

В.И. Ерофеев, А.О. Мальханов

Нижегородский филиал Института машиноведения
им. А.А. Благонравова РАН, Нижний Новгород, Россия

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ

Системы динамических уравнений магнитоупругости для стержня, пластины и упругой трехмерной среды приведены к эволюционным уравнениям относительно продольной деформации. Продемонстрирована возможность формирования интенсивных пространственно-локализованных магнитоупругих волн (уединенные волны деформации в стержне; двумерные квазиплоские волновые пучки в пластине; трехмерные квазиплоские волновые пучки в упругой проводящей среде).

Ключевые слова: магнитоупругость, волна, нелинейность, локализация.

V.I. Erofeyev, A.O. Malkhanov

A.A. Blagonravov Mechanical Engineering Institute,
Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

NONLINEAR LOCALIZED MAGNETOELASTIC WAVES

System dynamic equations magnetoelasticity for rods, plates and elastic three-dimensional environment are to evolution equations with respect to the longitudinal strain. Demonstrated the possibility of the formation of intense space-localized magnetoelastic waves (solitary waves of strain in the rod; quasiplanar dimensional wave beams in a plate, three-dimensional quasiplanar wave beams in an elastic conductive medium).

Keywords: magnetoelasticity, wave, nonlinearity, localization.

Современные проблемы науки и техники стимулируют создание и развитие теории сопряженных полей различной физической природы. Одной из интенсивно развивающихся областей этой теории является электромагнитоупругость, изучающая взаимодействие механических и электромагнитных полей в материалах и конструкциях. Теория электромагнитоупругого взаимодействия развивается сегодня по нескольким направлениям. Основные из них:

1) магнитоупругость (и магнитотермоупругость) электропроводящих ферромагнитных тел в постоянном внешнем магнитном поле [1, 2];

2) магнитоупругость магнитоактивных, в том числе пьезомагнитных, ферромагнитных и магнестрикционных сред [3, 4];

3) электроупругость пьезоэлектрических и электрострикционных сред [5, 6].

Результаты, о которых речь пойдет в данной статье, получены в рамках первого из упомянутых выше направлений. Здесь предполагается, что упругое деформируемое электропроводящее тело находится в начальном постоянном магнитном поле и электромагнитное взаимодействие между телом и полем осуществляется посредством пондеромоторных сил Лоренца, входящих в уравнения движения упругой среды, и обобщенного закона Ома для материальной частицы, движущейся в магнитном поле.

Системы динамических уравнений магнитоупругости для стержня, пластины и упругой трехмерной среды приведены к эволюционным уравнениям относительно продольной деформации. Продемонстрирована возможность формирования интенсивных пространственно-локализованных магнитоупругих волн (уединенные волны деформации в стержне; двумерные квазиплоские волновые пучки в пластине; трехмерные квазиплоские волновые пучки в упругой проводящей среде).

1. Математические модели

При выводе системы уравнений магнитоупругости предполагается, что упругое деформируемое электропроводящее тело находится в начальном постоянном магнитном поле и электромагнитное взаимодействие между телом и полем осуществляется посредством пондеромоторных сил Лоренца. Токами смещения пренебрегается. Считается, что свободные электрические заряды отсутствуют.

Таким образом, уравнения магнитоупругости имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{F}_{\text{нел}} + \frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H} \right), \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H} \right] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{H}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь \vec{u} – вектор перемещений; λ, μ – модули упругости (константы Ламе) второго порядка; ρ – плотность материала; \vec{H} – напряженность

магнитного поля; σ – проводимость; c – скорость света в вакууме. Вектор $\vec{F}_{\text{нел}}$ включает в себя слагаемые, обусловленные учетом упругой нелинейности.

Для однородной нелинейно-упругой пластины, находящейся во внешнем магнитном поле, система уравнений магнитоупругости получается из общей системы (1.1) путем применения метода приведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям равновесия или динамики пластин. Этот метод заключается в выражении напряженно-деформированного состояния в произвольной точке тела через новые величины, заданные вдоль срединной поверхности пластины. При этом переход от бесконечного числа степеней свободы в направлении нормали $\vec{x}_{\perp} = (y, z)$ к конечному числу степеней свободы (конечному числу мод) осуществляется путем аппроксимации смещений многочленами. Она производится, как правило, по степеням поперечных координат, и в качестве малого параметра выступает относительная толщина пластины $2k_z h$, где h – полутолщина пластины, k_z – нормальная компонента волнового вектора.

