned} \quad (12)$$

Если коэффициенты Пуассона скрепляемых тел различны ($v_1 \neq v_2$), ранг системы (12) равен трем, и компоненты деформации связаны независимыми соотношениями

$$\varepsilon_{11} = \frac{Q(1-2\nu_1)(1-2\nu_2)\sin^2 \alpha}{\nu_1 - \nu_2} - \varepsilon_{12} \sin 2\alpha,$$

$$\varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)} = -\frac{Q(1-2\nu_1)(1-2\nu_2)\cos^2 \alpha}{\nu_1 - \nu_2} + \varepsilon_{12} \sin 2\alpha.$$

Когда коэффициенты Пуассона скрепляемых тел одинаковы ($\nu_1 = \nu_2$), но $Q \neq 0$ вследствие различия коэффициентов линейного расширения ($\omega_1 \neq \omega_2$), ранг системы уравнений (12) равен двум, а ранг ее расширенной матрицы – трем. Уравнения несовместны. Это означает, что при стремлении ν_1 к ν_2 деформации в вершине клина неограниченно возрастают;

3) $g = 1, \quad \alpha + \beta = 2\pi$. Система (6) принимает вид (12), поэтому справедливы результаты, приведенные в п.2).

2.2. $\sin \alpha = 0, \quad \sin \beta \neq 0, \quad (\alpha = \pi)$.

Стороны угла $\alpha = \pi$ представляют собой прямую. При деформировании окрестности точки A прямые переходят в прямые, поэтому сдвиг между образующими развернутого угла равен нулю. Следовательно, условие (4) ($\varphi_1 + \varphi_2 = 0$) при $\alpha = \pi$ переходит в условие $\varphi_2 = 0$. Уравнения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 0, \\ \varepsilon_{11} \cos^2 \beta + \varepsilon_{22}^{(2)} \sin^2 \beta + \varepsilon_{12} \sin 2\beta &= 0, \\ \varepsilon_{11} \operatorname{ctg} \beta + 2\varepsilon_{12} &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\varepsilon_{11} \left(\frac{\nu_1}{1-2\nu_1} - \frac{g\nu_2}{1-2\nu_2} \right) + \varepsilon_{22}^{(1)} \frac{1-\nu_1}{1-2\nu_1} - \varepsilon_{22}^{(2)} \frac{g(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} = Q.$$

Определитель матрицы системы уравнений (13)

$$\Delta = 2 \left(\frac{1-\nu_1}{1-2\nu_1} \right) \sin^2 \beta$$

не обращается в нуль, поэтому ранг системы равен четырем, она имеет единственное решение

$$\varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = \frac{1-\nu_1}{1-2\nu_1} Q, \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = 0, \quad \varepsilon_{12} = 0.$$

Компоненты деформаций в особых точках подчиняются шести условиям, НДС здесь полностью определено.

2.3. $\sin \alpha \neq 0, \quad \sin \beta = 0, \quad (\beta = \pi)$.

Случай аналогичен предыдущему. Компоненты деформации находятся по формулам

$$\varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = 0, \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = -\frac{1-2\nu_2}{g(1-\nu_2)} Q, \quad \varepsilon_{12} = 0.$$

2.4. $\sin \alpha = 0, \quad \sin \beta = 0, \quad (\alpha = \beta = \pi).$

Из уравнений (6) следуют два ограничения на компоненты деформации в вершине клина

$$\varepsilon_{11} = 0, \quad \frac{1-\nu_1}{(1-2\nu_1)} \varepsilon_{22}^{(1)} - \frac{g(1-\nu_2)}{(1-2\nu_2)} \varepsilon_{22}^{(2)} = Q.$$

Еще два ограничения вытекают из равенств (5). Суммарное количество ограничений равно четырем.

3. Частные случаи соединения элементов

Рассматриваются наиболее интересные, по мнению авторов, варианты геометрических параметров вблизи вершины клина: $\alpha = \beta, \alpha + \beta = \pi / 2, \alpha + \beta = \pi, \alpha + \beta = 2\pi.$

3.1. $\alpha = \beta, \quad \sin \alpha \neq 0$ (случай $\sin \alpha = 0$ рассмотрен в п. 2.2, 2.4)

Определитель (8) преобразуется к виду

$$\Delta = 2 \sin^2 \alpha (V - W \sin^2 \alpha), \quad (14)$$

где

$$V = \frac{(g+1)(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} + \frac{g(g+1)(1-\nu_2)}{1-2\nu_2}, \quad W = \frac{g(1-2\nu_1)+1}{1-2\nu_1} + \frac{g[(1-2\nu_2)+g]}{1-2\nu_2}.$$

Если определитель (14) не обращается в нуль, уравнения (6) имеют единственное решение вида (9), в котором Δ определяется равенством (14), а определители Δ_i вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -2(1-g)Q \sin^4 \alpha, & \Delta_2 &= 2(1+g)Q \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\ \Delta_3 &= -2(1+g)Q \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, & \Delta_4 &= Q \sin^2 \alpha \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (15)$$

Параметры состояния в вершине клина подчинены шести ограничениям, НДС здесь полностью определено.

