

Вестяк В.А., Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В. Нестационарные осесимметричные волны в электромагнитоупругом пространстве со сферической полостью // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 3. – С. 28–46. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.02

Vestyak V.A., Kuznetsova E.L., Tarlakovski D.V. Non-stationary axisymmetric waves in electromagnetoelastic space with a spherical cavity. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 3. Pp. 28–46. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.02



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.3.02

УДК 539.3

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

В.А. Вестяк<sup>1</sup>, Е.Л. Кузнецова<sup>1</sup>, Д.В. Тарлаковский<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 3 июня 2016 г.  
Принята: 10 сентября 2016 г.  
Опубликована: 30 сентября 2016 г.

#### Ключевые слова:

нестационарная связанная электромагнитоупругость, пространство, сферическая полость, ряды, преобразование Лапласа, функции Грина

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается связанная нестационарная задача о распространении осесимметричных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве. Предполагается, что среда является однородным изотропным проводником. Используются линейные уравнения движения упругой среды с учетом линеаризованных сил Лоренца, а также уравнения Максвелла совместно с линеаризованным обобщенным законом. Начальные условия нулевые, на границе полости заданы перемещения и тангенциальная компонента напряженности электрического поля.

Для решения искомые функции раскладываются в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, а также в ряды по малому параметру, характеризующему связь механических и электромагнитных полей. Кроме того, применяется преобразование Лапласа по времени. В результате получается рекуррентная по малому параметру последовательность краевых задач, решение которых представляется в интегральной форме с ядрами в виде объемных и поверхностных функций Грина.

Изображения функций Грина найдены в явном виде. Их «упругая» часть с помощью связи модифицированных функций Бесселя с элементарными функциями приводится к сумме произведений рациональных функций параметра преобразования Лапласа на экспоненты, что позволяет находить их оригиналы точно с помощью соответствующих теорем операционного исчисления. «Электромагнитная» часть функций Грина строится в квазистатическом приближении.

В результате в пространстве оригиналов построена разрешающая система рекуррентных уравнений, позволяющая находить перемещения и все компоненты электромагнитного поля. При вычислении входящих в нее интегралов используются квадратурные формулы. Даны примеры расчетов. Приведено численное исследование сходимости рядов по малому параметру.

© ПНИПУ

© **Вестяк Владимир Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: v.a.vestyak@mail.ru  
**Кузнецова Елена Львовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры, e-mail: vida\_ku@mail.ru  
**Тарлаковский Дмитрий Валентинович** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: tdvhome@mail.ru

**Vladimir A. Vestyak** – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: v.a.vestyak@mail.ru  
**Elena L. Kuznetsova** – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: vida\_ku@mail.ru  
**Dmitriy V. Tarlakovski** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: tdvhome@mail.ru

## NON-STATIONARY AXISYMMETRIC WAVES IN ELECTROMAGNETOELASTIC SPACE WITH A SPHERICAL CAVITY

V.A. Vestyak<sup>1</sup>, E.L. Kuznetsova<sup>1</sup>, D.V. Tarlakovski<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 3 June 2016

Accepted: 10 September 2016

Published: 30 September 2016

#### Keywords:

non-stationary associated electromagnetoelasticity, space, spherical cavity, the ranks of the Laplace transform, the Green's function

### ABSTRACT

We consider the associated non-stationary problem of propagation of axisymmetric disturbances from a spherical cavity in electromagnetoelastic space. It is assumed that the medium is a homogeneous isotropic conductor. Linear equations of motion of an elastic medium are used taking into account the linearized Lorentz forces, as well as Maxwell's equations, together with the linearized generalized law. The initial conditions are zero, at the boundary of the cavity defined displacement and the tangential component of the electric field.

The desired functions are arranged in series of Legendre and Gegenbauer polynomials, as well as in series according to a small parameter characterizing the connection of mechanical and electromagnetic fields. Apart from that the applicable Laplace transform in time is used. The result is a recurrence of the small parameter sequence of boundary value problems, the solution of which is represented in the integral form with kernels in the form of volume and surface Green's functions.

Images of Green's functions are found in an explicit manner. Their "elastic" part due to the relation between the modified Bessel functions and elementary functions is reduced to the sum of products of rational functions of the parameter of the Laplace transform to the exponent that lets you find exactly the originals using the corresponding theorems of operational calculus. The "Electromagnetic" part of the Green's function is being constructed in a quasi-static approximation. As a result, in the space of the original resolution of the system is became possible to build recurrence equations which allows finding and moving all the components of the electromagnetic field. In calculating its constituent integrals quadrature formulas are used. The examples of computations are provided. The numerical study of the convergence of series in the small parameter is presented.

© PNRPU

---

## Введение

В настоящее время при проектировании различных объектов новой техники актуальными являются вопросы взаимодействия полей различной физической природы. Во многих случаях, особенно для изделий аэрокосмической отрасли, возникает необходимость учета взаимовлияния электромагнитных и механических полей. Основные результаты в этом направлении получены для стационарных процессов (см., например, [1–4]). Численно-аналитические подходы к решению стационарных задач размерностью больше единицы, в том числе для тел со сферическими границами приведены, например, в [5]. Точное решение задачи о статическом воздействии магнитного поля на тело со сферической полостью получено в работе [6].

Соответствующие нестационарные задачи исследованы в основном в одномерном случае при частичном учете влияния электромагнитного поля. Нахождение точных решений нестационарных задач приобретает особую ценность в связи с тем, что численное обращение преобразования Лапласа по времени, к которому часто прибегают при решении, является некорректной задачей. В связи с этим, как показано, например, в [7], представление решения в виде ряда Лорана по параметру преобразования Лапласа в окрестности бесконечно удаленной точки позволяет получить фундаментальное решение для пространства на начальном

промежутке времени. Основные принципы построения таких решений применительно к задачам нестационарной линейной электроупругости изложены в работе [8]. Ими можно эффективно воспользоваться, например, при использовании метода граничных элементов. В [9] приведено решение одномерной, но уже связанной задачи для толстостенной сферы в случае воздействия температуры на поверхности. Явные решения для пространства со сферической полостью для случая задания магнитного поля на границе сферы, причём в случае зависимости свойств материала от температуры, приводятся в работе [10]. Вопросы нахождения аналитических решений нестационарных задач для тел сферической формы, взаимодействующих с различными средами, в том числе с учётом связанности полей и наличием пьезоэффектов, исследованы в работах [11–15]. В работах [16–18] получено решение связанной нестационарной задачи электромагнитоупругости о распространении радиальных возмущений в толстостенной сферической оболочке и пространстве со сферической полостью.

Таким образом, двумерные нестационарные задачи, в которых бы учитывалась связь электромагнитных и механических полей, в настоящее время изучены недостаточно, не говоря уже о получении точных решений подобного рода проблем. Количество публикаций, посвященных исследованию подобных двумерных задач, сравнительно мало. Например, в статье [19] дано решение лишь одной составляющей этой проблемы – определение нестационарного электромагнитного поля по заданному полю перемещений в пространстве со сферической полостью. А в работе [20] построено решение второй части этого вопроса – определение напряженно-деформированного состояния той же области, заполненной упругой средой и находящейся под действием объемных сил, под которыми можно понимать возмущения, создаваемые внешним электромагнитным полем.

В данной статье для этого геометрического объекта предлагается решение полной связанной нестационарной двумерной задачи электромагнитоупругости. В настоящее время авторам не известны работы, посвящённые решению двумерных связанных задач электромагнитоупругости в нестационарной постановке применительно к пространству со сферической полостью. Предложенный метод позволяет находить точные решения подобного рода задач для любого момента времени, а не только на начальном этапе и в одномерном случае, как это предлагается некоторыми авторами в предложенном выше обзоре.

## 1. Постановка задачи

В сферической системе координат  $r, \theta, \vartheta$  ( $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, -\pi < \vartheta \leq \pi$ ) рассматривается заполненное изотропным проводником пространство со сферической полостью радиусом  $r_0$ . Осесимметричное движение среды описывается линеаризованной моделью [21]. Она включает в себя уравнения движения

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \frac{\partial I_1}{\partial r} + \frac{1}{\eta^2} \left\{ \Delta u - \frac{2}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta) + u \right] \right\} + F_r, \\ \ddot{v} &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \frac{\partial I_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\eta^2} \left[ \Delta v + \frac{1}{r^2} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right) \right] + F_\theta, \\ \Delta &= \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) \right], \quad I_1 = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + 2u + v \operatorname{ctg} \theta \right); \end{aligned} \quad (1)$$

уравнения Максвелла

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -\dot{H}, \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial(rH)}{\partial r} = \eta_e^2 (\gamma j_\theta + \dot{E}_\theta), \quad (2)$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(H \sin \theta)}{\partial \theta} = \eta_e^2 (\gamma j_r + \dot{E}_r), \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta E_\theta)}{\partial \theta} = \rho_e$$

и линеаризованные относительно начального состояния (его компоненты обозначаются дополнительным нижним индексом «0») формулы для радиальной и тангенциальной координат силы Лоренца и обобщенный закон Ома [22]:

$$F_r = \alpha [\rho_{e0} E_r + \rho_e E_{0r} + \gamma (j_{0\theta} H + j_\theta H_0)], \quad (3)$$

$$F_\theta = \alpha [\rho_{e0} E_\theta + \rho_e E_{0\theta} - \gamma (j_{0r} H + j_r H_0)];$$

$$j_r = E_r + H_0 \dot{v} + \rho_{e0} \dot{u} / \gamma, \quad j_\theta = E_\theta - H_0 \dot{u} + \rho_{e0} \dot{v} / \gamma. \quad (4)$$

Здесь  $u$  и  $v$ ,  $E_r$  и  $E_\theta$ ,  $j_r$  и  $j_\theta$  – радиальные и тангенциальные координаты векторов перемещения, напряженности электрического поля, плотности электрического тока;  $H$  – ненулевая координата напряженности магнитного поля;  $\rho_e$  – плотность поверхностных зарядов; точками обозначены производные по времени.

