УДК 539.3

С.О. Саркисян, А.Ж. Фарманян

Гюмрийский государственный педогогический институт,
Гюмри, Республика Армения

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ (ОРТОТРОПНЫХ) УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

На основе метода гипотез (принятые гипотезы представляют собой качественные стороны асимптотического решения граничной задачи микрополярной теории упругости в тонких областях) построена общая прикладная теория микрополярных упругих ортотропных тонких оболочек.

Ключевые слова: микрополярный, ортотропный, упругий, тонкая оболочка, модель.

S.H. Sarkisjan, A.J. Farmanyan

The Gyumri State Pedagogical Institute, Gyumri, Armenia

MATHENATICAL MODEL OF MICROPOLAR ANISOTROPIC (ORTHOTROPIC) ELASTIC THIN SHELLS

In this paper the general applied of micropolar elastic ortotropic thin shells is constructed on the basis of hypotheses method. Accepted hypotheses are formulated on the basis of qualatative results of the asimptotic solution of the boundary problem of micropolar theory of elasticity in thin regions.

Keywords: micropolar, orthotropic, elastic, thin, shell, model.

В последнее время в связи с современными проблемами механики сред со структурой, микро- и наномеханики заметно возрос интерес к моментной механике упругих деформируемых тел, а также построению на их основе упрощенных математических моделей. Особое место занимает проблема построения общей теории упругих тонких балок, пластин и оболочек на основе микрополярной (моментной, несимметричной) теории упругости [1–11]. Современный обзор работ в этом направлении представлен в [12, 13].

Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких оболочек, пластин (балок) заключается в приближенном сведении трехмерной задачи микрополярной теории упругости к адекватной прикладной двумерной (одномерной) краевой задаче.

В работах [14–18] формулируются гипотезы (которые представляют результат асимптотического метода интегрирования граничной задачи микрополярной теории упругости в тонких областях), на основе которых построены общие прикладные теории микрополярных изотропных упругих тонких оболочек, пластин и балок.

В развитие подхода, представленного в работах [14–18], в данной статье построена общая модель микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим анизотропную (ортотропную) оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости для ортотропного материала с независимыми полями перемещений и вращений [19–21].

Уравнения равновесия

Эти уравнения коротко можем записать так: $\sigma_{mn,n} = 0$, $\mu_{mn,n} + э_{mnk} \cdot \sigma_{nk} = 0$.

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(H_j\sigma_{ii}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(H_i\sigma_{\text{ji}}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_iH_j\sigma_{3i}\right)+\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\sigma_{\text{ij}}+\\+H_j\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\sigma_{i3}-\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}\sigma_{jj}=0,\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{23}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\sigma_{33}\right)-\\-H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\sigma_{11}-H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}\sigma_{22}=0,\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(H_j\mu_{ii}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(H_i\mu_{ji}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_iH_j\mu_{3i}\right)+\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\mu_{ij}+\\+H_j\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\mu_{i3}-\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}\mu_{jj}+(-1)^jH_iH_j\left(\sigma_{j3}-\sigma_{3j}\right)=0,\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{23}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\mu_{33}\right)-H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\mu_{11}-$$
$$-H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}\mu_{22}+H_1\cdot H_2\left(\sigma_{12}-\sigma_{21}\right)=0. \qquad (1.4)$$

Физические соотношения запишем в матричной форме:

$$\gamma = \mathrm{A}\cdot\sigma; \quad \chi = \mathrm{B}\cdot\mu, \qquad (1.5)$$

где

$$\sigma=\left(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12},\sigma_{21},\sigma_{13},\sigma_{31},\sigma_{23},\sigma_{32}\right)^T;$$
$$\mu=\left(\mu_{11},\mu_{22},\mu_{33},\mu_{12},\mu_{21},\mu_{13},\mu_{31},\mu_{23},\mu_{32}\right)^T;$$
$$\gamma=\left(\gamma_{11},\gamma_{22},\gamma_{33},\gamma_{12},\gamma_{21},\gamma_{13},\gamma_{31},\gamma_{23},\gamma_{32}\right)^T;$$
$$\chi=\left(\chi_{11},\chi_{22},\chi_{33},\chi_{12},\chi_{21},\chi_{13},\chi_{31},\chi_{23},\chi_{32}\right)^T.$$

Матрица $A(B)$ (a и b с соответствующими индексами представляют собой упругие константы микрополярного ортотропного материала) выражается так:

$$A(B)=\begin{pmatrix}
a_{11}(b_{11}) & a_{12}(b_{12}) & a_{13}(b_{13}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_{12}(b_{12}) & a_{22}(b_{22}) & a_{23}(b_{23}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_{13}(b_{13}) & a_{23}(b_{23}) & a_{33}(b_{33}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a_{77}(b_{77}) & a_{78}(b_{78}) & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a_{78}(b_{78}) & a_{88}(b_{88}) & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}(b_{66}) & a_{56}(b_{56}) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{56}(b_{56}) & \tilde{a}_{55}(\tilde{b}_{55}) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44}(b_{44}) & a_{45}(b_{45})\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}(b_{45}) & a_{55}(b_{55})
\end{pmatrix}$$