При выполнении накладываемого на материальные и геометрические параметры условия

$$\sin^2 \alpha = V / W. \quad (16)$$

определитель (14) обращается в нуль. Равенство (16) определяет угол скрепления элементов 1, 2, при котором ранг матрицы системы уравнений (6) оказывается меньше четырех. Область существования такого угла в пространстве параметров (g, ν_1, ν_2) с учетом положительности величин V и W определяется неравенством

$$(g-1)[\nu_1(1-2\nu_2) - g\nu_2(1-2\nu_1)] \leq 0. \quad (17)$$

Если $g = 1$, неравенство (17) выполняется независимо от значений ν_1, ν_2 . При этом $\alpha = \beta = \pi / 2$. Возможные случаи поведения решений уравнений (6) в зависимости от ν_1, ν_2 приведены в п. 2.1.2.

Когда $g \neq 1$, неравенство (17), определяющее область существования угла α , удовлетворяющего условию (16), распадается на две группы неравенств

$$g < 1, \quad v_2 \leq \frac{v_1}{2v_1 + g(1 - 2v_1)}, \quad (18)$$

$$g > 1, \quad v_2 \geq \frac{v_1}{2v_1 + g(1 - 2v_1)}. \quad (19)$$

Для некоторых значений g области, ограниченные неравенствами (18), (19) в плоскости v_1, v_2 , представлены на рис. 2.

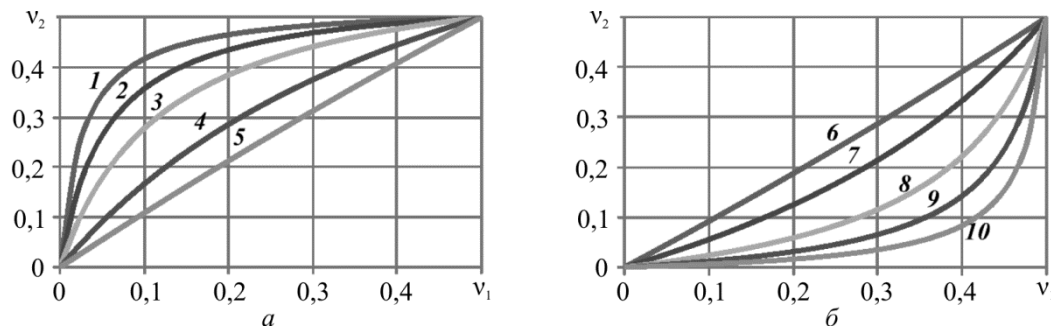


Рис. 2. Области существования решения уравнения (16) оказываются ниже кривой (а) в соответствии с (18) или выше кривой (б) в соответствии с (19) для значений параметра g :

1 – 0,05; 2 – 0,1; 3 – 0,2; 4 – 0,5; 5 – 0,9; 6 – 1,111; 7 – 2; 8 – 5; 9 – 10; 10 – 20

Fig. 2. Regions of existence for equation solution (16) are below the curve (a) in accordance with (18) or above the curve (b) in accordance with (19) for the value of parameter g :

1 – 0,05; 2 – 0,1; 3 – 0,2; 4 – 0,5; 5 – 0,9; 6 – 1,111; 7 – 2; 8 – 5; 9 – 10; 10 – 20

Для каждого сочетания материальных параметров, удовлетворяющего неравенствам (18) или (19), существует два угла α_1 и $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, определяемые равенством (16). При α_1 и α_2 ранг системы уравнений (6) равен трем. Ее решение существует лишь при условии обращения в нуль всех определителей (15). Это возможно лишь при $Q = 0$ (см. п. 2.1). В этом случае из уравнений (6) следуют зависимости между деформациями

$$\varepsilon_{22}^{(1)} = -\varepsilon_{22}^{(2)} = -\frac{\varepsilon_{11}(1+g)ctg^2\alpha_k}{1-g}, \quad \varepsilon_{12} = -\frac{\varepsilon_{11}ctg\alpha_k}{1-g}, \quad (k=1,2). \quad (20)$$

Равенства (20) и (5) в сумме составляют пять независимых ограничений на компоненты деформаций в вершине клина. Когда выполняется условие $Q \neq 0$, ранг расширенной матрицы оказывается больше ранга матрицы системы. Уравнения (6) несовместны. В этом случае углы α_1 и α_2 следует считать критическими, так как при приближении сочетания материальных параметров к значению, удовлетворяющему (16), компоненты деформации в вершине клина неограниченно возрастают.

3.2. $\alpha + \beta = \pi / 2$.