В формулах (1)–(4) и далее использованы следующие безразмерные параметры (при одинаковом начертании их размерные аналоги обозначены штрихом):

$$r = \frac{r'}{L}, \quad r_0 = \frac{r'_0}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad v = \frac{v'}{L}, \quad H = \frac{H' \mu_e c_1}{c E_*}, \quad \rho_e = \frac{4\pi \rho'_e L}{\varepsilon E_*},$$

$$E_r = \frac{E'_r}{E_*}, \quad E_\theta = \frac{E'_\theta}{E_*}, \quad j_r = \frac{j'_r}{\sigma E_*}, \quad j_\theta = \frac{j'_\theta}{\sigma E_*}, \quad F_r = \frac{F'_r L}{\lambda + 2\mu}, \quad F_\theta = \frac{F'_\theta L}{\lambda + 2\mu},$$

$$\eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad \eta_e = \frac{c_1 \sqrt{\mu_e \varepsilon}}{c}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon E_*^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)}, \quad \gamma = \frac{4\pi \sigma L}{\varepsilon c_1}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

где  $t$  – размерное время;  $L$  и  $E_*$  – некоторые характерные линейный размер и напряженность электрического поля;  $\rho$  и  $\lambda$ ,  $\mu$  – плотность и упругие постоянные Ламе среды;  $c_1$  и  $c_2$  – скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига;  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  и  $\mu_e$  – коэффициенты электропроводности, диэлектрической и магнитной проницаемости;  $c$  – скорость света.

В начальный момент времени среда является невозмущенной:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = v|_{\tau=0} = \dot{v}|_{\tau=0} = E_r|_{\tau=0} = \dot{E}_r|_{\tau=0} = E_\theta|_{\tau=0} = \dot{E}_\theta|_{\tau=0} = H|_{\tau=0} = \dot{H}|_{\tau=0} = 0. \quad (5)$$

Искомые функции предполагаются ограниченными. Поскольку методы решения задач при всех возможных граничных условиях на поверхности полости идентичны, то далее ограничимся вариантом задания кинематических возмущений и напряженности электрического поля:

$$u|_{r=r_0} = U_0(\tau, \theta), \quad v|_{r=r_0} = V_0(\tau, \theta), \quad E_\theta|_{r=r_0} = e_{00}(\tau, \theta). \quad (6)$$

Отметим, что из уравнений электромагнитодинамики (2) и (4) вытекают следующие соотношения для компонент векторов напряженностей магнитного и электрического полей, а также для плотности зарядов:

$$\eta_e^2(\ddot{H} + \gamma\dot{H}) = \Delta\dot{H} - \frac{\dot{H}}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\eta_e^2}{r} \left[ \frac{\partial(r\rho_{e0}\dot{v})}{\partial r} - \frac{\partial(\rho_{e0}\dot{u})}{\partial \theta} \right] - \frac{\gamma\eta_e^2}{r} \left[ \frac{\partial(r\dot{u}H_0)}{\partial r} + \frac{\partial(\dot{v}H_0)}{\partial \theta} \right]; \quad (7)$$

$$\eta_e^2(\ddot{E}_r + \gamma\dot{E}_r) = N_{11}(E_r) + N_{12}(E_\theta) - \eta_e^2(\rho_{e0}\dot{u} + \gamma H_0\dot{v}), \quad N_{11} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right),$$

$$\eta_e^2(\ddot{E}_\theta + \gamma\dot{E}_\theta) = N_{21}(E_r) + N_{22}(E_\theta) + \eta_e^2(\gamma H_0\dot{u} - \rho_{e0}\dot{v}), \quad N_{21} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}, \quad (8)$$

$$N_{12} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right], \quad N_{22} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right);$$

$$\dot{\rho}_e + \gamma\rho_e = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2(\rho_{e0}\dot{u} + \gamma H_0\dot{v})] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [(\rho_{e0}\dot{v} - \gamma H_0\dot{u}) \sin \theta]. \quad (9)$$

Далее будем полагать, что начальное электромагнитное поле является стационарным, радиальным и удовлетворяет условиям

$$E_{0r} = E_0(r), \quad E_{0\theta} = H_0 \equiv 0, \quad \rho_{e0} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_{0r})}{\partial r}. \quad (10)$$

## 2. Представление решения в виде рядов

Решение начально-краевой задачи (1)–(6) представляем в виде рядов по полиномам Лежандра  $P_n(x)$  и Гегенбауэра  $C_{n-1}^{3/2}(x)$  [23]:

$$\begin{pmatrix} u \\ E_r \\ \rho_e \\ F_r \\ j_r \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ E_{rn} \\ \rho_n \\ F_{rn} \\ j_{rn} \end{pmatrix} P_n(\cos \theta), \quad \begin{pmatrix} v \\ E_\theta \\ H \\ F_\theta \\ j_\theta \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} v_n \\ E_{\theta n} \\ H_n \\ F_{\theta n} \\ j_{\theta n} \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \quad (11)$$

Тогда с учетом (10) соотношения (1), (3), (4) и (7)–(9) переходят в следующие равенства для коэффициентов этих рядов:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n &= l_{11n}(u_n) + l_{12n}(v_n) + F_{rn} \quad (n \geq 0), \quad \ddot{v}_n = l_{21n}(u_n) + l_{22n}(v_n) + F_{\theta n} \quad (n \geq 1), \\ l_{11n}(u) &= \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \left[ \eta^{-2} n(n+1) + 2 \right] u \right\}, \\ l_{22n}(v) &= \frac{1}{r^2} \left[ \eta^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) - n(n+1)v \right], \\ l_{21n}(u) &= -\frac{1}{r^2} \left[ (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial(ru)}{\partial r} + (1 + \eta^{-2})u \right], \\ l_{12n}(v) &= -n(n+1) \left[ l_{21n}(v) + (3 + \eta^{-2}) \frac{v}{r^2} \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$F_{rn} = \alpha(\rho_{e0}E_{rn} + \rho_n E_0), \quad F_{\theta n} = \alpha(\rho_{e0}E_{\theta n} - \gamma E_0 H_n); \quad (13)$$

$$j_{rn} = E_{rn} + \rho_{e0} \dot{u}_n / \gamma, \quad j_{\theta n} = E_{\theta n} + \rho_{e0} \dot{v}_n / \gamma; \quad (14)$$

$$\eta_e^2 (\ddot{H}_n + \gamma \dot{H}_n) = \Delta_n \dot{H}_n + \eta_e^2 l_H (\ddot{u}_n, \ddot{v}_n) \quad (n \geq 1),$$

$$\Delta_n = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2}, \quad l_H(u, v) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r \rho_{e0} v)}{\partial r} + \rho_{e0} u \right]; \quad (15)$$

$$\eta_e^2 (\dot{E}_{\theta n} + \gamma E_{\theta n}) = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r H_n)}{\partial r} - \eta_e^2 \rho_{e0} \dot{v}_n \quad (n \geq 1),$$

$$\eta_e^2 (\dot{E}_{rn} + \gamma E_{rn}) = \frac{n(n+1)}{r} H_n - \eta_e^2 \rho_{e0} \dot{u}_n; \quad (16)$$

$$\dot{\rho}_n + \gamma \rho_n = -l_{np}(\dot{u}_n, \dot{v}_n), \quad l_{np}(u, v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \rho_{e0} u)}{\partial r} + \frac{n(n+1)}{r} \rho_{e0} v. \quad (17)$$

Соответствующие начальные условия вытекают из (5):

$$u_n|_{\tau=0} = \dot{u}_n|_{\tau=0} = E_{nr}|_{\tau=0} = \dot{E}_{nr}|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 0),$$

$$v_n|_{\tau=0} = \dot{v}_n|_{\tau=0} = E_{n\theta}|_{\tau=0} = \dot{E}_{n\theta}|_{\tau=0} = H_n|_{\tau=0} = \dot{H}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 1). \quad (18)$$

При этом граничные условия (6) с учетом разложений

$$U_0 = \sum_{n=0}^{\infty} U_{0n} P_n(\cos \theta), \quad V_0 = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} V_{0n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \quad e_{00}(\tau, \theta) = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} e_{00n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta)$$

и первого соотношения в (16) переходят в следующие равенства:

$$v_n|_{r=r_0} = V_{0n}(\tau), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(r H_n)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\eta_e^2 h_0 [V_{0n}(\tau), e_{00}(\tau)] \Big|_{r=r_0} \quad (n \geq 1),$$

$$u_n|_{r=r_0} = U_{0n}(\tau) \quad (n \geq 0), \quad h_0(v, e) = \rho_{e0} \dot{v} + \dot{e} + \gamma e.$$

К ним добавляются условия ограниченности искомых функций.