Система уравнений магнитоупругости (1.1) для модели, описывающей продольные колебания стержня (в этом случае преобладает продольная компонента вектора перемещений u_x) и учитывающей как кинетическую энергию толщинных колебаний, так и потенциальную энергию сдвиговых деформаций, имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - c_0^2 \left(1 + \frac{6\alpha_1}{E} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - v^2 R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - c_{\tau}^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) + \\ & + \frac{1}{4\pi\rho} \left[H_z \frac{\partial H_z}{\partial x} - H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} \right] = 0, \\ & \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} = 0, \\ & \frac{\partial H_y}{\partial t} + H_y \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = 0, \\ & \frac{\partial H_z}{\partial t} + H_z \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, $R = \sqrt{J_0/F}$ – полярный радиус инерции, $J_0 = \iint_F (y^2 + z^2) dF$ – полярный момент инерции, F – площадь поперечного сечения стержня, $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ – модуль Юнга, $\alpha_1 = \frac{E}{2} + \frac{3\lambda}{2} + A + B(1 - 2\nu) + \frac{C}{3}(1 - 6\nu)$ – коэффициент упругой нелинейности, $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны в стержне, $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны в стержне.

2. Локализованные нелинейные магнитоупругие волны в стержне

Предполагается, что суммарное магнитное поле состоит из его постоянного значения и возмущений, появляющихся в результате взаимодействия с полем деформаций:

$$\vec{H} = H_0 \vec{n} + \vec{h}, \quad (2.1)$$

где \vec{n} – вектор нормали к поверхности стержня, \vec{h} – малое возмущение магнитного поля.

Полагаем, что внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью H_0 направлено под произвольным углом $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ к направлению распространения продольной волны. Тогда соотношение для вектора перемещений, вектора поправки к магнитному полю и вектора суммарного магнитного поля примет вид

$$\vec{u} = (u_x, 0, 0), \vec{h} = (h_x, h_y, h_z), \vec{H} = (H_0 \cos \varphi + h_x, h_y, H_0 \sin \varphi + h_z), \quad (2.2)$$

где h_x, h_y, h_z – компоненты вектора малого возмущения магнитного поля.

Методом многих масштабов система уравнений магнитоупругости (1.2) сводится к эволюционному уравнению относительно продольной деформации (U)

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \delta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad (2.3)$$

где коэффициенты α, β, δ содержат напряженность магнитного поля, проводимость и модули упругости второго и третьего порядков, а коэффициент δ имеет обратно пропорциональную зависимость еще и от проводимости материала σ . Кроме того, коэффициенты зависят от угла φ .

Уравнение (2.3) носит название уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргера. Оно имеет решение в виде локализованной волны (кинка):

$$U = A \exp(\xi) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{2}\right), \xi = \xi_0(x - 2at), \xi_0 = \sqrt{-\frac{a}{3\beta}}, \quad (2.4)$$

$$a = -\frac{3\delta^2}{25\beta}, A = -\frac{a}{\alpha}, V_k = 2a, \Delta = \frac{2}{\xi_0}.$$

Для конденсированных сред в магнитных полях до 10 Тл скорость волны Альфвена меньше скорости распространения продольной волны [7], поэтому изменение параметров представлено на интервале

$0 \leq \frac{c_A^2}{c_0^2} < 1$, где $c_A = \sqrt{\frac{H_0^2}{4\pi\rho}}$ – скорость волны Альфвена: величина,

прямопропорциональная напряженности внешнего постоянного магнитного поля.

Анализ зависимостей параметров кинка от напряженности внешнего магнитного поля показывает, что с увеличением напряженности

внешнего магнитного поля амплитуда и скорость локализованной волны убывают, в то время как ее ширина возрастает (рис. 1).

В результате исследования влияния ориентации внешнего магнитного поля на параметры кинка обнаружено, что амплитуда и скорость принимают максимальное значение, когда внешнее магнитное поле параллельно направлению распространения кинка

($\varphi = 0, \pi$) и принимает минимальное значение, когда поле перпендику-

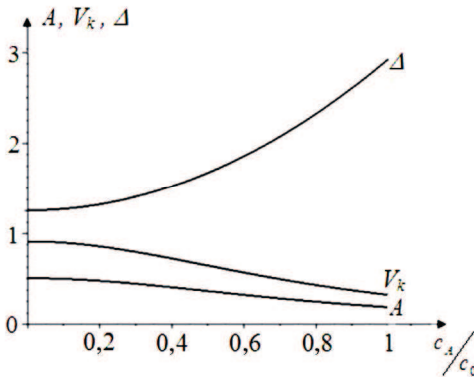


Рис. 1. Зависимость параметров кинка от напряженности внешнего магнитного поля

лярно направлению распространения волны $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Ширина же, наоборот, принимает максимальное значение, если внешнее поле ортогонально направлению распространения волны и принимает минимальное значение, когда поле сонаправлено с направлением распространения волны.