Определитель (8) преобразуется к виду

$$\Delta = a \sin^4 \alpha + b \sin^2 \alpha + c, \quad (21)$$

где

$$a = 2(g-1) \left(\frac{1}{1-2v_1} - \frac{g}{1-2v_2} \right), \quad b = \frac{-2(2-v_1-g)}{1-2v_1} - \frac{2g(1-gv_2)}{1-2v_2}, \quad c = \frac{2(1-v_1)}{1-2v_1}.$$

Когда определитель (21) не обращается в нуль, решение уравнений (6) запишется равенствами (9), в которых Δ определяется равенством (21), а Δ_i – формулами

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -2(1-g)Q \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, & \Delta_2 &= 2Q \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha), \\ \Delta_3 &= -2Q \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha), & \Delta_4 &= Q \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (22)$$

НДС в особых точках полностью определено. Коэффициент a в равенстве (21) обращается в нуль в двух случаях: когда $g = 1$ или когда безразмерные параметры задачи связаны соотношением

$$g = \frac{1-2v_2}{1-2v_1}. \quad (23)$$

При $a = 0$ определитель (21) обращается в нуль при условии

$$b \sin^2 \alpha + c = 0. \quad (24)$$

Если $g = 1$, а параметры v_1, v_2 удовлетворяют условию

$$v_2 > \frac{1}{3-2v_1},$$

существует решение α^* уравнения (24). При $\alpha = \alpha^*$ ранг матрицы системы уравнений (6) равен трем. Определители (22) одновременно обращаются в нуль только при $Q = 0$, поэтому возможны случаи:

- 1) $Q \neq 0$. Ранг расширенной матрицы оказывается больше, чем ранг системы (6), эти уравнения несовместны. Угол α^* является критическим углом скрепления элементов 1,2;
- 2) $Q = 0$. Компоненты деформаций при $\alpha = \alpha^*$ в особых точках подчиняются ограничениям

$$\varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = 2\varepsilon_{12} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = -2\varepsilon_{12} \operatorname{tg} \alpha.$$

Когда $g \neq 1$ и коэффициент a обращается в нуль вследствие зависимости (23), уравнение (24) решения относительно α не имеет.

Когда коэффициент a не обращается в нуль, исследование существования решений уравнения (21), подчиненных условию

$$0 < \sin^2 \alpha < 1, \quad (25)$$

проводится в два этапа. Во-первых, в ортогональной системе координат v_1, v_2, g определяются непересекающиеся поверхности, удовлетворяющие условию $b^2 - 4ac = 0$,

$$g = g_i(v_1, v_2), \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (26)$$

определенные на множестве

$$0 < v_1 < 0,5, \quad 0 < v_2 < 0,5. \quad (27)$$

Поверхности (26) упорядочиваются в соответствии с неравенством

$$0 < g_1 < g_2 < g_3 < g_4.$$

Далее изучается существование решения уравнения $\Delta = 0$ (согласованного с условием (25)) в точках поверхностей (26) и в точках (v_1, v_2, g) , находящихся в пространственных областях между плоскостью $g = 0$ и поверхностью $g = g_1(v_1, v_2)$, между смежными поверхностями (26) и выше поверхности $g = g_4(v_1, v_2)$. В результате установлено, что в каждой точке множества (27) существует четыре корня: два корня в области между плоскостью $g = 0$ и поверхностью $g = g_1(v_1, v_2)$ и два корня выше поверхности $g = g_4(v_1, v_2)$. В точках поверхностей $g = g_1(v_1, v_2)$ и $g = g_4(v_1, v_2)$ корни совпадают между собой. Для примера все эти корни в случае $v_1 = 0,4, v_2 = 0,3$ приведены на рис.3.

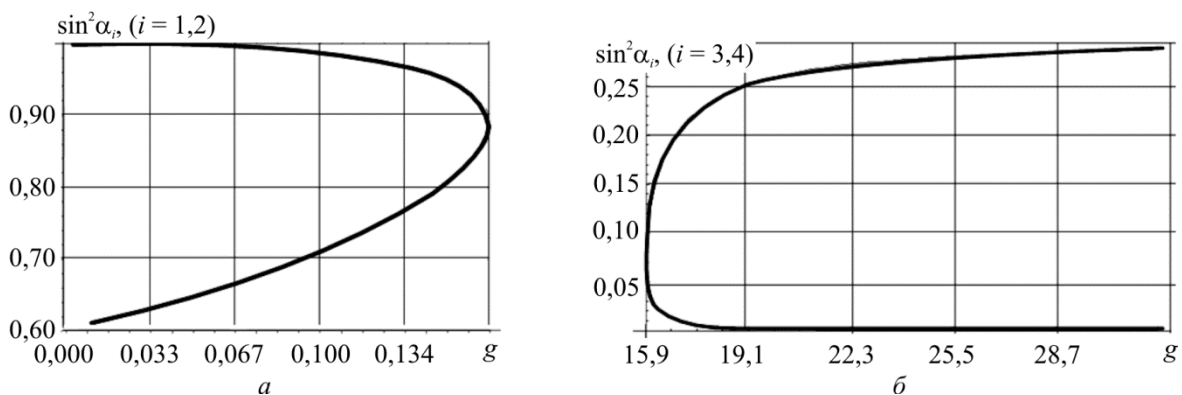


Рис. 3. Корни уравнения (21) в точке $(v_1 = 0,4, v_2 = 0,3)$ в зависимости от параметра g :

a – в области $0 < g < g_1(v_1, v_2)$; b – в области $g > g_4(v_1, v_2)$

Fig. 3. Roots of equation (21) at the point $(v_1 = 0,4, v_2 = 0,3)$ depending on parameter g :

a – in the region of $0 < g < g_1(v_1, v_2)$; b – in the region of $g > g_4(v_1, v_2)$