Для решения начально-краевых задач (12)–(19) используем преобразование Лапласа по времени ( $s$  – его параметр, верхний индекс « $L$ » соответствует изображению) [24]. При этом разрешающие уравнения (12) и (15) с учетом (13) трансформируются так:

$$s^2 u_n^L = l_{11n}(u_n^L) + l_{12n}(v_n^L) + \alpha g_u(E_{rn}^L, \rho_n^L) \quad (n \geq 0), \quad g_u(E, \rho) = \rho_{e0} E + E_0 \rho, \quad (20)$$

$$s^2 v_n^L = l_{21n}(u_n^L) + l_{22n}(v_n^L) + \alpha g_v(E_{\theta n}^L, H_n^L) \quad (n \geq 1), \quad g_v(E, H) = \rho_{e0} E - \gamma E_0 H;$$

$$s_e^2 \eta_e^2 H_n^L = \Delta_n H_n^L + \eta_e^2 s l_H(u_n^L, v_n^L) \quad (n \geq 1), \quad s_e = \sqrt{s(s + \gamma)}. \quad (21)$$

Изображения коэффициентов других компонент электромагнитного поля и граничные условия согласно (16), (17) и (19) определяются следующим образом:

$$\eta_e^2 (s + \gamma) E_{\theta n}^L = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r H_n^L)}{\partial r} - \eta_e^2 s \rho_{e0} v_n^L \quad (n \geq 1),$$

$$\eta_e^2 (s + \gamma) E_{rn}^L = \frac{n(n+1)}{r} H_n^L - \eta_e^2 s \rho_{e0} u_n^L; \quad (22)$$

$$(s + \gamma)\rho_n^L = -s l_{np} (u_n^L, v_n^L); \quad (23)$$

$$v_n^L \Big|_{r=r_0} = V_{0n}^L(s), \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_n^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\eta_e^2 h_0^L [V_{0n}^L(s), e_{00n}^L(s)] \Big|_{r=r_0} \quad (n \geq 1), \quad (24)$$

$$u_n^L \Big|_{r=r_0} = U_{0n}^L(s) \quad (n \geq 0), \quad h_0^L(v, e) = s\rho_{e0}v + (s + \gamma)e.$$

К ним опять же добавляются условия ограниченности изображений.

Как показано в [16], аналитически найти оригиналы решения краевых задач (20)–(24) даже при  $n = 0$  невозможно. Поэтому будем использовать разложения искомых функций в степенные ряды по малому параметру  $\alpha$ :

$$u_n(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \quad v_n(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} v_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \quad H_n(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} H_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \quad (25)$$

$$\rho_n(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \quad E_{rn}(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{rnm}(r, \tau) \alpha^m, \quad E_{0n}(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{0nm}(r, \tau) \alpha^m.$$

Подставляя изображения по Лапласу этих рядов в (20)–(24), приходим к следующим соотношениям:

при  $n = 0$

$$s^2 u_{00}^L = l_{110}(u_{00}^L); \quad (26)$$

$$s^2 u_{0m}^L = l_{110}(u_{0m}^L) + g_u(E_{r0,m-1}^L, \rho_{0,m-1}^L) \quad (m \geq 1); \quad (27)$$

$$s_e^2 E_{r0m}^L = -s^2 \rho_{e0} u_{0m}^L \quad (m \geq 0); \quad (28)$$

$$(s + \gamma)\rho_{0m}^L = -\frac{s}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho_{e0} u_{0m}^L)}{\partial r}; \quad (29)$$

при  $n \geq 1$

$$s^2 u_{n0}^L = l_{11n}(u_{n0}^L) + l_{12n}(v_{n0}^L), \quad s^2 v_{n0}^L = l_{21n}(u_{n0}^L) + l_{22n}(v_{n0}^L); \quad (30)$$

$$s^2 u_{nm}^L = l_{11n}(u_{nm}^L) + l_{12n}(v_{nm}^L) + g_u(E_{rn,m-1}^L, \rho_{n,m-1}^L), \quad (31)$$

$$s^2 v_{nm}^L = l_{21n}(u_{nm}^L) + l_{22n}(v_{nm}^L) + g_v(E_{0n,m-1}^L, H_{n,m-1}^L) \quad (m \geq 1);$$

$$s_e^2 \eta_e^2 H_{nm}^L = \Delta_n H_{nm}^L + \eta_e^2 s l_H(u_{nm}^L, v_{nm}^L); \quad (32)$$

$$\eta_e^2 (s + \gamma) E_{0nm}^L = -\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_{nm}^L)}{\partial r} - \eta_e^2 s \rho_{e0} v_{nm}^L, \quad \eta_e^2 (s + \gamma) E_{rnm}^L = \frac{n(n+1)}{r} H_{nm}^L - \eta_e^2 \rho_{e0} u_{nm}^L; \quad (33)$$

$$(s + \gamma)\rho_{nm}^L = -s l_{np}(u_{nm}^L, v_{nm}^L). \quad (34)$$

Соответствующие граничные условия вытекают из (24) и разложений (25):

$$u_{n0}^L \Big|_{r=r_0} = U_{0n}^L(s) \quad (n \geq 0), \quad v_{n0}^L \Big|_{r=r_0} = V_{0n}^L(s) \quad (n \geq 1); \quad (35)$$

$$u_{nm}^L \Big|_{r=r_0} = v_{nm}^L \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (n \geq 0, m \geq 1), \quad v_{nm}^L \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1); \quad (36)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_{n0}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\eta_e^2 h_0^L [V_{0n}^L(s), e_{00n}^L(s)] \quad (n \geq 1); \quad (37)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_{nm}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1). \quad (38)$$

Соотношения (26)–(38) являются рекуррентной по индексу  $m$  последовательностью краевых задач относительно ограниченных функций.

### 3. Интегральные представления решения

Задача (26), (30), (35) является чисто упругой. Поскольку эти вопросы подробно исследованы в работе [25], далее в граничных условиях (6) положим, что

$$U_0(\theta, \tau) \equiv 0, V_0(\theta, \tau) \equiv 0.$$

При этом эта задача становится однородной. Следовательно, ее решение тривиальное:

$$u_{n0}(r, \tau) \equiv 0, v_{n0}(r, \tau) \equiv 0 \quad (n \geq 0). \quad (39)$$

Решение же задачи (27), (31), (36) записываем в интегральном виде ( $m \geq 1$ ):

$$u_{0m}^L(r, s) = \int_{r_0}^{\infty} G_{uu0}^L(r, \xi, s) f_{u0,m-1}^L(\xi, s) d\xi; \quad (40)$$

$$u_{nm}^L(r, s) = \int_{r_0}^{\infty} G_{uun}^L(r, \xi, s) f_{un,m-1}^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{uvn}^L(r, \xi, s) f_{vn,m-1}^L(\xi, s) d\xi, \quad (41)$$

$$v_{nm}^L(r, s) = \int_{r_0}^{\infty} G_{vun}^L(r, \xi, s) f_{un,m-1}^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{vvn}^L(r, \xi, s) f_{vn,m-1}^L(\xi, s) d\xi \quad (n \geq 1),$$

где

$$f_{un,m-1}^L(\xi, s) = g_u [E_{rn,m-1}^L(\xi, s), \rho_{n,m-1}^L(\xi, s)], f_{vn,m-1}^L(\xi, s) = g_v [E_{\theta n,m-1}^L(\xi, s), H_{n,m-1}^L(\xi, s)].$$

Ядра этих представлений – функции Грина краевых задач, соответствующих уравнениям (27), (31) и граничным условиям (36), а именно ограниченные решения следующих задач ( $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака):

$$s^2 G_{uu0}^L = l_{110} (G_{uu0}^L) + \delta(r - \xi), G_{uu0}^L \Big|_{r=r_0} = 0;$$

$$s^2 G_{uun}^L = l_{11n} (G_{uun}^L) + l_{12n} (G_{vun}^L) + \delta(r - \xi), s^2 G_{vun}^L = l_{21n} (G_{uun}^L) + l_{22n} (G_{vun}^L),$$

$$G_{uun}^L \Big|_{r=r_0} = G_{vun}^L \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (n \geq 1);$$

$$s^2 G_{uvn}^L = l_{11n} (G_{uvn}^L) + l_{12n} (G_{vvn}^L), s^2 G_{vvn}^L = l_{21n} (G_{uvn}^L) + l_{22n} (G_{vvn}^L) + \delta(r - \xi),$$

$$G_{uvn}^L \Big|_{r=r_0} = G_{vvn}^L \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (n \geq 1).$$



