

С.А. Бочкарёв, С.В. Лекомцев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОЙ ТРУБЫ С ТЕКУЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

С применением метода конечных элементов исследуются собственные колебания и устойчивость цилиндрических труб, взаимодействующих с невязкой сжимаемой жидкостью. Движение тел вращения описывается в рамках линейной теории упругости. Сжимаемая среда рассматривается согласно потенциальной теории. Соответствующее дифференциальное уравнение для потенциала возмущения скорости сводится к системе уравнений с помощью метода Галеркина. Для трубы используется вариационный принцип возможных перемещений, в который включается линеаризованное уравнение Бернулли для вычисления гидродинамического давления, действующего со стороны жидкости на упругую конструкцию. Численная реализация осуществляется на основе полуаналитического варианта метода конечных элементов. Решение задачи сводится к вычислению и анализу комплексных собственных значений связанной системы уравнений. Полученные результаты сравниваются с известными теоретическими и экспериментальными данными для труб, содержащих неподвижную или текучую среду. Определены границы применимости разных типов конечных элементов, включая конечный элемент для оболочки.

Ключевые слова: классическая теория оболочек, цилиндрическая труба, линейная теория упругости, потенциальная сжимаемая жидкость, метод конечных элементов, собственные колебания, устойчивость, флаттер, дивергенция.

S.A. Bochkarev, S.V. Lekomtsev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

NUMERICAL SIMULATION OF AN ELASTIC TUBE CONTAINING A FLOWING FLUID

The finite element method is applied to analyze natural vibrations and stability of cylindrical tubes interacting with inviscid compressible fluid. The motion of bodies of revolution is described in the framework of the linear theory of elasticity. The compressible media is considered in accordance with potential theory. The corresponding differential equation for the potential velocity perturbation is reduced to a system of equations using the Galerkin method. For pipe used variational principle of virtual displacements, which includes the linearized Bernoulli equation to calculate the hydrodynamic pressure exerted by the fluid on the elastic structure. Numerical simulation is based on the semianalytic finite-element method. The solution of the problem reduces to evaluation and analysis of the complex eigenvalues of the connected system of equations. The results are compared with known theoretical and experimental data for pipes containing stationary or flowing medium. The limits of applicability of different types of finite elements including the shell element have been determined.

Keywords: classical theory of shells, cylindrical tube, linear theory of elasticity, potential compressible fluid, finite-element method, natural vibrations, stability, flutter, divergence.

Введение

Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических труб, взаимодействующих с потоком жидкости, является чрезвычайно сложной задачей ввиду особых требований, налагаемых на лабораторные условия: наличие сложной экспериментальной установки, специально изготовленные образцы испытываемых труб или оболочек. В связи с этим достаточно актуальным является численное моделирование данного процесса, которое при удовлетворении надлежащих требований может оказать существенную помощь при разработке реальных конструкций.

В последнее десятилетие был опубликован ряд работ, в которых численная реализация, как правило, основана на методе конечных элементов. В большей части из них движение твёрдого тела описывалось в рамках различных теорий оболочек. Например, в [1] с применением классической теории оболочек исследуется влияние граничных условий на динамическое поведение системы. В [2] для моделирования предварительно нагруженной тонкостенной цилиндрической трубы используется теория оболочек Сандерса. Для того чтобы расширить круг исследуемых задач и не быть ограниченными пределами применимости этих теорий, были проведены исследования, в которых тело вращения рассматривалось с точки зрения теории упругости [3]. Обобщенные гидродинамические силы, действующие со стороны движущегося потока жидкости или газа на упругую конструкцию, определялись согласно потенциальной теории или линеаризованным уравнениям Эйлера. Сравнение некоторых различных подходов, применяемых к описанию трубы и несжимаемой жидкости, было осуществлено в [4]. Однако в работе не представлено какого-либо анализа с целью определения преимуществ и недостатков каждой из формулировок, применяемой для описания жидкости. Сжимаемость текущей среды учтена в [5]. Здесь представлен конечно-элементный алгоритм, в котором предварительно нагруженная круговая цилиндрическая оболочка описывается в рамках теории упругости. Гидродинамическое давление определяется из уравнений Эйлера с учётом специально сконструированных динамических граничных условий, учитывающих течение жидкости. В [6] исследуются многослойные вязкоупругие оболочки, взаимодействующие со сжимаемой жидкостью. Для уравнения потенциала возмущения скорости, как и в данном исследовании, принимается метод Бубнова–Галёркина.

