УДК 681.7.068

Д.Б. ШУМКОВА, О.В. ЧЕРДЖИЕВА
Пермский государственный технический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА ВЫТЯЖКИ ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА

Представлена математическая модель устойчивости на основе процесса вытяжки при простом одноосном растяжении ньютоновской жидкости с переменной вязкостью, а также проводится ее линеаризация.

При производстве кварцевого оптического волокна главным образом встает вопрос качества световода. А одним из важных показателей качества волокна является постоянство его свойств и геометрических размеров по длине.

Как известно, в любом реальном процессе неизбежно существуют внешние воздействия, влияющие на итоговый продукт. Так, колебания диаметра световода связаны с флуктуацией вязкости расплава в зоне деформирования, а также с колебаниями скорости подачи заготовки и скорости вытяжки, колебаниями температуры печи, неоднородности физико-механических свойств заготовки. Указанные колебания в зависимости от конкретной ситуации могут со временем либо затухать, либо наоборот усиливаться. Поэтому встает первоочередная задача исследования чувствительных свойств световодов, в том числе его диаметра к малым колебаниям различных технологических и физических параметров.

С проблемой исследования реакции процесса вытяжки оптического волокна на внешние возмущающие воздействия тесно связана проблема его устойчивости. Она определяет область параметров, при которых возможно непрерывное формирование волокна.

Таким образом, имеется система дифференциальных уравнений, описывающая процесс вытяжки при простом одноосном растяжении ньютоновской жидкости с переменной вязкостью:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial t} = V\dfrac{\partial R}{\partial x} + \dfrac{V}{2}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial x}, & (1) \\[2ex] R^2\left(\dfrac{\partial V}{\partial t} + V\dfrac{\partial V}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\left(3\mu R^2\dfrac{\partial V}{\partial x}\right) + \dfrac{R^2}{\mathrm{Fr}} + \dfrac{1}{\mathrm{We}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial x}, & (2) \end{cases}$$

$$R^2\left(\frac{\partial T}{\partial t}+V\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{1}{\mathrm{Pe}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda R^2\frac{\partial T}{\partial x}\right)-2R\sqrt{1+R'^2}\cdot\mathrm{St}\cdot(T-1)+$$
$$+4\chi R\cdot R_p\cdot\left(R_p-R\right)\cdot\int_0^1\frac{\left(\beta\varepsilon_p T_p^4-\varepsilon T^4\right)\left((R_p-R)+kR'(x-\eta)\right)}{\left((\eta-x)^2+(R_p-R)^2\right)^3}d\eta. \qquad (3)$$

Далее, при исследовании устойчивости определяющие параметры разделяются на основные (стационарные) и возмущающие, которые наложены на основные.

$$\begin{aligned} V(t,x)&=\bar{V}(x)\left[1+\tilde{V}(t,x)\right]\\ T(t,x)&=\bar{T}(x)\left[1+\tilde{T}(t,x)\right]\\ R(t,x)&=\bar{R}(x)\left[1+\tilde{R}(t,x)\right]\end{aligned}\ . \qquad (4)$$

Здесь черта над переменными означает стационарные значения, а волнистая линия – возмущенные состояния.

Таким образом, при подстановке (4) в (1)–(3) получаем новую систему:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{R}}{\partial t}+V(x)\dfrac{\partial\tilde{R}}{\partial x}+\dfrac{V(x)}{2}\cdot\dfrac{\partial\tilde{V}}{\partial x}=0; & (5)\\[2mm] \dfrac{\partial\tilde{V}}{\partial t}=\dfrac{3\mu}{\mathrm{Re}}\cdot\dfrac{\partial^2\tilde{V}}{\partial x^2}+\beta_1(x)\tilde{V}+\alpha_1(x)\dfrac{\partial\tilde{R}}{\partial x}+\alpha_2(x)\tilde{R}+\phi_1(x)\dfrac{\partial\tilde{T}}{\partial x}+\phi_2(x)\tilde{T}; & (6)\\[2mm] \dfrac{\partial\tilde{T}}{\partial t}=\dfrac{\lambda}{\mathrm{Pe}}\cdot\dfrac{\partial^2\tilde{T}}{\partial x^2}+\phi_3(x)\dfrac{\partial\tilde{T}}{\partial x}+\phi_4(x)\tilde{T}+\alpha_3(x)\dfrac{\partial\tilde{R}}{\partial x}+\alpha_4(x)\tilde{R}+\beta_3(x)\tilde{V}. & (7)\end{cases}$$