Эти функции найдены в [20] и имеют следующий вид ( $H(x)$  – функция Хевисайда):

$$\begin{aligned} G_{uum}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + \tilde{G}_{uum}^L(\xi, r, s)H(r - \xi) \right], \\ G_{vun}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + \tilde{G}_{vun}^L(\xi, r, s)H(r - \xi) \right]; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} G_{ivn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 n(n+1) \left[ \tilde{G}_{ivn}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + \tilde{G}_{ivn}^L(\xi, r, s)H(r - \xi) \right], \\ G_{vvn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + \tilde{G}_{vvn}^L(\xi, r, s)H(r - \xi) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s) &= \frac{F_{uum}^{(0)}(s)}{Z_n(s)}, \quad \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) = \frac{F_{vun}^{(0)}(s)}{Z_n(s)}, \quad \tilde{G}_{ivn}^L(r, \xi, s) = \frac{F_{ivn}^{(0)}(s)}{Z_n(s)}, \\ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) &= \frac{F_{vvn}^{(0)}(s)}{Z_n(s)}, \quad Z_n(s) = 2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2} s^{2n+3} D_n(r_0 s, r_0 s). \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} F_{uum}^{(0)}(s) &= e^{\eta_+ r_0 s} \left[ \eta^{2n+1} R_{n1}(\xi s) L_{n11}(rs, r_0 s) e^{-\xi s} - n(n+1) R_{n0}(\eta \xi s) L_{n12}(rs, r_0 s) e^{-\eta \xi s} \right], \\ F_{vun}^{(0)}(s) &= e^{\eta_+ r_0 s} \left[ \eta^{2n+1} R_{n1}(\xi s) L_{n21}(rs, r_0 s) e^{-\xi s} - R_{n0}(\eta \xi s) L_{n22}(rs, r_0 s) e^{-\eta \xi s} \right], \\ F_{ivn}^{(0)}(s) &= e^{\eta_+ r_0 s} \left[ \eta^{2n+1} R_{n0}(\xi s) L_{n11}(rs, r_0 s) e^{-\xi s} - R_{n3}(\eta \xi s) L_{n12}(rs, r_0 s) e^{-\eta \xi s} \right], \\ F_{vvn}^{(0)}(s) &= e^{\eta_+ r_0 s} \left[ n(n+1) \eta^{2n+1} R_{n0}(\xi s) L_{n21}(rs, r_0 s) e^{-\xi s} - R_{n3}(\eta \xi s) L_{n22}(rs, r_0 s) e^{-\eta \xi s} \right]; \\ L_{n11}(x, y) &= (-1)^n \left[ R_{n3}(\eta y) E_{11n}(x, y) - n(n+1) R_{n0}(\eta y) E_{10n}(x, y) \right] e^{-\eta y} + \\ &\quad + 2n(n+1) y^{2n+1} R_{n0}(\eta x) e^{-\eta x}, \\ L_{n12}(x, y) &= (-1)^n \left[ R_{n1}(y) E_{30n}(\eta y, \eta x) + n(n+1) R_{n0}(y) E_{00n}(\eta x, \eta y) \right] e^{-y} - \\ &\quad - 2\eta^{2n+1} y^{2n+1} R_{n1}(x) e^{-x}, \\ L_{n21}(x, y) &= (-1)^{n+1} \left[ R_{n3}(\eta y) E_{10n}(y, x) + n(n+1) R_{n0}(\eta y) E_{00n}(x, y) \right] e^{-\eta y} + \\ &\quad + 2y^{2n+1} R_{n3}(\eta x) e^{-\eta x}, \\ L_{n22}(x, y) &= (-1)^n \left[ n(n+1) R_{n0}(y) E_{30n}(\eta x, \eta y) - R_{n1}(y) E_{33n}(\eta x, \eta y) \right] e^{-y} - \\ &\quad - 2n(n+1) \eta^{2n+1} y^{2n+1} R_{n0}(x) e^{-x}; \\ D_n(x, y) &= R_{n1}(x) R_{n3}(\eta y) - n(n+1) R_{n0}(x) R_{n0}(\eta y), \quad R_{n3}(z) = R_{n1}(z) - R_{n0}(z), \\ R_{n1}(z) &= R_{n+1,0}(z) - n R_{n0}(z), \quad R_{n0}(z) = \sum_{k=0}^n A_{nk} z^{n-k}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{2^k (n-k)! k!}. \end{aligned}$$

Отметим, что числитель и знаменатель дробей в (44) являются экспоненциальным многочленом и просто многочленом аргумента  $s$  соответственно. Подробный анализ этих формул показывает, что степени числителей  $F_{uum}^{(0)}(s), F_{vun}^{(0)}(s)$  и  $F_{vun}^{(0)}(s), F_{ivn}^{(0)}(s)$  меньше степени знаменателя соответственно на единицу и на двойку, что позволяет точно находить их оригиналы с помощью методов компьютерной алгебры и теорем операционного исчисления.

Также в интегральном виде при  $n \geq 1$  и  $m > 0$  записывается решение задачи (32), (38):

$$H_{nm}^L(r, s) = -\eta_e^2 s \int_{r_0}^{\infty} G_{Hn}^L(r, \xi, s) l_H [u_{nm}^L(\xi, s), v_{nm}^L(\xi, s)] d\xi. \quad (45)$$

Здесь  $G_{Hn}^L$  – соответствующая объемная функция Грина, а именно ограниченное решение следующей краевой задачи:

$$\Delta_n G_{Hn}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn}^L = \delta(r - \xi), \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn}^L)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0.$$

Решение задачи (21) при  $m = 0$ , (37) с учетом (39) имеет следующий вид:

$$H_{n0}^L(r, s) = -\eta_e^2 (s + \gamma) G_{Hn0}^L(r, s) e_{00n}^L(s), \quad (46)$$

где  $G_{Hn0}^{LF}$  – поверхностная функция Грина, т.е. ограниченное решение следующей краевой задачи:

$$\Delta_n G_{Hn0}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn0}^L = 0, \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn0}^L)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 1.$$

Функции  $G_{Hn}^L$  и  $G_{Hn0}^{LF}$ , а также их оригиналы в квазистатическом приближении при  $\eta_e = 0$  найдены в [19] и имеют следующий вид:

$$G_{Hn}^L(r, \xi, s) = G_{Hn}^c(r, \xi) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \tilde{G}_{Hn}^c(\xi, r) H(r - \xi) \right], \quad (47)$$

$$\tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) = -\frac{\beta_n(r_0, r)}{n(2n+1)\xi^{n+1}r^{n+1}}, \beta_n(x, y) = (n+1)x^{2n+1} + ny^{2n+1};$$

$$G_{Hn0}^L(r, s) = G_{Hn0}^c(r) = -\frac{r_0^{n+2}}{nr^{n+1}}.$$

Формулы для коэффициентов рядов изображений координат напряженности электрического поля следуют из (22), (45) и (46):

$$E_{rn0}^L(r, s) = -\frac{n(n+1)}{r} G_{Hn0}^c(r) e_{00n}^L(s); E_{\theta n0}^L(r, s) = \Gamma_{Hn0}^c(r) e_{00n}^L(s); \quad (48)$$

$$E_{rnm}^L(r, s) = -\frac{n(n+1)s}{r(s+\gamma)} \int_{r_0}^{\infty} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_{nm}^L(\xi, s), v_{nm}^L(\xi, s)] d\xi, \quad (49)$$

$$E_{\theta nm}^L(r, s) = \frac{s}{s+\gamma} \int_{r_0}^{\infty} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_{nm}^L(\xi, s), v_{nm}^L(\xi, s)] d\xi \quad (m, n \geq 1),$$

где

$$\Gamma_{Hn}^c(r, \xi) = \Gamma_{1Hn}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \Gamma_{2Hn}^c(r, \xi) H(r - \xi), \alpha_n(x, y) = x^{2n+1} - y^{2n+1},$$

$$\Gamma_{1Hn}^c(r, \xi) = -\frac{(n+1)\alpha_n(r, r_0)}{(2n+1)\xi^{n-1}r^{n+2}}, \Gamma_{2Hn}^c(r, \xi) = \frac{\beta_n(r_0, \xi)}{(2n+1)\xi^{n-1}r^{n+2}}, \Gamma_{Hn0}^c(r) = \frac{r_0^{n+2}}{r^{n+2}}.$$

Соответствующие коэффициенты для изображения плотности зарядов при  $m \geq 1$  определяются равенствами (34), а при  $m = 0$  в силу (39) имеет место равенство

$$\rho_{n0}^L = 0.$$

#### 4. Разрешающая рекуррентная система уравнений

Как следует из п. 3, коэффициенты рядов (25) при каждом  $n$  определяются независимыми рекуррентными системами интегральных соотношений. При  $n = 0$  эта система включает в себя соотношения (34), (40) и первое равенство в (49) с начальными условиями (39). Она является однородной и имеет тривиальное решение:

$$u_{0m}(r, \tau) = \rho_{0m}(r, \tau) = E_{r0m}(r, \tau) \equiv 0 \quad (m \geq 0).$$