В данной работе для исследования границы гидроупругой устойчивости предлагается модель, которая ранее не рассматривалась. Движение тела вращения описывается с помощью уравнений линейной теории упругости, а поведение сжимаемой среды – согласно потенциальной теории. Численная реализация осуществляется на основе полуконечного варианта метода конечных элементов. Эффективность и достоверность алгоритма продемонстрирована на ряде численных примеров. Для этого осуществлено сравнение результатов с работами других авторов и экспериментальными данными для трубы, заполненной неподвижной жидкостью и содержащей движущуюся среду.

1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассматривается упругая цилиндрическая труба длиной L , взаимодействующая с внутренним потоком идеальной сжимаемой жидкости, которая течёт со скоростью U . В результате решения задачи необходимо найти такую скорость, при которой система теряет устойчивость.

Применяя для трубы, рассматриваемой в рамках линейной теории упругости [7], принцип возможных перемещений, в который включается уравнение Бернулли для вычисления гидродинамического давления потока жидкости [8], получаем связанную систему уравнений, которая в матричном виде может быть записана следующим образом [1]:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 \\ 0 & -\rho_f \mathbf{K}_f \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & -\rho_f \mathbf{M}_f \end{bmatrix} + i\lambda \rho_f \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_s \\ \mathbf{C}_f & \mathbf{C}_f^c \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \rho_f \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_s \\ \mathbf{A}_f & \mathbf{A}_f^c \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{K}_s = \sum_{m_s} \int_{V_s} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{M}_s = \sum_{m_s} \int_{V_s} \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \quad \mathbf{A}_s = \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \rho_f U \mathbf{N}_w^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dS,$$

$$\mathbf{K}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dV, \quad \mathbf{M}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV,$$

$$\mathbf{C}_f = \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \mathbf{F}^T \mathbf{N}_w dS, \quad \mathbf{C}_f^c = - \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \mathbf{F} dV, \quad \mathbf{C}_s = \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \rho_f \mathbf{N}_w^T \mathbf{F} dS,$$

$$\mathbf{A}_f = \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} U \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} dS, \quad \mathbf{A}_f^c = - \sum_{m_f} \int_{V_f} M^2 \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dV.$$

Здесь (r, θ, x) – цилиндрическая система координат; m_f, m_s – число конечных элементов, на которые разбиваются области потока жидкости V_f и трубы V_s ; S_f, S_s – площади, ограничивающие объёмы потока жидкости и трубы; $S_\sigma = S_f \cap S_s$; ρ_s, ρ_f – плотность материала трубы и жидкости соответственно; \mathbf{B} – матрица связи вектора деформаций с вектором узловых перемещений конечного элемента трубы; \mathbf{D} – матрица жесткостей; $M = U/c$ – число Маха; $\mathbf{F}, \mathbf{N}, \mathbf{N}_w$ – функции формы для потенциала возмущения скорости, конечного элемента трубы и нормальной составляющей вектора перемещений трубы, \mathbf{q}, \mathbf{f} – некоторые функции координат, $i = \sqrt{-1}$, $\lambda = \lambda_1 + i \cdot \lambda_2$ – характеристический показатель.

Исследование динамики поведения цилиндрической трубы с жидкостью сводится к вычислению и анализу комплексных собственных значений λ системы уравнений (1). Для этого (1) преобразуется к стандартной проблеме на собственные значения:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{A}) \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \{\mathbf{q} \ \mathbf{f}\}^T = \lambda \{\mathbf{q} \ \mathbf{f}\}^T,$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Для численной реализации используется полуаналитический вариант метода конечных элементов [9], основанный на представлении решения в виде ряда Фурье по окружной координате. Тогда исходная трёхмерная задача сводится к совокупности двумерных задач для каждой из гармоник ряда, номера которых в дальнейшем будем обозначать через j .