На поверхности $g = g_1(v_1, v_2)$ $g(0,4; 0,3) = 0,167264$ корни совпадают $\sin^2 \alpha_1 = \sin^2 \alpha_2 = 0,886721$, на поверхности $g = g_4(v_1, v_2)$ $g(0,4; 0,3) = 15,9428$ корни совпадают $\sin^2 \alpha_3 = \sin^2 \alpha_4 = 0,0758924$. Данный пример показывает, что при фиксированных v_1, v_2 корни уравнения (21) существуют не при всех значениях параметра g . Если же сочетание материальных параметров v_1, v_2, g попадает в какую-либо из областей существования корней уравнения $\Delta = 0$, то при $Q \neq 0$ имеется два угла скрепления элементов α_1, α_2 или α_3, α_4 , которые следует считать критическими при температурной нагрузке, так как при таких углах система уравнений (6) оказывается несовместной. Если $Q = 0$, ранг системы уравнений (6) равен трем, и между компонентами деформаций в особых точках оказываются справедливыми зависимости

$$\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{12}(1 - g) \sin 2\alpha, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = 2\varepsilon_{12} \operatorname{ctg} \alpha (\cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha), \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = -2\varepsilon_{12} \operatorname{tg} \alpha (\cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha).$$

3.3. $\alpha + \beta = \pi$, $(0 < \alpha < \pi)$.

Определитель (8) записывается равенством

$$\Delta = -2(1-g)\sin^2 \alpha (W_2 \sin^2 \alpha - V_2), \quad (28)$$

где

$$V_2 = \frac{1-v_1}{1-2v_1} - \frac{g(1-v_2)}{1-2v_2}, \quad W_2 = \frac{1}{1-2v_1} - \frac{g}{1-2v_2}.$$

Определитель (28) обращается в нуль при выполнении равенства $g = 1$ (случай рассмотрен в п. 2.2) или равенства

$$\sin^2 \alpha = \frac{V_2}{W_2}, \quad (g \neq 1). \quad (29)$$

Если ни одно из этих равенств не выполняется, ранг матрицы системы уравнений (6) равен четырем. Она имеет единственное решение вида (9), в котором Δ определяется равенством (28), а определители Δ_i вычисляются по формулам

$$\Delta_1 = -2(1-g)Q \sin^4 \alpha, \quad \Delta_2 = 2(1-g)Q \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \quad \Delta_3 = \Delta_2, \quad \Delta_4 = 0. \quad (30)$$

НДС в особой точке полностью определено.

Изучим существование решения системы уравнений (6) при выполнении равенства (29), которое накладывает ограничения на материальные характеристики

$$0 < V_2 / W_2 < 1. \quad (31)$$

Эти ограничения выполняются, если оказывается справедливой какая-либо из двух групп (32), (33) неравенств

$$\begin{aligned} v_2 < gv_1 + 0,5(1-g), & \quad v_2 < \frac{v_1}{g + 2v_1(1-g)}, \\ v_2 < \frac{v_1(1-2g) - (1-g)}{2v_1(1-g) + g - 2}, & \quad \text{если } g < \frac{2(1-v_1)}{1-2v_1}, \\ v_2 > \frac{v_1(1-2g) - (1-g)}{2v_1(1-g) + g - 2}, & \quad \text{если } g > \frac{2(1-v_1)}{1-2v_1}. \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} v_2 > gv_1 + 0,5(1-g), & \quad v_2 > \frac{v_1}{g + 2v_1(1-g)}, \\ v_2 > \frac{v_1(1-2g) - (1-g)}{2v_1(1-g) + g - 2}, & \quad \text{если } g < \frac{2(1-v_1)}{1-2v_1}, \\ v_2 < \frac{v_1(1-2g) - (1-g)}{2v_1(1-g) + g - 2}, & \quad \text{если } g > \frac{2(1-v_1)}{1-2v_1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Для примера области существования значений углов α , удовлетворяющих уравнению (29), приведены на рис. 4 (серый цвет) в плоскости v_1, v_2 при некоторых фиксированных значениях параметра g .

В каждой точке области, определяемой неравенствами (32), (33), существуют два угла скрепления α_1 и $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, при которых ранг матрицы уравнений (6) равен трем.

Ранг расширенной матрицы зависит от значения Q . Если $Q = 0$, ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы системы. Между компонентами деформации оказываются справедливы зависимости

$$\varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)} = -2\varepsilon_{11} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad \varepsilon_{12} = 0.$$