При каждом  $n \geq 1$  рекуррентные системы образуются соотношениями (41), (45), (49) и (34) при  $m \geq 1$ , которые в пространстве оригиналов с учетом свойств преобразования Лапласа записываются так:

$$u_{nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} G_{uum}(r, \xi, \tau) * f_{un,m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{uvm}(r, \xi, \tau) * f_{vn,m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (50)$$

$$v_{nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} G_{vum}(r, \xi, \tau) * f_{un,m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{vvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn,m-1}(\xi, \tau) d\xi \quad (n \geq 1),$$

$$H_{nm}(r, \tau) = -\eta_e^2 \int_{r_0}^{\infty} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [\dot{u}_{nm}(\xi, \tau), \dot{v}_{nm}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (51)$$

$$E_{rnm}(r, \tau) = -\frac{n(n+1)}{r} \int_{r_0}^{\infty} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_{nms}(\xi, \tau), v_{nms}(\xi, \tau)] d\xi, \quad (52)$$

$$E_{\theta nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_{nms}(\xi, \tau), v_{nms}(\xi, \tau)] d\xi;$$

$$\rho_{nm}(r, \tau) = -l_{np} [u_{nms}(r, \tau), v_{nms}(r, \tau)]. \quad (53)$$

Здесь и далее звездочка обозначает свертку по времени, а дополнительный нижний индекс «s» у функции  $f(\tau)$  соответствует результату применения к ней следующего оператора:

$$f_s(\tau) = f(\tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * f(\tau).$$

Начальные условия к системе (50) – (53) следуют из (39), (46), (48) и (53):

$$u_{n0}(r, \tau) \equiv 0, v_{n0}(r, \tau) \equiv 0, H_{n0}(r, \tau) = -\eta_e^2 G_{Hn0}^c(r) [\gamma e_{00n}(\tau) + \dot{e}_{00n}(\tau)],$$

$$E_{r n0}(r, \tau) = -\frac{n(n+1)}{r} G_{Hn0}^c(r) e_{00n}(\tau), E_{\theta n0}(r, \tau) = \Gamma_{Hn0}^c(r) e_{0k0}(\tau), \rho_{n0}(r, \tau) \equiv 0. \quad (54)$$

В соотношения (50)–(53) входят производные по времени, а также, как следует из (15) и (17), производные по радиусу. Для того чтобы избежать численного дифференцирования, необходимо их модифицировать. Прежде всего, с помощью интегрирования по

частям преобразовываем формулы (51) и (52). При этом полагаем, что начальная плотность поверхностных зарядов удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_{e0}(r) = 0,$$

а также учитываем вытекающие из формул (47) и (49) равенства

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} G_{Hn}^c(r, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^2 \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) = -\frac{\beta_n(r_0, r)}{n(2n+1)r^{n+1}} \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n \geq 1; \end{cases}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Gamma_{1Hn}^c(r, \xi) = -\frac{(n+1)\alpha_n(r, r_0)}{(2n+1)r^{n+2}} \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

В результате приходим к следующим равенствам:

$$H_{nm}(r, \tau) = -\eta_e^2 \int_{r_0}^{\infty} \rho_{e0}(\xi) \left[ G_{Hnm}^c(r, \xi) \dot{u}_{nm}(\xi, \tau) + G_{Hvn}^c(r, \xi) \dot{v}_{nm}(\xi, \tau) \right] d\xi; \quad (55)$$

$$E_{rnm}(r, \tau) = -\frac{n(n+1)}{r} \int_{r_0}^{\infty} \rho_{e0}(\xi) \left[ G_{Hnm}^c(r, \xi) u_{nms}(\xi, \tau) + G_{Hvn}^c(r, \xi) v_{nms}(\xi, \tau) \right] d\xi, \quad (56)$$

$$E_{\theta nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} \rho_{e0}(\xi) \left[ \Gamma_{Hnm}^c(r, \xi) u_{nms}(\xi, \tau) + \Gamma_{Hvnr}^c(r, \xi) v_{nms}(\xi, \tau) \right] d\xi + \rho_{e0}(r) v_{nms}(r, \tau).$$

Здесь

$$G_{Hnm}^c(r, \xi) = \xi \left[ \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \tilde{G}_{Hn}^c(\xi, r) H(r - \xi) \right],$$

$$G_{Hvn}^c(r, \xi) = \xi \left[ G_{Hvn1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + G_{Hvn2}^c(r, \xi) H(r - \xi) \right],$$

$$\Gamma_{Hnm}^c(r, \xi) = \Gamma_{Hnm1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \Gamma_{Hnm2}^c(r, \xi) H(r - \xi)$$

$$\Gamma_{Hvnr}^c(r, \xi) = \Gamma_{Hvn1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \Gamma_{Hvn2}^c(r, \xi) H(r - \xi),$$

где

$$\Gamma_{Hnm1}^c(r, \xi) = -\frac{(n+1)\alpha_n(r, r_0)}{(2n+1)\xi^n r^{n+2}}, \quad \Gamma_{Hnm2}^c(r, \xi) = \frac{\beta_n(r_0, \xi)}{(2n+1)\xi^n r^{n+2}},$$

$$G_{Hvn1}^c(r, \xi) = -\frac{\beta_n(r_0, r)}{(2n+1)r^{n+1}\xi^{n+1}}, \quad G_{Hvn2}^c(r, \xi) = -\frac{(n+1)\alpha_n(r_0, \xi)}{(2n+1)r^{n+1}\xi^{n+1}},$$

$$\Gamma_{Hvn1}^c(r, \xi) = -\frac{n(n+1)\alpha_n(r, r_0)}{(2n+1)r^{n+2}\xi^n}, \quad \Gamma_{Hvn2}^c(r, \xi) = \frac{n(n+1)\alpha_n(r_0, \xi)}{(2n+1)r^{n+2}\xi^n}.$$

Для устранения производной в формуле (53) замечаем, что согласно (17) имеет место следующее равенство:

$$l_{np}(u, v) = \rho'_{e0} u + \rho_{e0} \chi_n(u, v), \quad \chi_n(u, v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} + \frac{n(n+1)}{r} v.$$

Веденная здесь функция  $\chi_n(u, v)$  имеет смысл коэффициента разложения в ряды по полиномам Лежандра, коэффициента объемного расширения для поля перемещений с компонентами  $u$  и  $v$ .

При этом равенство (53) можно преобразовать так:

$$\rho_{nm}(r, \tau) = -\rho'_{e0}(r)u_{nms}(r, \tau) - \rho_{e0}\chi_{nms}(r, \tau), \chi_{nm} = \chi_n(u_{nm}, v_{nm}). \quad (57)$$

Тогда необходимо дополнительно построить интегральное представление для  $\chi_{nm}$ . Его получаем из (50):

$$\chi_{nm} = \int_{r_0}^{\infty} X_{un}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} X_{vn}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (58)$$

где

$$X_{un}(r, \xi, \tau) = \chi_n(G_{uun}, G_{vun}), X_{vn}(r, \xi, \tau) = \chi_n(G_{uvn}, G_{vvn}).$$

Используя результаты работы [20] и формулы (42)–(44) для ядер в (58), получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} X_{un}^L(r, \xi, s) &= X_{un1}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + X_{un2}^L(r, \xi, s)H(r - \xi), \\ X_{vn}^L(r, \xi, s) &= X_{vn1}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + X_{vn2}^L(r, \xi, s)H(r - \xi). \end{aligned}$$

Здесь

$$X_{unk}^L(r, \xi, s) = -\frac{N_{unk}^{(0)}(rs, r_0s, \xi s)}{Z_{n1}(s)} e^{\eta_+ r_0 s}, X_{vnk}^L(r, \xi, s) = -\frac{N_{vnk}^{(0)}(rs, r_0s, \xi s)}{Z_{n1}(s)} e^{\eta_+ r_0 s} \quad (k = 1, 2),$$

где

$$\begin{aligned} Z_{n1}(s) &= 2r^{n+1}\xi^n s^{2n+1} D_n(r_0s, r_0s), \\ N_{un1}^{(0)}(x, y, z) &= 2n(n+1)y^{2n+1}R_{n0}(x)R_{n0}(\eta z)e^{-x-\eta z} + (-1)^n R_{n1}(z)M_{un1}(x, y)e^{-\eta y-z}, \\ M_{un1}(x, y) &= n(n+1)R_{n0}(\eta y)E_{00n}(y, x) - R_{n3}(\eta y)E_{10n}(y, x), \\ N_{un2}^{(0)}(x, y, z) &= R_{n0}(x)e^{-x} \left[ 2n(n+1)y^{2n+1}R_{n0}(\eta z)e^{-\eta z} + (-1)^n M_{un2}(y, z)e^{-\eta y} \right], \\ M_{un2}(y, z) &= R_{n3}(\eta y)E_{11n}(z, y) - n(n+1)R_{n0}(\eta y)E_{10n}(z, y), \\ N_{vn1}^{(0)}(x, y, z) &= n(n+1) \left[ 2\eta^{n+2}y^{2n+1}R_{n0}(x)R_{n3}(\eta z)e^{-x-\eta z} + (-1)^n R_{n0}(z)M_{vn}(y, x)e^{-\eta y-z} \right], \\ N_{vn2}^{(0)}(x, y, z) &= n(n+1)R_{n0}(x)e^{-x} \left[ 2y^{2n+1}R_{n3}(\eta z)e^{-\eta z} + (-1)^n M_{vn}(y, z)e^{-\eta y} \right], \\ M_{vn}(y, z) &= n(n+1)R_{n0}(\eta y)E_{00n}(y, z) - R_{n3}(\eta y)E_{10n}(y, z). \end{aligned}$$

Эти формулы аналогичны (42)–(44). Отличие состоит в том, что, как показывает подробный анализ, у функций  $X_{unk}^L(r, \xi, s)$  степени числителя и знаменателя совпадают. Поэтому необходимо учитывать, что их оригиналы могут содержать слагаемые

$$\frac{C_{unk}^{(\alpha_1)}(r, \xi)}{2r^{n+1}\xi^n} \delta[\tau - \tau_{0\alpha_k}(r, \xi)], \quad (59)$$

которые находятся методами компьютерной алгебры и должны быть в свертках в (58) в соответствии со свойствами дельта-функции.