Если стержень является идеальным проводником, то в эволюционном уравнении (2.3) можно пренебречь слагаемым с коэффициентом δ , поскольку значение проводимости σ близко к бесконечности. Эволюция магнитоупругой волны в этом случае будет описываться уравнением Кортевега–де Вриза, допускающим локализованное решение в виде солитона отрицательной полярности:

$$U = -\frac{A}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)}, \quad (2.5)$$

$$\xi = x - V_s t, \quad A = \frac{3V_s}{\alpha}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{12\beta}{A\alpha}}$$

Исследование влияния магнитного поля на параметры солитона дает следующие результаты: с ростом напряженности амплитуда и ширина солитона возрастает, а его скорость убывает (рис. 2).

Анализ зависимостей параметров солитона от ориентации внешнего магнитного поля показывает, что амплитуда и ширина принимают максимальное значение, когда внешнее магнитное поле перпендикулярно направлению распространения солитона $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, и принимают минимальное значение, когда поле параллельно направлению распространения волны ($\varphi = 0, \pi$). Скорость же наоборот принимает максимальное значение, если внешнее поле параллельно направлению

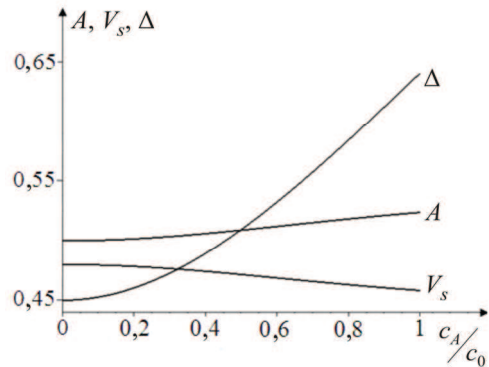


Рис. 2. Влияние магнитного поля на параметры солитона

распространения волны и принимает минимальное значение, когда поле ортогонально направлению распространения волны.

4. Двумерные и трехмерные локализованные нелинейные магнитоупругие волны

Рассматривается распространение продольной волны в однородной нелинейно-упругой пластине, находящейся во внешнем магнитном поле. Предполагается, что пучок продольных волн распространяется вдоль оси x . Пучок считается ограниченным, слаборасходящимся и близким к плоской волне. Рассматривается область, в которой параметры нелинейности, дисперсии и дифракции имеют одинаковый порядок ($\sim \varepsilon$).

Внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью H_0 имеет произвольную ориентацию в пространстве, определяемую углами $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Вектор перемещений, вектор малого возмущения магнитного поля и вектор суммарного магнитного поля имеют вид

$$\vec{u} = (u, v, 0), \vec{h} = (h_x, h_y, h_z), \quad (3.1)$$

$$\vec{H} = (H_0 \sin \theta \cos \varphi + h_x, H_0 \sin \theta \sin \varphi + h_y, H_0 \cos \theta + h_z), \quad (3.2)$$

где u, v – проекции вектора перемещений на оси x и y .

Вводятся лучевые координаты

$$\xi = x - \tilde{c}t; \eta = \varepsilon x; \chi = \sqrt{\varepsilon}y \quad (3.3)$$

и новые функции

$$\begin{aligned} u &= u; v = \sqrt{\varepsilon}v; \\ h_z &= h_z; h_x = \sqrt{\varepsilon}h_x; h_y = \sqrt{\varepsilon}h_y, \end{aligned} \quad (3.4)$$

позволяющие привести систему уравнений магнитоупругости в первом приближении по ε к эволюционному уравнению относительно продольной деформации $U = \partial u / \partial \xi$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - \delta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) + \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} = 0, \quad (3.5)$$

где коэффициенты содержат напряженность магнитного поля, проводимость и модули упругости второго и третьего порядков, а коэффициент δ , как и ранее, обратно пропорционально зависит еще и от проводимости материала. Все коэффициенты зависят еще от углов θ и φ .