Геометрические соотношения

Коротко их можно записать так: $\gamma_{nm}=v_{m,n}-э_{knm}\cdot\omega_k$, $\chi_{nm}=\omega_{m,n}$.

$$\gamma_{ii}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial v_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}v_j+\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}v_3,\ \ \gamma_{33}=\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_3},$$
$$\gamma_{ij}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial v_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}v_i+\left(-1\right)^i\omega_3,$$
$$\gamma_{i3}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}v_i+\left(-1\right)^j\omega_j;\ \ \gamma_{3i}=\frac{\partial v_i}{\partial\alpha_3}+\left(-1\right)^i\omega_j, \qquad (1.6)$$

$$\chi_{ii}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\omega_j+\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\omega_3,$$

$$\chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_3},\ \ \chi_{ij}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\omega_i.$$

$$\chi_{3i}=\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_3},$$

$$\chi_{i3}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\omega_i. \tag{1.7}$$

Индексы i, j принимают значения: $i, j=1,2,$ причем $i\neq j$.
Здесь $\sigma_{ii},\sigma_{33},\sigma_{ij},\sigma_{i3},\sigma_{3i},\mu_{ii},\mu_{33},\mu_{ij},\mu_{i3},\mu_{3i}$ – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; $\gamma_{ii},\gamma_{33},\gamma_{ij},\gamma_{i3},\gamma_{3i},\chi_{ii},\chi_{33},\chi_{ij},\chi_{i3},\chi_{3i}$ – компоненты тензоров деформаций и изгиба–кручений; $v_i,v_3,\omega_i,\omega_3$ – компоненты векторов перемещения и независимого поворота; H_i,H_3 – коэффициенты Ляме криволинейной ортогональной системы координат, принятой в теории оболочек [22] $\left(H_i=A_i\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right),\ H_3=1\right)$.

К основным уравнениям (1.1)–(1.7) трехмерной микрополярной теории упругости для ортотропного тела будем присоединять граничные условия.

На лицевых поверхностях $\alpha_3=\pm h$ примем граничные условия первой граничной задачи микрополярной теории упругости:

$$\sigma_{3i}=\pm q_i^{\pm},\quad \sigma_{33}=\pm q_3^{\pm},\quad \mu_{3i}=\pm m_i^{\pm},\quad \mu_{33}=\pm m_3^{\pm}. \tag{1.8}$$

На поверхности края оболочки Σ будем рассматривать следующие три основные типа граничных условий: 1) когда заданы силовые и моментные напряжения; 2) когда точки поверхности Σ закреплены; 3) когда заданы трехмерные смешанные условия типа шарнирного опирания.

Предполагается, что толщина $(2h)$ оболочки мала по сравнению с характерными радиусами кривизны (R_i) срединной поверхности оболочки.

Очевидно, что построение решении граничной задачи трехмерной микрополярной теории ортотропных оболочек (1.1)–(1.8) сопряжено с почти непреодолимыми математическими трудностями, поэтому будем идти по пути сведения трехмерных уравнений теории микрополярной упругости к прикладной теории микрополярных ортотропных тонких оболочек.

Считая, что метод гипотез наряду с чрезвычайной наглядностью очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, будем строить теорию микрополярных упругих ортотропных оболочек на основе метода гипотез, обобщая подход работ [14–18] построения теории микрополярных упругих изотропных оболочек.

2. Модель микрополярных упругих ортотропных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений

Сформулируем те предположения (гипотезы), на основе которых будем строить модель микрополярных ортотропных тонких оболочек [14–18]:

А. В качестве исходной примем гипотезу прямой линии, т.е. будем считать, что нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной поверхности до деформации, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной срединной поверхности, а поворачивается на некоторый угол, при этом не изменяя своей длины. Вследствии этого имеем линейный закон изменения перемещений по толщине оболочки

$$v_i = u_i(\alpha_1,\alpha_2) + \alpha_3\psi_i(\alpha_1,\alpha_2), \quad v_3 = w(\alpha_1,\alpha_2). \tag{2.1}$$

Будем дополнительно считать также, что свободные повороты по толщине оболочки изменяются также линейным законом следующего характера:

$$\omega_i = \Omega_i(\alpha_1,\alpha_2), \quad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1,\alpha_2) + \alpha_3\iota(\alpha_1,\alpha_2). \tag{2.2}$$

Здесь u_i, w – перемещения, Ω_i, Ω_3 – свободные повороты точек срединной поверхности оболочки; ψ_i – полные углы поворота первоначально нормального элемента, а ι – представляет собой интенсивность поворота точек трехмерной оболочки вокруг нормали к срединной поверхности.