Далее, дифференцируя равенства (50), получаем следующие интегральные представления для производных по времени:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{nm}(r, \tau) &= \int_{r_0}^{\infty} \Pi_{uum}(r, \xi, \tau) * f_{un,m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} \Pi_{uvm}(r, \xi, \tau) * f_{vm,m-1}(\xi, \tau) d\xi, \\ \dot{v}_{nm}(r, \tau) &= \int_{r_0}^{\infty} \Pi_{vum}(r, \xi, \tau) * f_{un,m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} \Pi_{vvm}(r, \xi, \tau) * f_{vm,m-1}(\xi, \tau) d\xi, \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{uum}(r, \xi, \tau) &= \dot{G}_{uum}(r, \xi, \tau), \quad \Pi_{uvm}(r, \xi, \tau) = \dot{G}_{uvm}(r, \xi, \tau), \\ \Pi_{vum}(r, \xi, \tau) &= \dot{G}_{vum}(r, \xi, \tau), \quad \Pi_{vvm}(r, \xi, \tau) = \dot{G}_{vvm}(r, \xi, \tau). \end{aligned}$$

Явный вид этих ядер следует из (42)–(44):

$$\begin{aligned} \Pi_{uum}(r, \xi, \tau) &= \xi^2 [\tilde{\Pi}_{uum}(r, \xi, \tau)H(\xi - r) + \tilde{\Pi}_{uum}(\xi, r, \tau)H(r - \xi)], \\ \Pi_{vum}(r, \xi, \tau) &= \xi^2 [\tilde{\Pi}_{vum}(r, \xi, \tau)H(\xi - r) + \tilde{\Pi}_{vum}(\xi, r, \tau)H(r - \xi)], \\ \Pi_{uvm}(r, \xi, \tau) &= n(n+1)\xi^2 [\tilde{\Pi}_{uvm}(r, \xi, \tau)H(\xi - r) + \tilde{\Pi}_{uvm}(\xi, r, \tau)H(r - \xi)], \\ \Pi_{vvm}(r, \xi, \tau) &= \xi^2 [\tilde{\Pi}_{vvm}(r, \xi, \tau)H(\xi - r) + \tilde{\Pi}_{vvm}(\xi, r, \tau)H(r - \xi)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{uum}(r, \xi, \tau) &= \dot{\tilde{G}}_{uum}(r, \xi, \tau), \quad \tilde{\Pi}_{uvm}(r, \xi, \tau) = \dot{\tilde{G}}_{uvm}(r, \xi, \tau), \\ \tilde{\Pi}_{vum}(r, \xi, \tau) &= \dot{\tilde{G}}_{vum}(r, \xi, \tau), \quad \tilde{\Pi}_{vvm}(r, \xi, \tau) = \dot{\tilde{G}}_{vvm}(r, \xi, \tau). \end{aligned}$$

Изображения последних функций

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{uum}^L(r, \xi, s) &= s\tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, \tau), \quad \tilde{\Pi}_{uvm}^L(r, \xi, \tau) = s\tilde{G}_{uvm}^L(r, \xi, \tau), \\ \tilde{\Pi}_{vum}^L(r, \xi, \tau) &= s\tilde{G}_{vum}^L(r, \xi, \tau), \quad \tilde{\Pi}_{vvm}^L(r, \xi, \tau) = s\tilde{G}_{vvm}^L(r, \xi, \tau) \end{aligned}$$

имеют структуру (44). При этом в знаменателе степень аргумента  $s$  уменьшается на единицу. Поэтому функции  $\Pi_{uum}(r, \xi, \tau)$  и  $\Pi_{vvm}(r, \xi, \tau)$  могут содержать аналогичные (59) слагаемые, которые также должны быть учтены при вычислении свертки в (60).

Таким образом, разрешающая рекуррентная система уравнений состоит из соотношений (50), (55), (56), (57), (58), (60) при  $m \geq 1$  и начальных условий (54). Она позволяет находить коэффициенты рядов (11) и (25) для перемещений, напряженностей магнитного и электрического полей, а также плотности зарядов. Соответствующие коэффициенты для плотности тока могут быть найдены по формулам (14).

## 5. Пример расчета

Полагаем, что материал пространства – алюминий, что соответствует следующим параметрам [26] (характерная напряженность электрического поля  $E_* = 100$  В/м):

$$\eta = 2,04; \quad \eta_e = 0,111 \cdot 10^{-4}; \quad \gamma = 5,06; \quad \alpha = 0,0806.$$

Радиус полости единичный:  $r_0 = 1$ , начальные параметры электрического поля следующие:  $E_0 = 1$ ,  $\rho_{0e} = 2/r$ , а на границе полости напряженность электрического поля

имеет вид  $e_{00} = f(\tau) \sin \theta$ , где  $f(\tau) = [H(\tau) - H(\tau - 1)] \sin \pi \tau$ , что соответствует таким коэффициентам:  $e_{001} = [H(\tau) - H(\tau - 1)] \sin \pi \tau$ ,  $e_{00n} \equiv 0$  ( $n \geq 2$ ).

Интегралы в рекуррентных соотношениях находились численно. Распределение по радиусу нетривиальных коэффициентов рядов (11) при  $n=1$  для перемещений и компонентов электромагнитного поля представлены на рис. 1–8: сплошные кривые соответствуют  $\tau=1$ , пунктирные –  $\tau=3$ , а штрихпунктирные  $\tau=5$ . Расчеты проводились с учетом первых трех членов рядов (25). Учет последующего члена практически не приводит к изменению результатов. На рис. 1–8 видно характерное убывание механических характеристик и характеристик электромагнитного поля с ростом времени, при этом для тангенциальных перемещений этот процесс менее выражен. Для тангенциальной составляющей вектора напряжённости электрического поля характерно «опрокидывание» в отрицательную область. Для плотности электрических зарядов характерна концентрация вблизи границы полости.