2. Примеры численной реализации

2.1. Труба с неподвижной жидкостью

В качестве примера рассмотрена труба с неподвижной жидкостью ($c = 1500$ м/с, $\rho_f = 1000$ кг/м³), свободно опертая с обоих торцов ($v = w = 0$)

при $x = 0, L$), со следующими физико-механическими характеристиками: модуль упругости $E = 2,01 \cdot 10^{11}$ Н/м², коэффициент Пуассона $\nu = 0,29$, $\rho_m = 7812$ кг/м³, $R = 0,0377$ м, толщина $h = 2,29 \cdot 10^{-4}$ м, $L/R = 6,2$, $R/h = 164,6$. В табл. 1 представлены собственные частоты колебаний данной системы для различных типов конечных элементов и их сравнение с экспериментальными результатами, полученными в работе [10].

В ходе работы проведено сравнение с [3], где поведение жидкости описывается с помощью линеаризованных уравнений Эйлера, тогда как в данном исследовании для этого используется потенциальная теория. В обоих случаях тело рассматривалось в рамках линейной теории упругости, а дискретизация модели проводилась с использованием четырёхугольных конечных элементов с квадратичной аппроксимацией перемещений и потенциала скорости соответственно.

Таблица 1

Численные и экспериментальные данные (Гц) для стальной цилиндрической трубы с неподвижной жидкостью, свободно опёртой с обоих торцов

m	j	2-node	3-node	4-node	8-node	8-node [3]	эсп. [10]
1	3	237,6	242,5	240,4	245,7	244,9	250
	4	272,4	283,8	279,0	280,9	280,7	300
	5	425,0	442,3	436,2	436,3	436,5	430
	6	652,9	676,7	669,8	667,9	668,9	680
	7	945,9	977,6	970,1	964,8	967,2	970
2	3	793,7	798,9	796,5	818,3	814,4	813
	4	576,3	592,2	583,5	594,2	592,6	600
	5	564,7	598,0	580,3	583,8	583,0	625
	6	716,4	765,0	740,8	739,0	739,7	755
	7	979,5	1040,6	1012,6	1006,4	1008,6	1000

Сравнительный анализ показал, что для заданных граничных условий относительная разница в собственных частотах для этих двух формулировок находится в пределах 1 % (см. табл. 1). Таким образом, для данной конфигурации можно сделать заключение об эквивалентности результатов, полученных для трубы с неподвижной жидкостью, как с помощью линеаризованных уравнений Эйлера, так и с помощью потенциальной теории.

2.2. Устойчивость цилиндрических труб, содержащих текущую жидкость

В текущем разделе рассматриваются цилиндрические конструкции, внутри которых течёт сжимаемая среда. Предметом анализа является зависимость безразмерных комплексных частот $\omega = \omega_r + i\omega_i = \lambda/\xi$ от безразмерной скорости потока $\Lambda = U/(\xi L)$,

где

$$\xi = (\pi/L)^2 (D/\rho_s h)^{0,5}, \quad D = Eh^3/12(1-\nu^2).$$

В первом примере исследуется стальная цилиндрическая труба, свободно опёртая с обоих торцов, внутри которой течёт сжимаемая жидкость. Расчёты выполнялись при следующих параметрах: $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0,3$, $\rho_s = 7850$ кг/м³, $\rho_f/\rho_s = 0,128$, $c = 1500$ м/с, $R = 0,2$ м, $L/R = 2$, $h = 2,0 \cdot 10^{-3}$ м.

В табл. 2 приведены безразмерные критические скорости дивергенции и флаттера для оболочечного, четырёх- и восьмиузловых конечных элементов в сравнении с результатами других авторов, полученными разными методами: I – численное решение (гибридный МКЭ, теория оболочек Сандерса, метод разделения переменных); II – численно-аналитическое решение (метод Бубнова–Галеркина, теория оболочек Флюгге, метод преобразования Фурье); III – численное решение (МКЭ, метод Бубнова–Галеркина); IV – численное решение (гибридный метод, основанный на применении метода граничных интегральных уравнений для вычисления эффектов взаимодействия оболочка–жидкость и МКЭ для определения динамических свойств упругой конструкции); V – численно-аналитическое решение (метод Бубнова–Галеркина, теория оболочек Флюгге, метод разделения переменных). Во всех указанных выше работах для описания движения жидкости использовалась потенциальная теория.