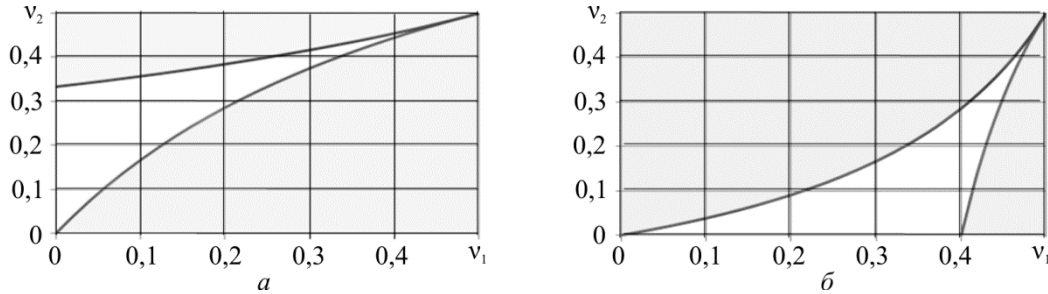


Рис. 4. Области существования решения уравнения (30) для различных значений g :

$$a - g = 0,5; \quad \bar{b} - g = 3$$

Fig. 4. Regions of existence for equation solution (30) are for different values of g :

$$a - g = 0,5; \quad \bar{b} - g = 3$$

При $Q \neq 0$ ранг расширенной матрицы превосходит ранг матрицы системы, уравнения (6) несовместны. Углы α_1 и α_2 являются критическими, так как особые точки в этом случае являются точками сингулярного поведения параметров состояния.

3.4. $\alpha + \beta = 2\pi, \quad (0 < \alpha < 2\pi)$.

Определитель Δ в данном случае принимает вид (28), а $\Delta_i, (i=1, 2, 3, 4)$ – вид (30). Определитель Δ (28) обращается в нуль при $g = 1$ (случай изучен в п. 2.2), при $\sin \alpha = 0$ (случай изучен в п. 2.4) и при выполнении условия (29). В последнем случае вследствие того, что $\alpha = \pi$ находится в области допустимых значений, вторые неравенства в группах (32), (33) не будут строгими. Вместо них получим соответственно

$$v_2 \leq \frac{v_1}{g + 2v_1(1-g)}, \quad v_2 \geq \frac{v_1}{g + 2v_1(1-g)}.$$

Кроме того, для каждого сочетания материальных параметров (v_1, v_2, g) из областей допустимых значений (исключая решение $\alpha = \pi$, изученное в п. 2.4) существуют четыре угла $\alpha_i (i=1, 2, 3, 4)$, связанные равенствами

$$\alpha_1 = \alpha^*, \quad \alpha_2 = \pi - \alpha^*, \quad \alpha_3 = \pi + \alpha^*, \quad \alpha_4 = 2\pi - \alpha^*, \quad \alpha^* = \arcsin \sqrt{\frac{V_2}{W_2}},$$

при которых ранг матрицы системы уравнений (6) равен трем. Эти углы скрепления элементов 1, 2 являются критическими, так как обуславливают сингулярность параметров состояния в особых точках при температурной нагрузке.

4. Пример. Температурное нагружение составного клина с развернутым углом при вершине ($\alpha = \beta = \pi / 2$)

Случай описан в п. 3.3. В особой точке (точке A – вершине клина) (рис. 5) все компоненты деформации известны, они вычисляются по формулам (9) и (5). Количество заданных ограничений в особых точках избыточно, поэтому задача не является классической. Материальные параметры имеют значения: $E_1 = 1,16e11 \text{ Па}$, $\nu_1 = 0,3$, $\omega_1 = 0,11e-4 \text{ град}^{-1}$, $\nu_2 = 0,35$, $\omega_2 = 0,85e-5 \text{ град}^{-1}$. Модуль E_2 варьируется, убывает, приближаясь к критическому значению $E_2^{\text{кр}} = 0,7744e11 \text{ Па}$. При $E_2^{\text{кр}}$ уравнение (29) имеет решения $\alpha^* = \pi / 2$. Решение неклассической задачи при нагрузке $\Delta T = 100^\circ \text{C}$ строилось итерационным конечно-элементным методом, описанным в работе [20]. КЭ-сетка сгущалась к особой точке. Характерный размер 4-угольного 8-узлового КЭ-элемента вблизи нее равнялся 2 мкм. Решение в окрестности особых точек иллюстрируется на рис.6, где приведены напряжения $\sigma_{22}^{(k)}$ ($k=1,2$) в окрестности особых точек при различных E_2 на линии соединения элементов (рис. 6, а) и на линии заделки BC (рис. 6, б).

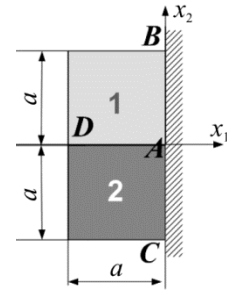


Рис. 5. Составной клин с развернутым углом при вершине, $a = 1 \text{ см}$
Fig. 5. Wedge with vertex angle, $a = 1 \text{ cm}$

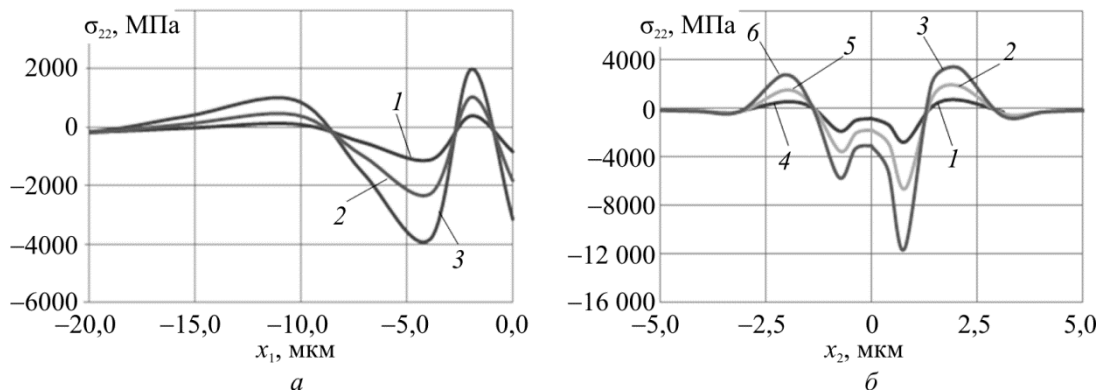


Рис. 6. Напряжения $\sigma_{22}^{(k)}$ ($k=1,2$) в окрестности особых точек:

а – на линии соединения AD $\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$; 1 – $E_2 = 80 \text{ ГПа}$; 2 – $E_2 = 82 \text{ ГПа}$; 3 – $E_2 = 88 \text{ ГПа}$;

б – по защемленному краю CB : 1 – $\sigma_{22}^{(1)}$, $E_2 = 80 \text{ ГПа}$; 2 – $\sigma_{22}^{(1)}$, $E_2 = 82 \text{ ГПа}$;

3 – $\sigma_{22}^{(1)}$, $E_2 = 88 \text{ ГПа}$; 4 – $\sigma_{22}^{(2)}$, $E_2 = 80 \text{ ГПа}$; 5 – $\sigma_{22}^{(2)}$, $E_2 = 82 \text{ ГПа}$; 6 – $\sigma_{22}^{(2)}$, $E_2 = 88 \text{ ГПа}$

Fig. 6. Stresses $\sigma_{22}^{(k)}$ ($k=1,2$) in the regions of singular points: а – at cross line AD $\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$

1 – $E_2 = 80 \text{ ГПа}$; 2 – $E_2 = 82 \text{ ГПа}$; 3 – $E_2 = 88 \text{ ГПа}$; б – along fastened end CB :

1 – $\sigma_{22}^{(1)}$, $E_2 = 80 \text{ ГПа}$; 2 – $\sigma_{22}^{(1)}$, $E_2 = 82 \text{ ГПа}$; 3 – $\sigma_{22}^{(1)}$, $E_2 = 88 \text{ ГПа}$; 4 – $\sigma_{22}^{(2)}$, $E_2 = 80 \text{ ГПа}$;

5 – $\sigma_{22}^{(2)}$, $E_2 = 82 \text{ ГПа}$; 6 – $\sigma_{22}^{(2)}$, $E_2 = 88 \text{ ГПа}$

Выполняются все задаваемые для этих напряжений ограничения. Максимальными напряжения $\sigma_{22}^{(k)}$ ($k=1,2$) оказываются не в особой точке, а в малой ее окрестности. С приближением сочетания материальных параметров к критическому значению напря-

жения неограниченно возрастают. Аналогичные результаты справедливы и для напряжений $\sigma_{11}^{(k)}$, $\sigma_{12}^{(k)}$, ($k = 1, 2$). На рис. 7 представлено решение рассматриваемой задачи для перемещений.

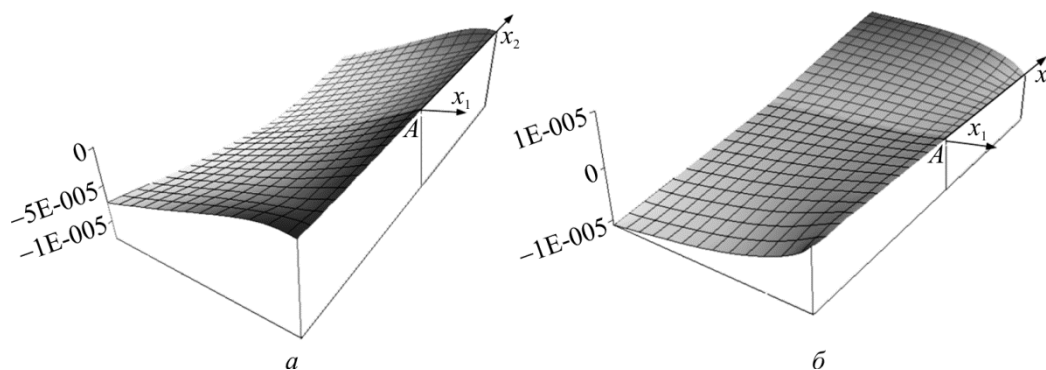


Рис. 7. Поверхности перемещений: $a - u_{x_1}$; $b - u_{x_2}$

Fig. 7. Surfaces of dislocations: $a - u_{x_1}$; $b - u_{x_2}$

Видно, что они удовлетворяют граничным условиям (обращаются в нуль в заделке) и непрерывны на линии соединения составляющих пластинку элементов.

В таблице сравниваются с аналитическим решением напряжения в особых точках, вычисленные итерационным методом и методом конечных элементов (ANSYS).