И соответствующие коэффициенты:

$$\alpha_1(x)=\frac{6\mu\bar{V}'}{\bar{V}\,\mathrm{Re}}+\frac{1}{\bar{R}\bar{V}\mathrm{We}},$$

$$\alpha_2(x)=\frac{2}{\bar{R}^2\bar{V}\,\mathrm{Re}}\cdot\frac{d}{dx}\left(3\mu\bar{R}^2\frac{d\bar{V}}{dx}\right)+\frac{\bar{R}'}{\bar{R}^2\bar{V}\mathrm{We}}+\frac{2}{\bar{V}\mathrm{Fr}},$$

$$\alpha_3(x)=\frac{2\lambda\bar{T}'}{\bar{T}\mathrm{Pe}}-\frac{2\bar{R}'\mathrm{St}}{\bar{T}}\cdot(\bar{T}-1)+\frac{4\chi k(R_p-\bar{R})}{\bar{T}}\cdot\int_0^1\frac{(\beta\varepsilon_p T_p^4-\varepsilon\bar{T}^4)(x-\eta)}{\left[(\eta-x)^2+(R_p-\bar{R})^2\right]^2}d\eta,$$

$$\alpha_4(x)=\frac{2}{\bar{R}^2\bar{T}\mathrm{Pe}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\lambda\bar{R}^2\frac{d\bar{T}}{dx}\right)-\frac{2\left(1+3/2\left(\bar{R}'\right)^2\right)\cdot\mathrm{St}}{\bar{R}\bar{T}}(\bar{T}-1)-\frac{2\bar{V}\,\bar{T}'}{\bar{T}}+$$

$$+\frac{4\chi R_p}{\bar{R}\bar{T}}\int_0^1(\beta\varepsilon_p T_p^4-\varepsilon\bar{T}^4)\cdot\left[\frac{(R_p-\bar{R})(R_p-3\bar{R})+k\bar{R}'(x-\eta)(2R_p-3\bar{R})}{\left[(\eta-x)^2+(R_p-\bar{R})^2\right]^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{4\bar{R}(R_p-\bar{R})^2(R_p-\bar{R}+k\bar{R}'(x-\eta))}{\left[(\eta-x)^2+(R_p-\bar{R})^2\right]^2}\right]d\eta,$$

$$\beta_1(x)=\frac{3}{\mathrm{Re}}\left[\frac{2\left(\mu\bar{R}\bar{V}\right)'}{\bar{R}\bar{V}}-\mu'\right]-\bar{V},$$

$$\beta_2(x)=\frac{1}{\bar{R}^2\bar{V}\,\mathrm{Re}}\cdot\frac{d}{dx}\left(3\mu\bar{R}^2\frac{d\bar{V}}{dx}\right)-2\bar{V}',$$

$$\beta_3(x)=-\frac{\bar{V}\bar{T}'}{\bar{T}},$$

$$\phi_1(x)=-\frac{3a_2\mu\bar{T}\bar{V}'}{\mathrm{Re}\bar{V}},$$

$$\phi_2(x)=-\frac{1}{\mathrm{Re}\,\bar{R}^2\bar{V}}\cdot\frac{d}{dx}\left(3\mu\, a_2\bar{T}\bar{R}^2\frac{d\bar{V}}{dx}\right),$$

$$\phi_3(x)=\frac{2\left(\lambda\,\bar{R}\bar{T}\right)'}{\bar{R}\bar{T}\,\mathrm{Pe}}-\bar{V}-\frac{\lambda'}{\mathrm{Pe}},$$

$$\phi_4(x)=\frac{1}{\bar{R}^2\bar{T}\,\mathrm{Pe}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\lambda\bar{R}^2-\frac{d\bar{T}}{dx}\right)-$$

$$-\frac{2\sqrt{1+\bar{R}'^2}\,\mathrm{St}}{\bar{R}}-\frac{\bar{V}\,\bar{T}'}{\bar{T}}-\frac{16\chi R_p\varepsilon(R_p-\bar{R})\bar{T}^3}{\bar{R}}\cdot\int_0^1\frac{R_p-\bar{R}+k\bar{R}'(x-\eta)}{\left[(\eta-x)^2+(R_p-\bar{R})^2\right]^2}d\eta.$$

Как можно заметить, все эти коэффициенты зависят только от стационарных значений.