Б. Силовым напряжением σ_{33} в обобщенном законе Гука (1.5) относительно силовых напряжений σ_{11}, σ_{22} можно пренебрегать.

В. Относительно единицы величинами вида $\frac{\alpha_3}{R_i}$ можно пренебрегать.

Г. При определении деформаций, изгиба–кручений, силовых и моментных напряжений сначала для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1, \alpha_2). \tag{2.3}$$

После определения указанных величин окончательные выражения для фукций σ_{3i} и μ_{33} определим как сумму значения (2.3) и результата интегрирования соответствующего уравнения равновесия (1.1) или (1.4) и потребуем для последних слагаемых условие, чтобы усредненная по толщине оболочки величина была равна нулю.

Отметим, что принятая гипотеза для перемещений (2.1) это по сути дела известная кинематическая гипотеза Тимошенко в классической уточненной теории упругих оболочек [23, 24]. С этой точки зрения гипотезу (2.1), (2.2) в целом назовем [14–18] обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек.

В соответствии с принятым законом распределения перемещений (2.1) и свободных поворотов (2.2), подставляя их в геометрические формулы (1.6), (1.7) и сохраняя в выражениях только линейные члены по α_3, находим

$$\begin{gathered}\gamma_{ii} = \Gamma_{ii}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 K_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), \ \gamma_{33} = 0, \\ \gamma_{ij} = \Gamma_{ij} + \alpha_3 K_{ij}, \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2), \gamma_{3i} = \Gamma_{3i}(\alpha_1, \alpha_2),\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\chi_{ii} = k_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), \ \chi_{33} = k_{33}(\alpha_1, \alpha_2), \ \chi_{ij} = k_{ij}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \chi_{3i} = 0, \ \chi_{i3} = k_{i3}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 l_{13}(\alpha_1, \alpha_2).\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\Gamma_{ii}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{w(\alpha_1, \alpha_2)}{R_i},$$

$$K_{ii}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi_i(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\psi_j(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\Gamma_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i(\alpha_1, \alpha_2) + (-1)^i \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$K_{ij}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\left(-1\right)^i\iota\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$\Gamma_{i3}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=-\upsilon_i+\left(-1\right)^j\Omega_j\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$\Gamma_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\psi_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\left(-1\right)^i\Omega_j\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \tag{2.6}$$

$$k_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\frac{\Omega_3\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{R_i},$$

$$k_{33}=\iota\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\ k_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$k_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{R_i}\Omega_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\ l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial\alpha_i},$$

$$\upsilon_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{R_i}.$$

Здесь Γ_{ii},Γ_{ij} – компоненты тангенциальной деформации, характеризующие деформацию срединной поверхности; величины $K_{ii},K_{ij},k_{ii},k_{ij}$ – характеризуют изгибную деформацию и скручивание срединной поверхности; Γ_{i3},Γ_{3i} – поперечные сдвиги; k_{i3},k_{3i} изменение кривизны и кручений в нормальных к срединной поверхности плоскостях; l_{i3} – гиперкривизны или гиперкручения.

На основе обобщенного закона Гука (1.5) (имея в виду также статические гипотезы Б), Г)) для силовых и моментных напряжений получим

$$\sigma_{ii}=\overset{0}{\sigma}_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\ \sigma_{33}=\overset{0}{\sigma}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$\sigma_{ij}=\overset{0}{\sigma}_{ij}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{ij}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\ \sigma_{i3}=\overset{0}{\sigma}_{i3}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$\sigma_{3i}=\overset{0}{\sigma}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\frac{1}{2}\left[\alpha_3^2-\frac{h^2}{3}\right]\overset{2}{\sigma}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$\mu_{ii}=\overset{0}{\mu}_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$\mu_{33}=\overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\overset{1}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)+\frac{1}{2}\left(\alpha_3^2-\frac{h^2}{3}\right)\overset{2}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\mu_{ij}=\overset{0}{\mu}_{ij}(\alpha_1,\alpha_2),\ \ \mu_{3i}=\overset{0}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\overset{1}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\mu_{i3}=\overset{0}{\mu}_{i3}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\overset{1}{\mu}_{i3}(\alpha_1,\alpha_2),$$