Уравнение (3.5) соединяет в себе известные модельные уравнения Хохлова–Заболотской–Кузнецова (получается при $\beta = 0$) и Кадомцева–Петвиашвили (при $\delta = 0$).

Аналитическое решение уравнения (3.5) имеет вид

$$U(\xi, \chi, \eta) = -\frac{3}{25} \frac{\delta^2}{\alpha\beta} \left(1 + \operatorname{th} \left(\frac{k_0 \xi + k_1 \chi + k_2 \eta}{2} \right) \right)^2, \quad (3.6)$$

где $k_0 = \frac{1}{5} \frac{\delta}{\beta}$, $k_2 = -\frac{6}{125} \frac{\delta^3}{\beta^2} + \frac{5\beta\gamma k_1^2}{\delta}$, k_1 – произвольная постоянная, при этом $k_1^2 > \frac{6}{625} \frac{\delta^4}{\gamma\beta^3}$. С помощью (3.6) проанализированы изменения ам-

плитуды и ширины волнового пучка вдоль каждой из координат в зависимости от величины внешнего магнитного поля. Показано, что с ростом напряженности внешнего магнитного поля амплитуда волнового пучка убывает. В то же время ширина пучка вдоль каждой из координатных осей возрастает с увеличением величины магнитного поля, причем вдоль продольной координаты ξ ширина пучка на порядок больше, чем вдоль поперечной χ (рис. 3, 4):

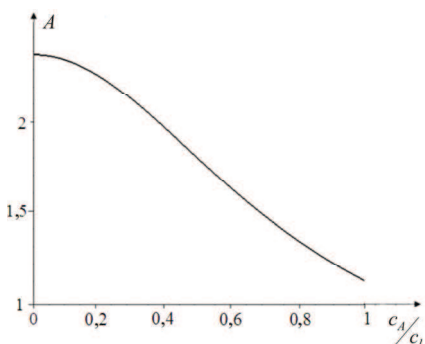


Рис. 3. Амплитуда волнового пучка

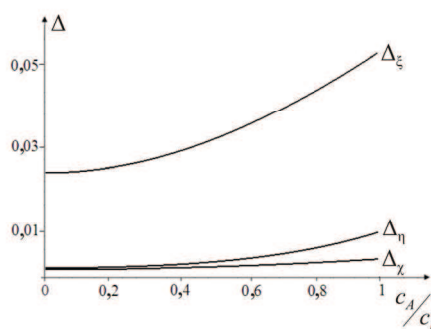


Рис. 4. Ширина пучка

Проанализированы изменения амплитуды A и ширины пучка вдоль каждой из координатных осей в зависимости от ориентации внешнего

магнитного поля. На рис. 5 изображена поверхность A , которая представляет собой зависимость амплитуды волны от углов θ и φ .

Из рисунка видно, что с ростом угла φ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ амплитуда волны убывает. При $\theta = 0, \pi$ она принимает минимальное значение и не зависит от величины угла φ . При $\theta = \frac{\pi}{2}$ амплитуда волны принимает максимальное значение. С ростом угла θ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ амплитуда волны возрастает, а в зависимости от угла φ принимает свое максимальное значение при $\theta = 0, \pi$. Амплитуда при $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ принимает минимальное значение и не зависит от величины угла θ .

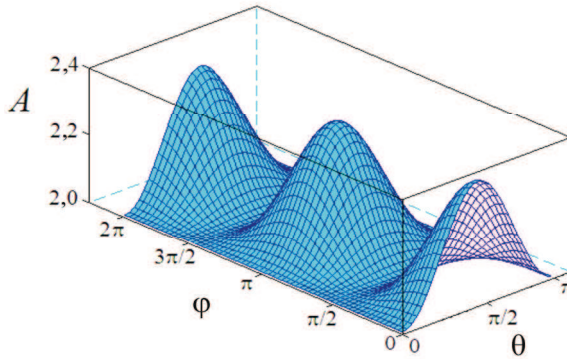


Рис. 5. Зависимость амплитуды волны от углов θ и φ

Численное моделирование двумерных волновых процессов, описываемых уравнением (3.5), проведено в [8].