Таблица 2

**Безразмерные критические скорости дивергенции Λ_D
и флаттера Λ_F для стальной цилиндрической трубы,
свободно опёртой с обоих торцов, $j = 5$**

	2-node	4-node	8-node	I	II	III	IV	V
Λ_D	3,36	3,48	3,38	3,1	3,54	3,6	3,49	3,33
Λ_F	4,47	4,60	4,54	3,95	4,97	4,83	4,62	4,65

В следующем примере рассматривается резиновая труба ($h/R = 0,0227$, $\rho_f/\rho_s = 0,00136$, $\nu = 0,5$), жёстко закрепленная с двух торцов, внутри которой течёт сжимаемый поток газа ($c = 326$ м/с, $\rho_f = 1,156$ кг/м³). На рисунке (а) представлено изменение безразмерной критической скорости дивергенции Λ в зависимости от отношения линейных размеров оболочки L/R для различных типов конечных элементов в сравнении с экспериментальными результатами, полученными в [11]. Хорошее совпадение наблюдается при использовании конечного элемента с квадратичной аппроксимацией как для жидкости, так и для трубы, которая рассматривается в рамках линейной теории упругости. На графике не изображены кривые, соответствующие элементам с линейной аппроксимацией (3-node и 4-node), потому что даже при достаточно высокой степени дискретизации они не смогли обеспечить удовлетворительного совпадения с [11]. Для постановки, в которой движение трубы определялось уравнениями классической теории оболочек, потенциал возмущения скорости внутри конечного элемента аппроксимировался линейной функцией. В этом случае расхождение численных расчётов с экспериментальными данными достигает 12 % (кривая 2-node на рисунке (а)).

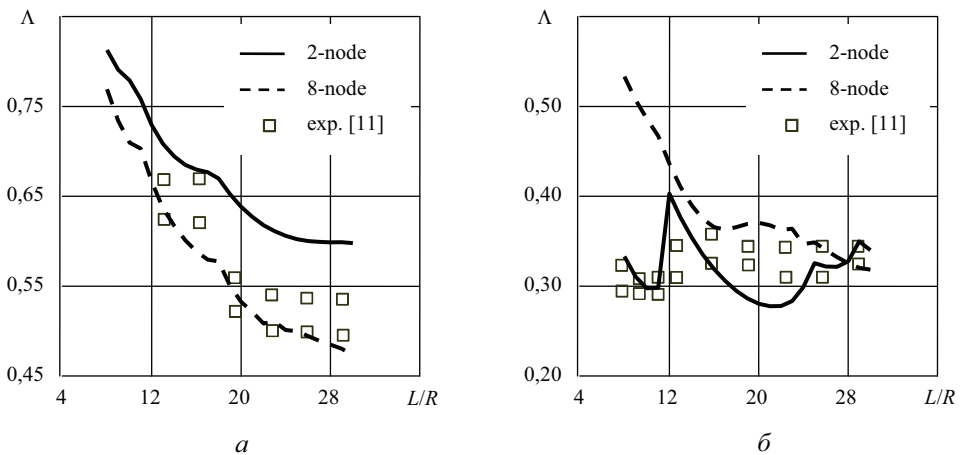


Рис. Зависимость безразмерных критических скоростей Λ от изменения L/R для резиновых цилиндрических труб: а – жёстко закрепленных с обоих торцов, б – консольных

Аналогичное исследование приведено для системы такой же конфигурации, но с граничными условиями в виде консольного закрепления (рисунок (б)). В данном случае оболочечная постановка задачи

обеспечивает хорошее совпадение с экспериментом на всём рассмотренном интервале отношений L/R . Тогда как при формулировке проблемы, где движение тела описывается в рамках линейной теории упругости, не представляется возможным правильно оценить границу устойчивости коротких труб ($L/R < 12$).

Заключение

Разработана модель и конечно-элементный алгоритм её численной реализации. Модель предназначена для исследования динамической устойчивости ненагруженных тел вращения сложной геометрии, взаимодействующих с внутренним невязким сжимаемым потоком жидкости или газа. Проведён ряд численных экспериментов для систем с различными видами граничных условий. Основываясь на представленных данных, можно сделать вывод, что для рассмотренных конфигураций решение в рамках линейной теории упругости для трубы и потенциальной теории течения для жидкости позволяет получить результаты, количественно и качественно совпадающие с экспериментальными данными и работами других авторов, выполненных с применением различных теорий.