где

$$\overset{1}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_j\overset{0}{\sigma}_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_i\overset{0}{\sigma}_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}-$$
$$-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overset{0}{\sigma}_{ij}-\frac{1}{R_i}\overset{0}{\sigma}_{i3}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\overset{0}{\sigma}_{jj},$$

$$\overset{2}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)=\left[-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_j\overset{1}{\sigma}_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_i\overset{1}{\sigma}_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overset{1}{\sigma}_{ij}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\overset{1}{\sigma}_{jj}\right],$$

$$\overset{1}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\sigma}_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{0}{\sigma}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{R_1}\overset{0}{\sigma}_{11}+\frac{1}{R_2}\overset{0}{\sigma}_{22},$$

$$\overset{0}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{q_3^+-q_3^-}{2},\ \overset{1}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{q_3^++q_3^-}{2h},\ \overset{0}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{m_i^+-m_i^-}{2},$$
$$\overset{1}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{m_i^++m_i^-}{2h},$$

$$\overset{1}{\mu}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = -\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_j\overset{0}{\mu}_{ii}\right)}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_i\overset{0}{\mu}_{ji}\right)}{\partial\alpha_j} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overset{0}{\mu}_{ij} -$$

$$-\frac{\overset{0}{\mu}_{i3}}{R_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\overset{0}{\mu}_{jj} - (-1)^j\left(\overset{0}{\sigma}_{j3} - \overset{0}{\sigma}_{3j}\right),$$

$$\overset{1}{\mu}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = -\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{0}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2} + \frac{\overset{0}{\mu}_{11}}{R_1} + \frac{\overset{0}{\mu}_{22}}{R_2} - \left(\overset{0}{\sigma}_{12} - \overset{0}{\sigma}_{21}\right),$$

$$\overset{2}{\mu}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = \left[-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{1}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{1}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2} - \left(\overset{1}{\sigma}_{12} - \overset{1}{\sigma}_{21}\right)\right].$$

С целью приведения трехмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерной, что уже выполнено для перемещений, деформаций, изгибов–кручений, силовых и моментных напряжений, в теории микрополярных упругих оболочек вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}$, моменты $M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}$ и гипермоменты Λ_{i3}, которые с учетом предположения В) выражаются следующим образом:

$$T_{ii} = \int_{-h}^{h}\sigma_{ii}d\alpha_3,\ S_{ij} = \int_{-h}^{h}\sigma_{ij}d\alpha_3,\ N_{i3} = \int_{-h}^{h}\sigma_{i3}d\alpha_3,\ N_{3i} = \int_{-h}^{h}\sigma_{3i}d\alpha_3,$$

$$M_{ii} = \int_{-h}^{h}\alpha_3\sigma_{ii}d\alpha_3,\ \ H_{ij} = \int_{-h}^{h}\sigma_3\sigma_{ij}d\alpha_3,$$

$$L_{ii} = \int_{-h}^{h}\mu_{ii}d\alpha_3,\ \ L_{ij} = \int_{-h}^{h}\sigma_{ij}d\alpha_3,\ \ L_{33} = \int_{-h}^{h}\mu_{33}d\alpha_3, \tag{2.8}$$

$$L_{i3} = \int_{-h}^{h}\mu_{i3}d\alpha_3,\ \ \Lambda_{i3} = \int_{-h}^{h}\alpha_3\mu_{i3}d\alpha_3.$$

Основная система уравнений микрополярных ортотропных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

уравнения равновесия:

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j}+$$
$$+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+\frac{N_{i3}}{R_i}=-\left(q_i^{+}+q_i^{-}\right),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(M_{ii}-M_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(H_{ji}+H_{ij}\right)-$$
$$-N_{3i}=-h\left(q_i^{+}+q_i^{-}\right),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]=q_3^{+}+q_3^{-},$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j}+\frac{1}{A_jA_i}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)+\frac{L_{i3}}{R_i}+ \qquad (2.9)$$
$$+\left(-1\right)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=-\left(m_i^{+}+m_i^{-}\right),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)=m_3^{+}+m_3^{-},$$

$$L_{33}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]-\left(H_{12}-H_{21}\right)=h\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right);$$

физические соотношения упругости:

$$T_{ii}=C_{ii}\Gamma_{ii}+C_{ij}\Gamma_{jj};\;\; S_{ij}=C'_{ij}\Gamma_{ij}+C''_{ji}\Gamma_{ji};\;\; N_{i3}=C_{i3}\Gamma_{i3}+C_{3i}\Gamma_{3i};$$
$$N_{3i}=C'_{3i}\Gamma_{3i}+C'_{i3}\Gamma_{i3};$$

$$M_{ii}=D_{ii}K_{ii}+D_{ij}K_{jj};\;\; H_{ij}=D'_{ij}K_{ij}+D''_{ji}K_{ji};$$

$$L_{ii}=B_{ii}k_{ii}+B_{ij}k_{jj}+b_iL_{33};\;\; L_{ij}=B'_{ij}k_{ij}+B''_{ij}k_{ji};\;\; L_{33}=b'\iota+b''k_{11}+b'''k_{22}; \qquad (2.10)$$