Имеются также граничные условия:

$$\bar{V}=V_{\text{н}},\ \bar{T}=T_{\text{н}},\ \bar{R}=R_{\text{н}},\ \text{при}\ x=0.$$

$$\bar{V}=1\ \ \frac{\partial\bar{T}}{\partial x}=0,\ \text{при}\ x=1.$$

Решение системы (5)–(7) ищется с использованием метода разделения переменных. То есть каждая переменная представляется в виде

$$\tilde{\Psi}(x,\tau)=\psi(x)\cdot e^{-i\omega\tau}\ . \qquad (8)$$

При этом $\tilde{\Psi}(x,\tau)\in\left\{\tilde{R}(x,\tau),\tilde{V}(x,\tau),\tilde{T}(x,\tau)\right\}$, $\psi(x)\in\left\{r(x),v(x),t(x)\right\}$.

Здесь $\omega=\omega_2+i\omega_i$, где ω_i – коэффициент нарастания. Именно эта величина позволяет судить о том, затухает или нарастает колебание. Если все $\omega_i<0$, тогда можно говорить о том, что колебания затухают, а значит заданное течение (стационарное решение) при заданном возмущении устойчиво, в противном случае при $\omega_i>0$ – неустойчиво [1].

При подстановке (8) в (5)–(7) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $\psi(x)$ и ω следующего вида:

$$\begin{cases} Vr'+0,5Vv'-i\omega r=0; & (9)\\ \dfrac{3\mu}{\mathrm{Re}}\cdot v''+\beta_1(x)v'+[\beta_2(x)+i\omega]v+\alpha_1(x)r'+ & \\ +\alpha_2(x)r+\phi_1(x)t'+\phi_2(x)t=0, & (10)\\ \dfrac{\lambda}{\mathrm{Pe}}t''+\phi_3(x)t'+[\phi_4(x)+i\omega]t+\alpha_3(x)r'+\alpha_4(x)r+\beta_3(x)v=0 & (11)\end{cases}$$

и соответствующие системе граничные условия $r(0)=v(0)=$ $=t(0)=0,\ v(1)=t'(1)=0.$ Применяя конечно-разностный метод для (9)–(11) получаем новую систему:

$$\begin{cases} i\left[-\dfrac{V_k}{h}r_k+\dfrac{V_k}{h}r_{k-1}-\dfrac{V_k}{2h}v_k+\dfrac{V_k}{2h}v_{k-1}\right]-\omega r_k=0,\\ i\cdot[-\dfrac{\alpha_{1k}}{h}r_{k-1}+\left(\dfrac{\alpha_{1k}}{h}+\alpha_{2k}\right)r_k+v_{k-1}N_{1k}+v_kN_{2k}+v_{k+1}N_{3k}-\\ -\dfrac{\phi_{1k}}{h}t_{k-1}+\left(\dfrac{\phi_{1k}}{h}+\phi_{2k}\right)t_k]-\omega v_k=0\\ i\cdot[-\dfrac{\alpha_{3k}}{h}r_{k-1}+\left(\dfrac{\alpha_{3k}}{h}+\alpha_{4k}\right)r_k+\beta_{3k}v_k+M_{1k}t_{k-1}+M_{2k}t_k+\\ +\dfrac{\lambda}{\mathrm{Pe}\cdot h^2}t_{k+1}]-\omega t_k=0.\end{cases}$$

По этой системе можно составить матрицу A коэффициентов при соответствующих переменных r_r, v_k, t_k. Причем, данная матрица будет иметь ленточную структуру.

Таким образом, задаче (9)–(11) можно сопоставить систему линейных однородных алгебраических уравнений вида:

$$(iA - \omega E)X = 0,$$

где E – единичная матрица, а $X = (\ldots, r_r, v_k, t_k, \ldots)$.

Нетривиальное решение существует только тогда, когда

$$\det(iA - \omega E) = 0.$$

В итоге, задача решения обыкновенных дифференциальных уравнений свелась к задаче поиска собственных значений матрицы.

Нахождение собственных значений ленточной матрицы A является трудоемким процессом. Это обусловлено большой размерностью матрицы порядка превышающего 200×200. При таких условиях уместно применение QR-алгоритма. Такой алгоритм разложения на ортогональную и треугольную матрицы численно устойчив, и при его выполнении не может возникнуть никаких проблем, связанных с ошибками округления [2]. Однако, одна из проблем такого алгоритма связана с тем, что разложение требует $O(n^3)$ операций, поэтому каждый шаг процесса выполняется слишком медленно. Но, приведение матрицы к форме Хессенберга может уменьшить число операций до $O(n)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. В.Н. Васильев, Г.Н. Дульнев., В.Д. Наумчик. Нестационарные процессы при формировании оптического волокна. Устойчивость процесса вытяжки// Энергоперенос в конвективных потоках. – Минск, 1985. – С. 64–76.

2. Дж. Ортега, У. Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений: пер. с англ.; под ред. А.А. Абрамова. – М.: Наука, 1986. – 288 с.