Для квазиплоского слаборасходящегося волнового пучка, распространяющегося в трехмерной упругой среде, введены безразмерные переменные

$$u = \frac{u_x}{\varepsilon \Lambda d}, v = \frac{u_y}{\varepsilon \Lambda d}, w = \frac{u_z}{\varepsilon \Lambda d}, x' = \frac{x}{\Lambda d}, y' = \frac{y}{\Lambda d}, z' = \frac{z}{\Lambda d}, t' = \frac{c_l t}{\Lambda d} \quad (3.7)$$

и лучевые координаты: $\xi = x' - \tilde{c} t', \eta = \varepsilon x', \chi = \sqrt{\varepsilon} y', \zeta = \sqrt{\varepsilon} z'$, позволяющие привести систему уравнений магнитоупругости (1.1) в первом

приближении по ε к одному скалярному уравнению для осевой деформации $U = \partial u / \partial \xi$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right] + \gamma_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (3.8)$$

где коэффициенты содержат напряженность магнитного поля, проводимость и модули упругости второго и третьего порядков, Λ – безразмерный масштаб волны, Λd – длина волны, где \tilde{c} – характерная скорость, заранее неизвестная.

Если внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью H_0 имеет произвольную ориентацию в пространстве, которая определяется углами $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, то вектор суммарного магнитного поля в рассматриваемом случае имеет компоненты (3.2), а коэффициенты в (3.8) будут зависеть еще и от углов θ и φ .

Уравнение (3.8) совпадает с известным в теории нелинейных волн трехмерным уравнением Хохлова–Заболотской–Кузнецова. Решение этого уравнения имеет вид

$$U = A - B \operatorname{th} \left[-\frac{\alpha B}{2\beta} \xi + \sqrt{\frac{1}{4\gamma_1}} \chi + \sqrt{\frac{1}{4\gamma_2}} \zeta + \frac{2\beta^2 + \alpha^3 AB^2}{2\alpha\beta B} \eta \right], \quad (3.9)$$

где A, B – произвольные постоянные.

С ростом напряженности внешнего магнитного поля, ширина волнового пучка (3.9) вдоль оси ξ уменьшается, в то время как вдоль координатных осей η, ζ возрастает. Ширина вдоль поперечной координаты χ сначала убывает, затем начинает возрастать. Однако в силу сказанного выше об интервале изменения величины c_A/c_l практический интерес представляет только участок, где ширина пучка вдоль оси χ убывает. Отметим, что значения ширины волнового пучка вдоль оси ξ на три порядка больше, чем значения ширин волнового пучка вдоль осей χ и ζ , и на шесть порядков больше, чем значения ширины (которую можно рассматривать, как поправку порядка ε к ширине вдоль оси ξ) вдоль оси η .

На (рис. 6, 7) изображены сечения поверхности $\Delta_\xi(\varphi, \theta)$, которая представляет собой зависимость ширины волнового пучка вдоль оси ξ от углов θ и φ , плоскостями $\varphi = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$.

С ростом угла φ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ширина волнового пучка вдоль оси ξ убывает. При $\theta = 0, \pi$ она принимает минимальное значение и не зависит от величины угла φ . При $\theta = \frac{\pi}{2}$ ширина волнового пучка вдоль оси ξ принимает максимальное значение. С ростом угла θ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ширина волнового пучка вдоль оси ξ возрастает, а в зависимости от угла φ принимает свое максимальное значение при $\varphi = 0, \pi$. Ширина пучка вдоль оси ξ при $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ принимает минимальное значение и не зависит от величины угла θ .

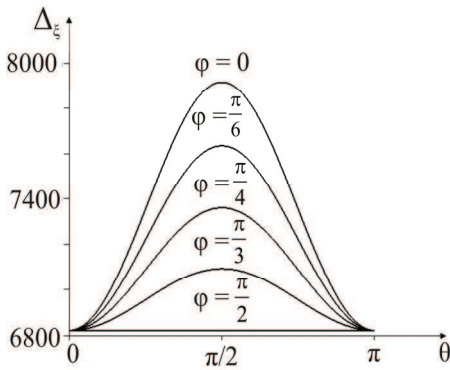


Рис. 6. Зависимость ширины волнового пучка вдоль оси от угла θ

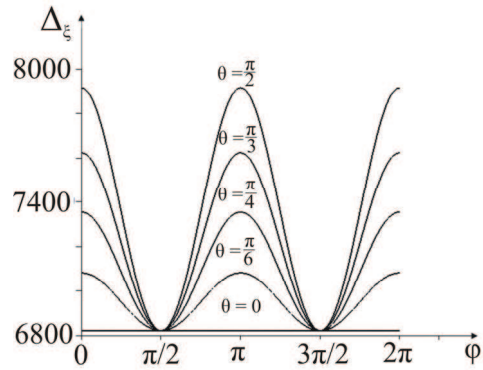


Рис. 7. Зависимость ширины волнового пучка вдоль оси от угла φ

Зависимости ширин волнового пучка вдоль остальных координатных осей от ориентации магнитного поля качественно похожи на рассмотренные выше, с той лишь разницей, что значения углов, при которых ширины принимают минимальные и максимальные значения, могут не совпадать с этими значениями для ширины волнового пучка вдоль оси ξ .