$$L_{i3}=B_{i3}k_{i3}+c_i;\;\; \Lambda_{i3}=d_{i3}l_{i3}+d_i,$$

где

$$C_{ii}=2h\frac{a_{jj}}{\Delta_1};\quad \mathrm{C_{ij}}=-2h\frac{a_{ij}}{\Delta_1};\quad C_{ij}=C_{ji};\quad \Delta_1=a_{11}a_{22}-a_{12}^2;$$

$$C'_{12} = 2h\frac{a_{88}}{\Delta_2};\quad \mathrm{C}''_{21} = -2h\frac{a_{78}}{\Delta_2};\; C'_{21} = 2h\frac{a_{77}}{\Delta_2};\quad \mathrm{C}''_{12} = \mathrm{C}''_{21};\quad \Delta_2 = a_{77}a_{88} - a_{78}^2;$$

$$C_{13} = 2h\frac{a_{55}}{\Delta_3};\; C_{31} = -2h\frac{a_{56}}{\Delta_3};\; \mathrm{C}'_{31} = 2h\frac{a_{66}}{\Delta_3};\; \mathrm{C}'_{13} = C_{31};\; \Delta_3 = \tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2;$$

$$C_{23} = 2h\frac{a_{55}}{\Delta_4};\; C_{32} = -2h\frac{a_{45}}{\Delta_4};\; \mathrm{C}'_{32} = 2\mathrm{h}\frac{\mathrm{a}_{44}}{\Delta_4};\; \mathrm{C}'_{32} = C_{32};\; \Delta_4 = a_{44}a_{55} - a_{45}^2;$$

$$D_{ii} = \frac{2h^3}{3}\frac{a_{jj}}{\Delta_1};\; \mathrm{D}_{\mathrm{ij}} = \frac{2h^3}{3}\frac{a_{ij}}{\Delta_1};\quad D_{ij} = D_{ji};$$

$$D'_{12} = \frac{2h^3}{3}\frac{a_{88}}{\Delta_2};\quad \mathrm{D}''_{21} = -\frac{2h^3}{3}\frac{a_{78}}{\Delta_2};\; \mathrm{D}'_{21} = \frac{2h^3}{3}\frac{a_{77}}{\Delta_2};\quad \mathrm{D}''_{12} = D''_{21};$$

$$B_{ii} = 2h\frac{b_{jj}}{\Delta_5};\quad \mathrm{B}_{\mathrm{ij}} = -2h\frac{b_{ij}}{\Delta_5};\quad \mathrm{b}_{\mathrm{i}} = \frac{b_{ij}b_{j3} - b_{jj}b_{i3}}{\Delta_5};\quad \Delta_5 = b_{11}b_{22} - b_{12}^2;$$

$$B'_{12} = 2h\frac{b_{88}}{\Delta_6};\quad \mathrm{B}''_{12} = -2h\frac{b_{78}}{\Delta_6};\quad \mathrm{B}''_{12} = \mathrm{B}''_{21};\; \mathrm{B}'_{21} = 2h\frac{b_{77}}{\Delta_6};\; \Delta_6 = b_{77}b_{88} - b_{78}^2;$$

$$B_{13} = 2h\frac{1}{b_{66}};\; c_1 = -2h\frac{b_{56}}{b_{66}}\frac{m_1^+ - m_1^-}{2};\; B_{23} = 2h\frac{1}{b_{44}};\; \mathrm{c}_2 = -2h\frac{b_{45}}{b_{44}}\frac{m_2^+ - m_2^-}{2};$$

$$d_{13} = \frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{66}};\; d_1 = -\frac{2h^3}{3}\frac{b_{56}}{b_{66}}\cdot\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h};$$

$$d_{23} = \frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{44}};\; d_2 = -\frac{2h^3}{3}\frac{b_{45}}{b_{44}}\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h};$$

$$b' = 2h\frac{1}{\Delta_7};\quad b'' = 2h\frac{b_1}{\Delta_7};\; \mathrm{b}''' = 2\mathrm{h}\frac{\mathrm{b}_2}{\Delta_7};\; \Delta_7 = \mathrm{b}_1\mathrm{b}_{13} + \mathrm{b}_2\mathrm{b}_{23} + \mathrm{b}_{33}.$$

К уравнениям равновесия (2.9) и соотношениям упругости (2.10) необходимо присоединить геометрические соотношения (2.6).