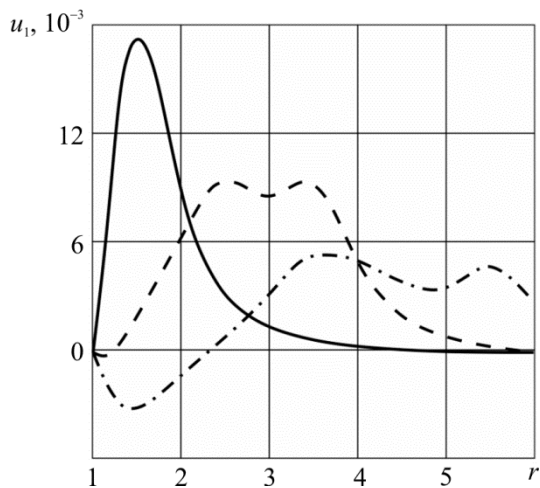


Рис. 1. Радиальные перемещения  
Fig. 1. Radial displacements

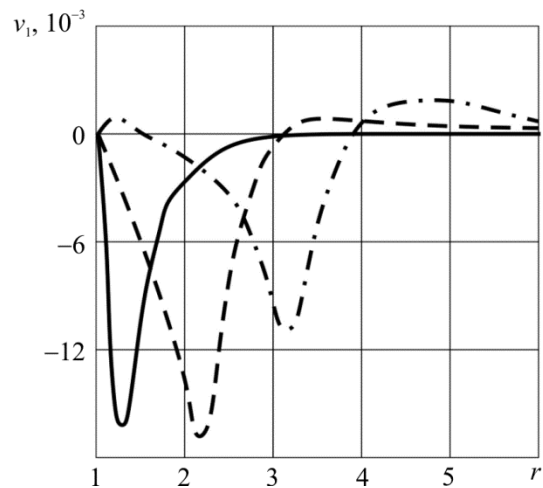


Рис. 2. Тангенциальные перемещения  
Fig. 2. Tangential displacements

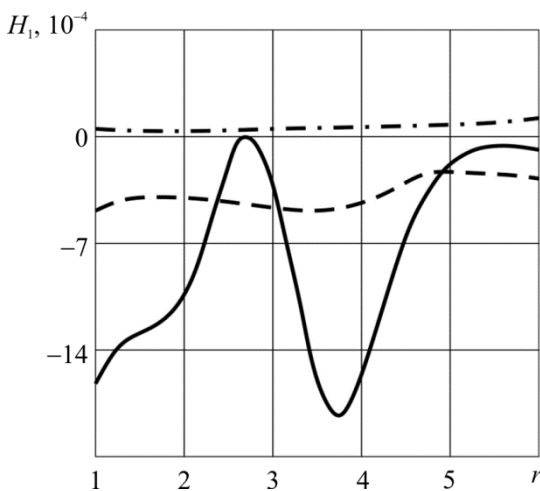


Рис. 3. Напряженность магнитного поля  
Fig. 3. Magnetic field strength

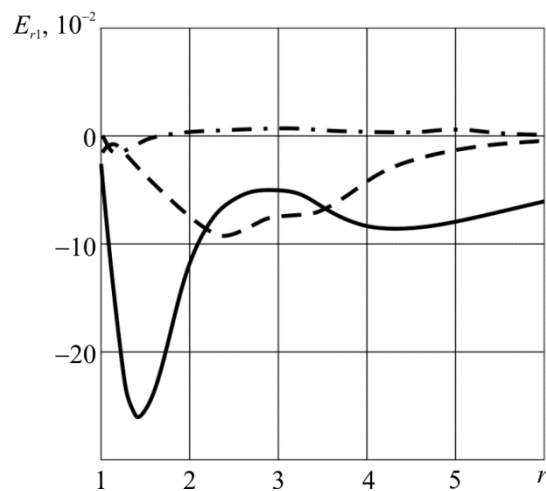


Рис. 4. Радиальная координата напряженности электрического поля  
Fig. 4. Radial coordinate of electric field strength

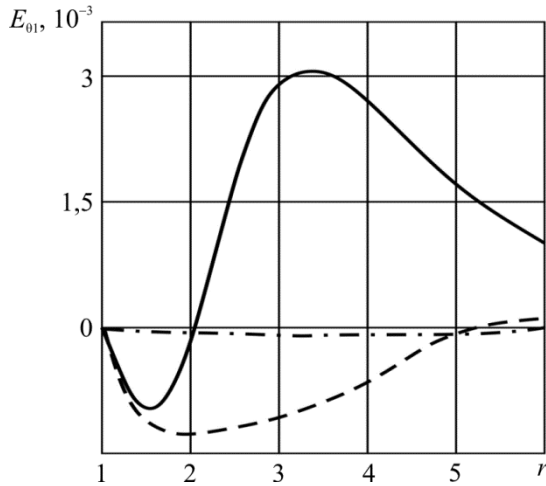


Рис. 5. Тангенциальная координата напряженности электрического поля  
Fig. 5. Tangential coordinate of electric field strength

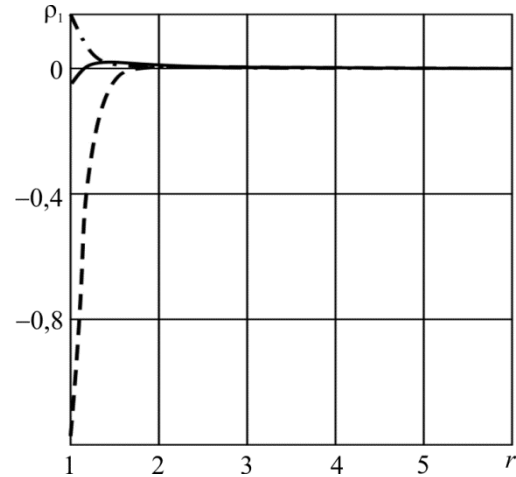


Рис. 6. Плотность зарядов  
Fig. 6. Density of charges

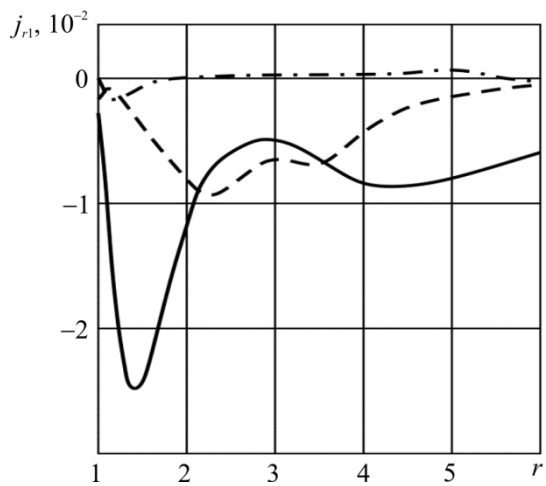


Рис. 7. Радиальная координата плотности тока  
Fig. 7. Radial coordinate of current density

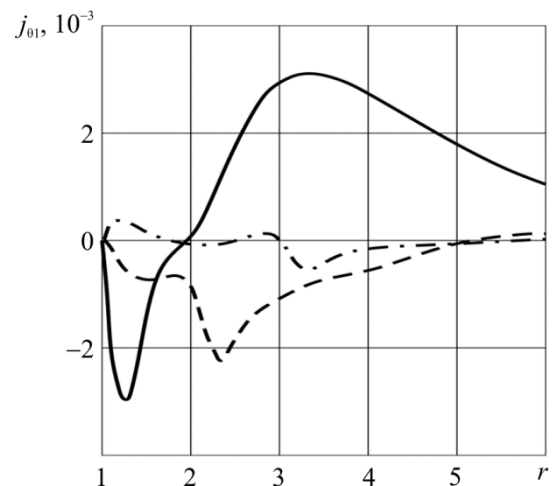


Рис. 8. Тангенциальная координата плотности тока  
Fig. 8. Tangential coordinate of current density

Таким образом, в отличие от публикаций других исследователей, предложенный в работе метод связи механических и электромагнитных полей и впервые полученная с помощью этого подхода рекуррентная система уравнений позволяют находить перемещения и компоненты электромагнитного поля новой нестационарной осесимметричной связанной задачи электромагнитоупругости для проводящего пространства со сферической полостью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках конкурса «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований международными научными группами», номер проекта 14-49-00091.



## Библиографический список

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость; отв. ред. А.Н. Гузь. – Киев: Наукова думка, 1989. – 280 с.
2. Gupta Mange Ram. Symmetric vibrations of an elastic semiconductor in the form of a spherical shell under mechanical, thermal and electric fields // Indian J. Pure and Appl. Math. – 1990. – Vol. 21. – No. 6. – P. 582–596.
3. Xiao Yu, Bhattacharya Kaushik. A continuum theory of deformable, semiconducting ferroelectrics // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 2008. – Vol. 189. – No. 1. – P. 59–95.
4. Партон В.З., Кудрявцев Б.А., Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 470 с.
5. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С. Несущая способность электропроводящих элементов конической формы при действии электромагнитных импульсов. Несуча здатність електропровідних елементів канонічної форми за дії електромагнетних імпульсів // Фіз.-хім. мех. матер. – 2010. – № 4. – С. 92–97.
6. Дашко О.Г. Несвязанная задача магнитоупругости для ферромагнитного тела со сферической полостью // Прикл. мех. – 2007. – Т. 43, № 10. – С. 42–48.
7. Aouadi M. Electromagneto-thermoelastic fundamental solutions in a two-dimensional problem for short time // Acta mech. – 2005. – Vol. 174. – No. 3–4. – P. 223–240.
8. Ватульян А.О. Фундаментальные решения в нестационарных задачах электроупругости // Прикл. мат. и мех. – 1996. – Т. 60, № 2. – С. 309–312.
9. Ding H.J., Wang H.M., Chen W.Q. Dynamic response of a pyroelectric hollow sphere under radial deformation // Eur. J. Mech. A. – 2004. – Vol. 22. – No. 4. – С. 617–631.
10. Allam Mohmed N., Elsibai Khaled A., Abouelregal Ahmed E. Magneto-thermoelasticity for an infinite body with a spherical cavity and variable material properties without energy dissipation // Int. J. Solids and Struct. – 2010. – Vol. 47. – No. 20. – P. 2631–2638.
11. Бабаев А.Э., Савин В.Г. Излучение нестационарных акустических волн толстостенной электроупругой сферой // Прикл. мех. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 25–32.
12. Бабаев А.Э., Савин В.Г., Джулинский А.В. Аналитический метод решения задачи излучения нестационарных волн сферическим пьезопреобразователем // Теор. и прикл. мех. – 2003. – № 37. – С. 195–199, 213.
13. Бабаев А.Э., Савин В.Г., Стадник А.И. Излучение звука системой пьезокерамических сферических оболочек при электрическом импульсном возбуждении // Прикл. мех. – 1988. – Т. 24, № 10. – С. 34–40.
14. Бабаев А.Э., Рябуха Ю.Н., Савин В.Г. Возбуждение толстостенной пьезокерамической сферы нестационарными электрическими импульсами // Изв. АН. Мех. тверд. тела. – 1995. – № 5. – С. 94–101.
15. Савин В. Г., Моргун И. О. Преобразование электрических импульсов в акустические экранированной сферической пьезокерамической оболочкой // Прикл. мех. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 133–142.
16. Vestyak V.A., Lemeshev V.A., Tarlakovskii D.V. The Propagation of Time-Dependent Radial Perturbations from a Spherical Cavity in an Electromagnetoelastic space // Doklady Physics. – 2010. – Vol. 55. – Iss. 9. – P. 468–470.
17. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере // Эколог. вестн. науч. центров ЧЭС. – 2011. – № 4. – С. 16–21.
18. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Исследование нестационарных радиальных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферы с помощью численного обращения преобразования Лапласа // Вестн. Твер. гос. ун-та. Серия: Прикладная математика. – 2014. – № 1. – Вып. 9. – С. 51–64.
19. Vestyak V.A., Igumnov L.A., Tarlakovsky D.V. Electromagnetic fields in moving space with spherical enclosure // Materials physics and mechanics (MPM). – 2015. – Vol. 23. – No. 1. – P. 31–35.

20. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарные осесимметричные объемные возмущения в пространстве со сферической полостью // Методы розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць Дніпропетр. націон. ун-та. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – Вип. 11. – С. 49–56.
21. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic processes in thermo-ectro-magneto-elastic and thermo-elasto-diffusive media // Encyclopedia of Thermal Stresses. Vol. 2. – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. – P. 1064–1071.
22. Ильющин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 287 с.
23. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям: с формулами, графиками и математическими таблицами: пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
24. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
25. Gorshkov A.G., Tarlakovskiy D.V. Transient Aerohydroelasticity of Spherical Bodies. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2001. – 289 p.
26. Григорьев И.С., Мейлихов Е.З. Физические величины: справочник. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

## References

1. Grichenko V.T., Ulitko A.P., Shulga N.A. Mekhanika sviazannykh polei v elementakh konstruksii. Vol. 5. Elektrouprugost' [The mechanics of coupled fields in elements of designs. Vol.5. Electroelastic]. Ans. Ed. A.H. Gus. Kiev: Naukova dumka. 1989, 280 p.
2. Gupta Mange Ram Symmetric vibrations of an elastic semiconductor in the form of a spherical shell under mechanical, thermal and electric fields. Indian J. Pure and Appl. Math., 1990, vol. 21, no. 6, pp. 582-596.
3. Xiao Yu, Bhattacharya Kaushik. A continuum theory of deformable, semiconducting ferroelectrics. Arch. Ration. Mech. and Anal., 2008, vol. 189, no. 1, pp. 59-95. DOI:10.1007/s00205-007-0096-y
4. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A., Electromagnetoelastic of piezoelectric and electrowire bodies [Electromagnetoelastic piezoelectric and conductive bodies.]. Moscow: Nauka, 1988, 470 p.
5. Hachkevich O.R., Musyi R.S. Nesushchaia sposobnost' elektroprovodiashchikh elementov kononicheskoi formy pri deistvii elektromagnitnykh impul'sov. Nesucha zdatnist' elektroprovodnikh elementiv kanonichnoi formi za dii elektromagnetnikh impul'si [The bearing ability of electroconductive elements of an initial form at action of electromagnetic impulses]. Fiziko-khimicheskaiia mekhanika materialov, 2010, no. 4, pp. 92-97.
6. Dashko O.G. Nesviazannaia zadacha magnitouprugosti dlia ferromagnitnogo tela so sfericheskoi polost'iu [Unrelated to the task magnetoelasticity ferromagnetic body with a spherical cavity]. Prikladnaia mekhanika, 2007, vol. 43, no. 10, pp. 42-48.
7. Aouadi M. Electromagneto-thermoelastic fundamental solutions in a two-dimensional problem for short time. Acta mech., 2005, vol. 174, no. 3-4, pp. 223-240. DOI:10.1007/s00707-004-0201-3
8. Vatulian A.O. Fundamental'nye resheniia v nestatsionarnykh zadachakh elektrouprugosti [Fundamental solutions of non-stationary problems of electrodynamicity]. Prikladna matematika i mekhanika, 1996, vol. 60, no. 2, pp. 309-312.
9. Ding H.J., Wang H.M., Chen W.Q. Dynamic response of a pyroelectric hollow sphere under radial deformation. Eur. J. Mech. A., 2004, vol. 22, no. 4, pp. 617-631.
10. Allam Mohmed N., Elsibai Khaled A., Abouelregal Ahmed E. Magneto-thermoelasticity for an infinite body with a spherical cavity and variable material properties without energy dissipation. Int. J. Solids and Struct., 2010, vol. 47, no. 20, pp. 2631-2638.
11. Babaev A.E., Savin V.G. Izluchenie nestatsionarnykh akusticheskikh voln tolstostennoi elektrouprugoi sferoi [Radiation of transient electro acoustic waves of thick-walled elastic sphere]. Kiev: Prikladnaia mekhanika, 1995, vol. 31, no. 11, pp. 25-32.

12. Babaev A.E., Savin V.G., Dzhulinskiy A.V. Analiticheskii metod resheniia zadachi izlucheniia nestatsionarnykh voln sfericheskim p'ezopreobrazovatelem [Analytical method for solving the problem of non-stationary wave radiation spherical piezoelectric transducer]. Kiev: Prikladnaia i teoriticheskaia mekhanika, 2003, no. 37, pp. 195-199, 213.
13. Babaev A.E., Babaev A.E., Stadnik A.I. Izluchenie zvuka sistemoi p'ezokeramicheskikh sfericheskikh obolochek pri elektricheskome impul'snom vozbuзhdenii [Sound radiation system piezoceramic spherical shells under electrical impulse excitation], J. Kiev: Prikladnaia mekhanika, 1988, vol. 24, no. 10, pp. 34-40.
14. Babaev A.E., Ryabucha Y.N., Savin V.G. Vozbuзhdenie tolstostennoi p'ezokeramicheskoi sfery nestatsionarnymi elektricheskimi impul'snami [Excitation of a thick-walled piezoceramic medium stationary electrical pulses], Moskva: Izvestiia akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 1995, no. 5, pp. 94-101.
15. Savin V.G., Morgun I.O. Preobrazovanie elektricheskikh impul'sov v akusticheskie ekranirovannoi sfericheskoi p'ezokeramicheskoi obolochkoi [Transformation of electric impulses in acoustic a screened spherical pyezokeramicheskyy cover]. Kiev: Prikladnaia mekhanika, 2007, vol. 43, no. 2, pp. 133-142.
16. Vestyak V.A., Lemeshev V.A., Tarlakovskii D.V. The Propagation of Time-Dependent Radial Perturbations from a Spherical Cavity in an Electromagnetoelastic space. Doklady Physics, 2010, vol. 55, is. 9, pp. 468-470. DOI:10.1134/S1028335810090119
17. Vestyak V.A., Tarlakovskii D.V. Odnomernye nestatsionarnye volny v tolstostennoi elektromagnitouprugoi sfere [One-dimensional non-stationary waves in a thick-walled solenoid elastic medium]. Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov ChES, 2011, no. 4, pp. 16-21.
18. Vestyak V.A., Tarlakovskii D.V. Issledovanie nestatsionarnykh radial'nykh kolebanii elektromagnitouprugoi tolstostennoi sfery s pomoshch'iu chislennogo obrashcheniia preobrazovaniia Laplasy [Study of non-stationary radial oscillations of the electromagnetic elastic thick-walled sphere by numerical Laplace transform inversion]. Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Prikladnaia matematika, 2014, no. 1, is. 9, pp. 51-64.
19. Vestyak V.A., Igumnov L.A., Tarlakovsky D.V. Electromagnetic fields in moving space with spherical enclosure. Materials physics and mechanics (MPM), 2015, vol. 23, no 1, pp. 31-35.
20. Vestyak V.A., Tarlakovskii D.V. Nestatsionarnye osesimmetrichnye ob'emnye vozmushcheniia v prostranstve so sfericheskoi polost'iu [Non-stationary symmetric three-dimensional perturbations in space with a spherical cavity]. Metodi rozv'iazuvannia prikladnykh zadach mekhaniki deformivnogo tverdogo tela: Zbirnik naukovykh prats' Dnipropetr. natsion. un-ta. – Dnipropetrovs'k: Nauka i osvita, 2010, is. 11, pp. 49-56.
21. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic processes in thermo-ectromagneto-elastic and thermo-elasto-diffusive media. In: Encyclopedia of Thermal Stresses Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014, vol. 2, pp. 1064-1071.
22. Ilushin A.A. Continuum Mechanics. Moscow.: State Moscow. Univ, 1978, 287 p.
23. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / Ed. by M. Abramowitz and I.A. Stegun Moscow: Nauka, 1979, 832 p.
24. Lavrentyev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of functions complex variable. Moscow, Nauka, 1973, 736 p.
25. Gorshkov A.G., Tarlakovskiy D.V. Transient Aerohydroelasticity of Spherical Bodies. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2001, 289 p.
26. Grigoriev I.S Meilichov E.Z. Physical quantities. Directory. Moscow: Energoatomisdat, 1991, 1232 p.