Следует отметить, что в отличие от стержня для пластины и упругой среды относительная степень влияния ориентации магнитного поля к его напряженности существенно больше.

Более подробно содержание публикуемой работы изложено в статьях [11–15].

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (грант № 09-08-00188).

Библиографический список

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд-во Ереван. гос. ун-та, 2006. – 492 с.
3. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
4. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
5. Tzou H.S. Piezoelectric Shells. – Dordrecht: Kluwer, 1993. – 480 p.
6. Rogacheva N. The Theory of Piezoelectric Plates and Shells. – Boca Raton: CRC Press, 1994. – 260 p.
7. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. – Киев: Наукова думка, 1991. – 200 с.
8. Нелинейные локализованные продольные волны в пластине, взаимодействующей с магнитным полем / В.И. Ерофеев, А.И. Землянухин, В.М. Катсон, А.О. Мальханов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 5–15.

References

1. Ambarcumjan S.A., Bagdasarjan G.E., Belubekjan M.V. Magnitoupugost of thin covers and plates [*Magnitoupugost' tonkih obolochek i plastin*]. *Moskow: Nauka*, 1977. – 272 p.
2. Bagdasarjan G.E., Danojan Z.N. elektromagnitoupugie of a wave [*Jelektromagnitoupugie volny*]. *Erevan: Izd-vo EGU*, 2006. – 492 p.
3. Novackij V. Electromagnetic effects in firm bodies [*Jelektromagnitnye jeffekty v tverdyh telah*]. *Moskow: Mir*, 1986. – 160 p.
4. Mozhen Zh. Mehanika of electromagnetic continuous environments [*Mehanika jelektromagnitnyh sploshnyh sred*]. *Moskow: Mir*, 1991. – 560 p.

5. Tzou H.S. Piezoelectric Shells. *Dordrecht: Kluwer*, 1993. – 480 p.
6. Rogacheva N. The Theory of Piezoelectric Plates and Shells. *Boca Raton: CRC Press*, 1994. – 260 p.
7. Selezov I.T., Korsunskij S.V. Non-stationary and nonlinear waves in electrospending environments [*Nestacionarnye i nelinejnye volny v jelek-troprovodjavih sredah*]. *Kiev: Naukova dumka*, 1991. – 200 p.
8. Erofeev V.I., Zemljanuhin A.I., Katson V.M., Mal'hanov A.O. Nonlinear the localized longitudinal waves in a plate cooperating with a magnetic field [*Nelinejnye lokalizovannye prodol'nye volny v plastine, vzaimodejstvujuwej s magnitnym polem*]. *Vychislitel'naja mehanika sploshnyh sred*, 2010. – Vol. 3, No. 4. – P. 5–15.

Об авторах

Ерофеев Владимир Иванович (Нижний Новгород, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора по научной работе Нижегородского филиала Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, д.85, e-mail: erf04@sinn.ru).

Мальханов Алексей Олегович (Нижний Новгород, Россия) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Нижегородского филиала Института машиноведения им. А.А.Благонравова РАН (603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, д.85, e-mail: alexey.malkhanov@gmail.com).

About the authors

Yerofeev Vladimir Ivanovich (Nizhny Novgorod, Russia) – Doctor of physical and mathematical sciences, professor, deputy director on scientific work of A.A. Blagonravov Mechanical Engineering Institute, RAS (603024, 85, Belinsky's street, Nizhny Novgorod, e-mail: erf04@sinn.ru).

Malhanov Alexey Olegovich (Nizhny Novgorod, Russia) – Candidate of physical and mathematical sciences, research assistant of A.A. Blagonravov Mechanical Engineering Institute, RAS (603024, 85, Belinsky's street, Nizhny Novgorod, e-mail: alexey.malkhanov@gmail.com).

Получено 3.06.2011