Представим «смягченные» граничные условия на граничном контуре Γ срединной поверхности оболочки, считая, что этот контур совпадает с координатной линией $\alpha_1 = \mathrm{const}$ [16, 17]:

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*,\; S_{12} = S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*,\; N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*,$$
$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или}$$

$$K_{11} = K_{11}^*,\; H_{12} = H_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*,\; L_{11} = L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11} = \kappa_{11}^*, \quad (2.11)$$

$$L_{12}=L_{12}^{*} \text{ или } \kappa_{12}=\kappa_{12}^{*},\; L_{13}=L_{13}^{*} \text{ или } \kappa_{13}=\kappa_{13}^{*},\; \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^{*} \text{ или } l_{13}=l_{13}^{*}.$$

Система уравнений (2.9), (2.10), (2.6) микрополярных ортотропных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений представляет собой систему дифференциальных уравнений 18-го порядка с девятью граничными условиями (2.11) на каждом из контуров срединной поверхности оболочки Γ. Это система 52 уравнений, относительно 52 неизвестных функций: $\iota, \upsilon_i, T_{ii}, S_{ij}, u_i, w, \psi_i, \Omega_i, \Omega_3,$ $N_{i3}, N_{3i}, M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{33}, L_{i3}, \Lambda_{i3}, \Gamma_{ii}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, \kappa_{ii}, \kappa_{ij}, \kappa_{i3}, l_{i3}$.

В модели (2.9), (2.10), (2.6), (2.11) микрополярных ортотропных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Если в модели (2.9), (2.10), (2.6), (2.11) микрополярных упругих ортотропных оболочек для физических постоянных имеют место равенства

$$a_{44}=a_{55}=\tilde{a}_{55}=a_{66}=a_{77}=a_{88}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha};\quad a_{45}=a_{56}=a_{78}=\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha};$$

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=\frac{2\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)};\quad a_{12}=a_{13}=a_{23}=\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)};$$

$$b_{44}=b_{55}=\tilde{b}_{55}=b_{66}=b_{77}=b_{88}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon};\quad b_{45}=b_{56}=b_{78}=\frac{\varepsilon-\gamma}{4\varepsilon\gamma};$$

$$b_{11}=b_{22}=b_{33}=\frac{2\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)};\quad b_{12}=b_{13}=b_{23}=\frac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)},$$

то будем переходить к модели микрополярных упругих изотропных оболочек [16].

Если в модели (2.9), (2.10), (2.6), (2.11) для физических постоянных имеют место равенства

$$a_{45}=a_{56}=a_{78}=0,\qquad a_{44}=a_{55},\qquad \tilde{a}_{55}=a_{66},\qquad a_{77}=a_{88},$$

то из этой модели будет отделяться модель классической теории упругих ортотропных оболочек типа Тимошенко (с незначительным отличием связанного с принятой нами статической гипотезой Γ).

После решения краевой задачи (2.9), (2.10),(2.6), (2.11) силовые и моментные напряжения в пространственной области оболочки можем определить по следующим формулам:

$$\sigma_{ii}=\frac{T_{ii}}{2h}+\alpha_3\frac{3M_{ii}}{2h^3},\ \sigma_{33}=\frac{q_3^+-q_3^-}{2}+\alpha_3\frac{q_3^++q_3^-}{2h};$$

$$\sigma_{ij}=\frac{S_{ij}}{2h}+\alpha_3\frac{3H_{ij}}{2h^3},\ \sigma_{i3}=\frac{N_{i3}}{2h};$$

$$\sigma_{3i}=\frac{N_{3i}}{2h}+\alpha_3\frac{1}{2h}\left[-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_jT_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_iS_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}S_{ij}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{R_i}N_{i3}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}T_{jj}\right]+\left(\alpha_3^2-\frac{h^2}{3}\right)\frac{3}{4h^3}\left[-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_jM_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_iH_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}H_{ij}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}M_{jj}\right];$$

$$\mu_{ii}=\frac{L_{ii}}{2h};\ \mu_{ii}=\frac{L_{ij}}{2h};\ \mu_{3i}=\frac{m_i^+-m_i^-}{2}+\alpha_3\frac{m_i^++m_i^-}{2h};\ \mu_{i3}=\frac{L_{i3}}{2h}+\alpha_3\frac{3\Lambda_{i3}}{2h^3};$$

$$\mu_{33}=\frac{L_{33}}{2h}+\alpha_3\frac{1}{2h}\left[-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}+\right.$$
$$\left.+\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\left(S_{12}-S_{21}\right)\right]+\left(\alpha_3^2-\frac{h^2}{3}\right)\frac{3}{4h^3}\left[-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial\alpha_2}-\left(H_{12}-H_{21}\right)\right].$$

На основе построенной прикладной теории микрополярно-ортотропных оболочек (2.9), (2.10), (2.6), (2.11) в дальнейшем будут решены конкретные задачи об определении напряженно-деформированного состояния в различных оболочках, а на основе численного анализа будут выявлены специфические свойства микрополярных ортотропных материалов.