Сравнение точного и численных решений в особых точках
в элементах 1,2 конструкции ($E_2 = 80$ ГПа)

Comparing point and numerical solutions at singular points
in elements of 1,2 construction ($E_2 = 80$ ГПа)

Напряжения, ГПа	Точное решение		Итерационное		ANSYS-решение	
	Номер элемента					
	1	2	1	2	1	2
$\sigma_{11}^{(k)}$	-5,58	-6,84	-5,62	-6,79	-0,0528	-0,0957
$\sigma_{22}^{(k)}$	-3,11	-3,11	-3,13	-3,09	-0,138	-0,212
$\sigma_{12}^{(k)}$	0,00	0,00	$7,17 \cdot 10^{-7}$	$-5,92 \cdot 10^{-7}$	0,0990	0,146

Напряжения $\sigma_{12}^{(k)}$ ($k = 1, 2$), отвечающие итерационному методу, на семь порядков меньше максимальных напряжений в этих точках, поэтому естественно считать их равными нулю. Из таблицы видно, что итерационное решение задачи с достаточной точностью определяет напряженное состояние в особых точках. Значения всех напряжений непосредственно в особых точках, вычисленные в пакете ANSYS, в разы отличаются от точных значений (см. таблицу). Значительное отклонение ANSYS-решения от точного обусловлено тем, что классический подход не в состоянии построить решение, удовлетворяющее избыточно заданным ограничениям в особых точках. Вне окрестности особых точек радиусом 5–10 характерных размеров макроскопического представительного объема материала ANSYS-решение совпадает с итерационным.

Вычисления выполнялись на суперкомпьютере ТЕСИА-ПГУ научно-образовательного центра параллельных и распределенных вычислений Пермского государственного национального исследовательского университета.

Заключение

В работе показано, что задачи МДТТ с особыми точками образуют новый класс задач, в которых количество заданных в этих точках условий переопределено и зависит от сочетания материальных и геометрических параметров, рассматриваемых элементов конструкций. Предлагаемый подход к изучению НДС в особых точках и их окрестностях позволяет построить задаваемые ограничения, изучить их, адекватно поставить задачу МДТТ; построить решение, согласованное со всеми задаваемыми ограничениями. Такое решение вне малой окрестности особой точки согласуется с решениями, получаемыми классическими методами. Это обстоятельство дает возможность оценить область вблизи особой точки, вне которой справедливо асимптотическое решение. Характерный размер такой области составляет пять-десять характерных размеров макроскопического представительного объема материала деформируемого тела. Проведенное исследование открывает перспективы для разработки методов исследования класса задач МДТТ с избыточно заданными ограничениями. Полученные результаты могут найти применение в механике композитов, механике разрушения и трещин.

Библиографический список

1. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // *J. of App. Mech.* – 1952. – Vol. 19. – P. 526–528.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1967. – 402 с.
3. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // *Прикладная математика и механика.* – 1967. – № 1. – С. 178–186.
4. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // *Тр. ММО.* – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.
5. Bogy D.B. Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction // *Trans. ASME. Ser.E.* – 1971. – Vol. 38. – No. 2. – P. 87–96.
6. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. – 338 с.
7. Аветисян А.Г., Чобанян К.С. Характер напряжений в заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела, нагруженного в условиях плоской задачи теории упругости // *Изв. АН Арм.ССР.* – 1972. – № 6. – С. 13–25.
8. Аветисян А.Г. Исследование поведения напряжений около жестко защемленной вершины составного упругого клина // *Изв. АН Арм.ССР, Сер. Механика.* – 1981. – Т. 34, № 3. – С. 3–12.
9. Аветисян А.Г. Исследования характера напряженного состояния в частично заделанной окрестности края поверхности соединения нагруженного составного тела // *Изв. АН Арм.ССР. Сер. Механика.* – 1972. – Т. 25, № 5. – С. 23–34.
10. Sinclair G. B. Stress singularities in classical elasticity–I: Removal, interpretation and analysis // *App. Mech. Rev.* – 2004. – Vol. 57. – No. 4. – P. 251–297.
11. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity–II: Asymptotic identification // *App. Mech. Rev.* – 2004. – Vol. 57. – No. 4. – P. 385–439.
12. Корепанова Т.О., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические построения собственных решений для изотропных конических тел и их приложения для оценки сингулярности напряжений // *ДАН.* – 2014. – Т. 457, № 3. – С. 286–291. DOI: 10.7868/s0869565214210105
13. Paggi M., Carpintery A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Appl. Mech. Rev.* – 2008. – Vol. 61. – P. 020801–1–22.

14. Андреев А.В. Суперпозиция степенно-логарифмических и степенных сингулярных решений в двумерных задачах теории упругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 5–30.
15. Разложения по функциям Фадля-Папковича в смешанных краевых задачах теории упругости / М.Д. Коваленко, С.Н. Попов, Н.Н. Цыбин, Т.Д. Шуляковская // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13, № 4. – С. 493–518.
16. Особенности напряженного состояния в конечных областях вблизи угловых точек границы / С.В. Галаджиев, О.С. Гоголева, М.Д. Коваленко, Д.В. Трубников // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 53–60.
17. Степанова Л.В., Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М.Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 188–225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12
18. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Нестандартные задачи для однородных элементов конструкций с особенностями в виде клиньев в условиях плоской задачи // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. – 2014. – № 1 (27). – С. 95–109.
19. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Нестандартные задачи для элементов конструкций с особенностью в виде составного пространственного ребра // МКМ. – Рига. – 2015. – Т. 51, № 4. – С. 691–714.
20. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Итерационный конечно-элементный алгоритм исследования напряженного состояния элементов конструкций с особыми точками и его реализация // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 171–187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11