Библиографический список

1. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // Изв. РАН. МТТ. – 2008. – № 3. – С. 189–199.
2. Zhang Y.L., Gorman D.G., Reese J.M. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid // Thin-Walled Structures. – 2003. – No. 41. – P. 1103–1127.
3. Zhang Y.L., Gorman D.G., Reese J.M. Finite element analysis of the vibratory characteristics of cylindrical shells conveying fluid // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. – 2002. – Vol. 191. – P. 5207–5231.
4. Zhang Y.L., Gorman D.G., Reese J.M. A comparative study of axisymmetric finite elements for the vibration of thin cylindrical shells conveying fluid // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 2002. – Vol. 54. – P. 89–110.
5. Zhang Y.L., Gorman D.G., Reese J.M. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid // Thin-Walled Struct. – 2003. – Vol. 41. – P. 1103–1127.

6. Kochupillai J., Ganesan N., Padmanabhan C. A semi-analytical coupled finite element formulation for shells conveying fluids // *Comput. Struct.* – 2002. – Vol. 80, No. 3–4. – P. 271–286.

7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

8. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 256 с.

10. Lindholm U.S., Kana D.D., Abramson H.N. Breathing vibration of a circular cylindrical shell with an internal liquid // *Journal of Aeronautical Science.* – 1962. – Vol. 29. – P. 1052–1059.

11. M.P. Païdoussis, J.-P. Denise. Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid // *Journal of Sound and Vibration.* – 1972. – Vol. 20. – P. 9–26.

References

1. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Numerical investigation of boundary conditions on the dynamic behavior of cylindrical shells with flowing fluid [Chislennoe issledovanie vliyaniya granichnykh uslovij na dinamiku povedeniya tsilindricheskoj obolochki s protekayushhej zhidkost'yu]. *Mechanics of Solids – Izvestiya RAN. MTT*, 2008, No. 3, P. 189–199.

2. Zhang Y.L., Gorman D.G., Reese J.M. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid. *Thin-Walled Structures*, 2003, No. 41, P. 1103–1127.

3. Zhang Y.L., Gorman D.G., Reese J.M. Finite element analysis of the vibratory characteristics of cylindrical shells conveying fluid. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, 2002, Vol.191, P. 5207–5231.

4. Zhang Y.L., Gorman D.G., Reese J.M. A comparative study of axisymmetric finite elements for the vibration of thin cylindrical shells conveying fluid. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 2002, Vol.54, P. 89-110.

5. Zhang Y.L., Gorman D.G., Reese J.M. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid. *Thin-Walled Struct*, 2003, Vol. 41, P. 1103–1127.

6. Kochupillai J., Ganesan N., Padmanabhan C. A semi-analytical coupled finite element formulation for shells conveying fluids. *Comput. Struct*, 2002, Vol. 80, No. 3–4, P. 271–286.

7. Timoshenko S.P., Gudier D. Theory of elasticity [*Teoriya uprugosti*]. Moscow, 1975, 576 p.

8. Volmir A.S. Shells in the flow of liquid and gas. Problems of hydroelasticity [*Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti*]. Moscow, 1979, 320 p.

9. Zenkevich O. The finite element method in engineering [*Metod konechnykh ehlementov v tekhnike*]. Moscow, 1975, 256 p.

10. Lindholm U.S., Kana D.D., Abramson H.N. Breathing vibration of a circular cylindrical shell with an internal liquid. *Journal of Aeronautical Science*, 1962, Vol.29, P.1052–1059.

11. Païdoussis M.P., Denise J.-P. Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1972, Vol.20, P. 9–26.

Об авторах

Лекомцев Сергей Владимирович (Пермь, Россия) – аспирант, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Акад. Королёва, 1, e-mail: lekomtsev@icmm.ru).

Бочкарёв Сергей Аркадьевич (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Акад. Королёва, 1, e-mail: bochkarev@icmm.ru).

About the authors

Lekomtsev Sergey Vladimirovich (Perm, Russia) – postgraduate, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (614013, 1, Koroleva st., Perm, Russia, e-mail: lekomtsev@icmm.ru).

Bochkarev Sergey Arkadyevich (Perm, Russia) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (614013, 1, Koroleva st., Perm, Russia, e-mail: bochkarev@icmm.ru).

Получено 3.06.2011