Данная статья является частью темы, рекомендованной в рамках конкурса на тематическое финансирование научной и научно-технической деятельности, проведенного Государственным комитетом по науке МОН Республики Армении в 2010 году.

Библиографический список

1. Eringen A.C. Theory of Mikropolar Plates // ZAMP. – 1967. – Vol. 18, No. 1. – P. 12–30.

2. Пальмов В.А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек // Механика деформируемого тела. – М.: Наука, 1986. – С. 106–112.

3. Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Динамика и прочность машин / Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1982. – № 386. – С. 29–42.

4. Шкутин А.И. Механика деформаций гибких тел. – Новосибирск: Наука, 1988. – 128 с.

5. Ванин Г.А. Моментная механика тонких оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 4. – С. 116–138.

6. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Механика упругих оболочек. – М.: Наука, 2008. – 280 с.

7. Rubin M.B. Cosserat Theories: Shells, Rods and Points. Dordrecht: – Kluwer, 2000.

8. Neff P.A geometrically exact planar Cosserat shell-model with microstructure: existence of minimizers for zero Cosserat couple modulus // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2007. – Vol. 17, No. 3. – P. 363–392.

9. Birsan M. On Saint-Venant's principle in the theory of Cosserat elastic shells // Int. J. Eng. Sci. – 2007. – Vol. 45, No. 2–8. – P. 187–198.

10. Wang F.Y. On the solutions of Eringen's micropolar plate equations and of ather approximate equations // Inter. J. Eng. Sci. – 1990. – Vol. 28, No. 9. – P. 919–925.

11. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates // Z Angew. Math. Mech (ZAMM). – 2009. – Vol. 89, No. 4. – P. 242–256.

12. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек // Известия НАН Армении. Механика. – 2005. – Т. 58, № 2. – С. 84–95.

13. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. On generalized Cosserat-Type Theories of Plates and Shells: a Short Review and Bibliography // Arch. Appl. Mech. Special Issue. – doi: 10. 1007/s 00419-009-0365-3.

14. Саркисян С.О. Математические модели микрополярных упругих тонких балок // Доклады НАН Армении. – 2011. – Т. 111, № 2.

15. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // Изв. НАН Армении. Механика. – 2011. – Т. 64, № 1. – С. 58–67.

16. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т. 14, № 1. – С. 55–66.

17. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады АН России. – 2011. – Т. 436, № 2. – С. 195–198.

18. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений // Вестник Перм. гос. техн. ун-та. Механика. Математическое моделирование физико-механических процесов. – 2010. – № 1. – С. 99–111.

19. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир,1975. – 862 с.

20. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, вып. 3. – С. 401–408.

21. Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders //ZAMM. – 1974. – Vol. 54, No. 12. – P. 773–779.

22. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 544 с.

23. Пелех, Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.

24. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). – Л.: Судостроение, 1987. – 316 с.

25. Григоренко Я.М., Васеленко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.

References

1. Eringen A. C. Theory of Mikropolar Plates. *ZAMP*, 1967, Vol. 18, Is. 1, P. 12–30.

2. Palmov V. A. Simplest consistent system of equations of the theory of thin elastic shells [Prostejshaya neprotivorechivaya sistema uravnenij teorii tonkikh uprugikh obolochek] *Deformable Body Mechanics – Mekhanika deformiruemogo tela*, Moscow, 1986, P. 106–112.

3. Zhilin P.A. Basic equations of non-classical theory of elastic shells [Osnovnye uravneniya neklassicheskoj teorii uprugikh obolochek]. *Dynamics and Strength of Machines – Dinamika i prochnost' mashin*, 1982, Vol. 386, P.29-42.

4. Shkutin A.I. Mechanical deformation of flexible bodies [*Mekhanika deformatsij gibkikh tel*]. Novosibirsk, 1988, 128 p.

5. Vanin G.A. Moment mechanics of thin shells [Momentnaya mekhanika tonkikh obolochek]. *Mechanics of Solids – Izvestiya RAN. MTT*, 2004, No. 4, C. 116–138.

6. Eremeev V.A., Zubov L.M. Mechanics of elastic shells [*Mekhanika uprugikh obolochek*]. Moscow, 2008, 280 p.

7. Rubin M.B. Cosserat Theories: Shells, Rods and Points. Dordrecht. Kluwer, 2000.

8. Neff P. A geometrically exact planar Cosserat shell-model with microstructure: existence of minimizers for zero Cosserat couple modulus. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2007, Vol. 17, Is. 3, P. 363–392.

9. Birsan M. On Saint-Venant's principle in the theory of Cosserat elastic shells. *Int. J. Eng. Sci.,* 2007, Vol. 45, Is. 2–8, P. 187–198.