References

1. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension. J. of App. Mech., 1952, vol. 19, pp. 526-528.
2. Ufliand Ia.S. Integral'nye preobrazovaniia v zadachakh teorii uprugosti [Integral transforms in problems of the theory of elasticity]. Moskva.-Leningrad., Izd-vo AN SSSR, 1967, 402 p.
3. Aksentian O.K. Osobennosti napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia plity v okrestnosti rebra [Features of the stress-strain state of the plate in the neighborhood of the edge]. Prikladnaia matematika i mekhanika, 1967, no. 1, pp. 178-186.
4. Kondrat'ev V.A. Kraevye zadachi dlia ellipticheskikh uravnenii v oblastiakh s konicheskimi ili uglovymi tochkami [Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points]. Tr. MMO, 1967, vol. 16, pp. 209-292.
5. Bogy D.B. Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction. Trans. ASME. Ser.E, 1971, vol. 38, no. 2, pp. 87-96.
6. Chobanian K.S. Napriazheniia v sostavnykh uprugikh telakh [The stresses in the composite elastic bodies]. Erevan: Izd-vo AN ArmSSR, 1987, 338 p.
7. Avetisian A.G., Chobanian K.S. Kharakter napriazhenii v zadelannoi okrestnosti kraia poverkhnosti soedineniia sostavnogo tela, nagruzhennogo v usloviakh ploskoi zadachi teorii uprugosti [The character of the stress in the vicinity of the edge surface of the embedded composite body connection, loaded in a plane problem of elasticity theory]. Izv.Arm. SSR, KhKhV, 1972, no. 6, pp. 13-25.
8. Avetisian A.G. Issledovanie povedeniia napriazhenii okolo zhestko zashchemlennoi vershiny sostavnogo uprugogo klina [Investigation of the behavior of stresses near the top of rigidly clamped composite elastic wedge]. Izv. Arm. SSR, Ser. Mekhanika, 1981, vol. 34, no. 3, pp. 3-12.
9. Avetisian A.G. Issledovaniia kharaktera napriazhennogo sostoianiia v chastichno zadelannoi okrestnosti kraia poverkhnosti soedineniia nagruzhennogo sostavnogo tela [Research nature stress state in a partially embedded near an edge surface of a loaded composite body connection]. Izv. Arm. SSR, Ser. Mekhanika, 1972, vol. 25, no. 5, pp. 23-34.

10. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity–I: Removal, interpretation and analysis. *App. Mech. Rev.* 2004, vol. 57, no. 4, pp. 251-297.
11. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity–II: Asymptotic identification. *App. Mech. Rev.* 2004, vol. 57, no. 4, pp. 385-439.
12. Korepanova T.O., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Analiticheskie postroeniia sobstvennykh reshenii dlia izotropnykh konicheskikh tel i ikh prilozheniia dlia otsenki singuliarnosti napriazhenii [Analytical constructions of eigensolutions for isotropic conical bodies and their applications for estimating stress singularity]. *DAN*, 2014, vol. 457, no. 3, pp. 286-291. DOI: 10.7868/s0869565214210105
13. Paggi M., Carpintery A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.*, 2008, vol. 61, pp. 020801-1-22.
14. Andreev A.V. Superposition of power-logarithmic and power singular solution in two-dimensional elasticity problems. *PNRPU Mechanics bulletin.* 2013, no. 1, p. 5-30.
15. Kovalenko M.D., Popov S.N., Tsybin N.N., Shuliakovskaia T.D. Razlozheniia po funktsiiam Fadli-Papkovicha v smeshannykh kraevykh zadachakh teorii uprugosti [Expansions in functions Fadli-Papkovich mixed boundary value problems in the theory of elasticity]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2007, vol. 13, no. 4, pp. 493-518
16. Galadzhiev S.V., Gogoleva O.S., Kovalenko M.D., Trubnikov D.V. Osobennosti napriazhennogo sostoianiia v konechnykh oblastiakh vblizi uglovykh tochek granitsy [Features of the stress state in the finite areas near the corner points of the boundary]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 53-60.
17. Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete asymptotic expansion M. Williams near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane medium. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 4, p. 188-225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12
18. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Nestandartnye zadachi dlia odnorodnykh elementov konstruksii s osobennostiami v vide klin'ev v usloviakh ploskoi zadachi [Custom tasks for homogeneous elements of designs with features in the form of wedges in a plane problem]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 1 (27), pp. 95-109.
19. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Nestandartnye zadachi dlia elementov konstruksii s osobennost'iu v vide sostavnogo prostranstvennogo rebra [Custom tasks for structural elements with a feature in the form of a composite spatial ribs]. *MKM*, – Riga, 2015, vol. 51, no. 4, pp. 691-714.
20. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Iterative finite element algorithm and its implementation for stress state of structural elements with singular points. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 4, p. 171-187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11