10. Wang F.Y. On the solutions of Eringen's micropolar plate equations and of ather approximate equations. *Inter. J. Eng. Sci,* 1990, Vol. 28, Is. 9, P. 919–925.

11. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates. *ZAMM*, 2009, Vol. 89, Is. 4, P. 242–256.

12. Sarkisjan S.O. Micropolar theory of thin rods, plates and shells [Mikropolyarnaya teoriya tonkikh sterzhnej, plastin i obolochek]. *Proceedings National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics – Izvestiya NAN Armenii. Mekhanika*, 2005, Vol. 58, No. 2, P. 84–95.

13. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. On generalized Cosserat-Type Theories of Plates and Shells: a Short Review and Bibliography. *Arch. Appl. Mech. Special Issue*, doi 10, 1007/s 00419-009-0365-3.

14. Sarkisjan S.O. Mathematical models of micropolar elastic thin beams [Matematicheskie modeli mikropolyarnykh uprugikh tonkikh balok] *Doklady NAN Armenii*, 2011, Vol. 111, No. 2.

15. Sarkisjan S.O. General mathematical model of micropolar elastic thin plates [Obshhie matematicheskie modeli mikropolyarnykh uprugikh tonkikh plastin]. *Proceedings National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics – Izvestiya NAN Armenii. Mekhanika*, 2011, Vol. 64, No. 1, P. 58–67.

16. Sarkisjan S.O. The general theory of micropolar elastic thin shells [Obshhaya teoriya mikropolyarnykh uprugikh tonkikh obolochek] *Physical mesomechanics – Fizicheskaya mezomekhanika*, 2011, Vol. 14, Is. 1, P. 55–66.

17. Sarkisjan S.O. General dynamic theory of micropolar elastic thin shells [Obshhaya dinamicheskaya teoriya mikropolyarnykh uprugikh tonkikh obolochek] *Doklady RAN*, 2011, Vol. 436, Is. 2, P. 195–198.

18. Sarkisjan S.O. Mathematical model of micropolar elastic thin shells with independent fields of displacements and rotations [Matematicheskaya model' mikropolyarnykh uprugikh tonkikh obolochek s nezavisimymi polyami peremeshhenij i vrashhenij]. *Vestnik PGTU. Mehanika – Perm State Technical University Mechanics Bulletin,* 2010, Is. 1, P. 99–111.

19. Novatskij V. Theory of elasticity [*Teoriya uprugosti*]. Moscow, 1975, 862 p.

20. Palmov V. A. Basic equations of asymmetric elasticity [Osnovnye uravneniya teorii nesimmetrichnoj uprugosti]. *Applied Mathematics and Mechanics – Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1964, Vol. 28, Is. 3, P. 401–408.

21. Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders. *ZAMM*, 1974, Vol. 54, №12, P. 773–779.

22. Goldenvejzer A. L. Theory of thin elastic shells [*Teoriya uprugikh tonkikh obolochek*]. Moscow, 1953, 544 p.

23. Pelekh B.L. The theory of shells with finite shear rigidity [*Teoriya obolochek s konechnoj sdvigovoj zhestkost'yu*]. Kiev, 1973, 248 p.

24. Pertsev A.K., Platonov E.G. The dynamics of shells and plates (nonstationary problems) [*Dinamika obolochek i plastin (nestatsionarnye zadachi)*]. Leningrad, 1987, 316 p.

25. Grigorenko YA. M., Vaselenko A. T. Theory of shells of variable stiffness [*Teoriya obolochek peremennoj zhestkosti*]. Kiev, 1981, 544 p.

Об авторах

Саркисян Самвел Оганесович (Гюмри, Армения) – доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Армении, профессор, заведующий кафедрой, Гюмрийский государственный педогогический институт (377526, Армения, г. Гюмри, ул. Паруйра-Севака 4, e-mail: afarmanyan@yahoo.com, slusin@yahoo.com).

Фарманян Анаит Жораевна (Гюмри, Армения) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Гюмрийский государственный педогогический институт (377526, Армения, г. Гюмри, ул. Паруйра-Севака 4, e-mail: afarmanyan@yahoo.com, slusin@yahoo.com).

About the authors

Sarkisjan Samvel Oganesovich (Gyumri, Armenia) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Armenian NAN corresponding member, Head of the Department, The Gyumri State Pedagogical Institute (377526, 4, Parujra-Sevaka st., Gyumri, Armenia, e-mail: afarmanyan@yahoo.com, slusin@yahoo.com).

Farmanyan Anait Zhoraevna (Gyumri, Armenia) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Ass. Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, The Gyumri State Pedagogical Institute (377526, 4, Parujra-Sevaka st., Gyumri, Armenia, e-mail: afarmanyan@yahoo.com, slusin@yahoo.com).

Получено 3.06.2011