УДК 517.929 + 519.863

В.А.СОКОЛОВ, А.Ю.ФОМИНА
Пермский государственный технический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ВАЛЬРАСА – ЭВАНСА – САМУЭЛЬСОНА С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ОТ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ

В работе с помощью метода Д-разбиений построены области асимптотической устойчивости линейной модели Вальраса – Эванса – Самуэльсона с учетом дискретного запаздывания скорости изменения цены товара.

Рассмотрим модифицированную модель конкурентного рынка одного товара, в которой продавцы реагируют на изменение цены товара не мгновенно, а с некоторым дискретным запаздыванием:

$$P'(t) = \lambda(D(P(t)) - S(P(t-\tau))), \qquad (1)$$

где $\lambda-$ коэффициент чувствительности, скорости реакции или подстройки цены; $P(t)$ – цена единицы товара в момент времени t; τ – дискретное запаздывание; функция спроса

$$D(P(t)) = \alpha - aP(t) - k_1 P'(t);$$

функция предложения

$$S(P(t-\tau)) = -\beta + bp(t-\tau) + k_2 P'(t-\tau),$$

причем все параметры $a, b, \alpha, \beta, k_1, k_2$ положительны. Отметим, что модель без учета запаздывания скорости изменения цены товара рассматривалась, например, в работе [1].

Подставив функции спроса и предложения в уравнение (1), получим

$$P'(t) + \frac{\lambda a}{1+\lambda k_1} P(t) + \frac{\lambda b}{1+\lambda k_1} P(t-\tau) + \frac{\lambda k_2}{1+\lambda k_1} P'(t-\tau) = \frac{\lambda(\alpha+\beta)}{1+\lambda k_1}.$$

Будем рассматривать это уравнение при $t \ge 0$, зададим $P(\xi) = P_0(\xi)$, $P'(\xi) = P_1(\xi)$ при $\xi < 0$, обозначив

$$p = \frac{\lambda a}{1+\lambda k_1}; \quad q = \frac{\lambda b}{1+\lambda k_1}; \quad r = \frac{\lambda k_2}{1+\lambda k_1},$$

получим линейное дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа первого порядка

$$P'(t) + p\,P(t) + q\,P(t-\tau) + r\,P'(t-\tau) = \frac{\lambda(\alpha+\beta)}{1+\lambda k_1}, \qquad (2)$$

$$P(\xi) = P_0(\xi),\ P'(\xi) = P_1(\xi) \text{ при } \xi < 0.$$

Для исследования устойчивости уравнения (2) рассмотрим характеристический квазиполином [2] однородного уравнения, соответствующего уравнению (2)

$$\Phi(z) = z + p + qe^{-\tau z} + rze^{-\tau z}$$

и воспользуемся методом Д-разбиений [3].

Квазиполином $Ц(z)$ имеет корень $z = 0$ при $p + q = 0$. Предположим далее, что этот квазиполином имеет мнимый корень $z = iy$ при $y \in (0;+\infty)$. Тогда

$$iy + p + qe^{-\tau iy} + riye^{-\tau iy} = 0.$$

Откуда

$$iy + p + q(\cos\tau y - i\sin\tau y) + riy(\cos\tau y - i\sin\tau y) = 0.$$

Отделяя действительную и мнимую части, получаем систему:

$$\begin{cases} p + q\cos\tau y + ry\sin\tau y = 0, \\ y - q\sin\tau y + ry\cos\tau y = 0. \end{cases}$$

В качестве параметров будем рассматривать r и y. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} p + q\cos\tau y + ry\sin\tau y = 0, \\ q\sin\tau y - ry\cos\tau y = y, \\ r = r. \end{cases}$$

Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos\tau y & y\sin\tau y \\ 0 & \sin\tau y & -y\cos\tau y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin\tau y$.

Поэтому

$$p = \frac{1}{Д}\begin{vmatrix} 0 & \cos\tau y & y\sin\tau y \\ y & \sin\tau y & -y\cos\tau y \\ r & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sin\tau y}(-yr\cos^2\tau y - yr\sin^2\tau y - y\cos\tau y) = \frac{-y}{\sin\tau y} + \frac{y\cos\tau y}{\sin\tau y},$$

$$q = \frac{1}{\text{Д}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & y\sin\tau y \\ 0 & y & -y\cos\tau y \\ 0 & r & 1 \end{vmatrix} = \frac{y}{\sin\tau y} + \frac{ry\cos\tau y}{\sin\tau y}.$$

Окончательно получаем следующие параметрические уравнения поверхности:

$$\begin{cases} p = \dfrac{-y}{\sin\tau y} + \dfrac{y\cos\tau y}{\sin\tau y}, \\ q = \dfrac{y}{\sin\tau y} + \dfrac{ry\cos\tau y}{\sin\tau y}, \\ r = r. \end{cases} \qquad (3)$$

где $0 < y < \pi/\tau$, в силу того, что в точках $y = \pi n/\tau$, $n = \overline{1,\infty}$ определитель Δ обращается в нуль.

Таким образом, параметрические поверхности (3) и плоскость $p + q = 0$ образуют границы Д-разбиений при различных значениях $0 < \tau < 1$.

На рис. 1, 2, 3 изображены Д-разбиения для квазиполинома $\Phi(z)$

1) $\tau = 0{,}1$; $0{,}01 < y < 30$; $-1 < r < 1$

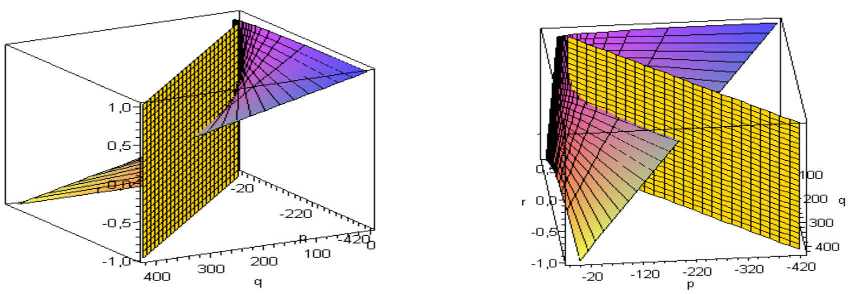


Рис.1

2) $\tau = 0{,}1$; $0{,}01 < y < 5$; $-1 < r < 1$

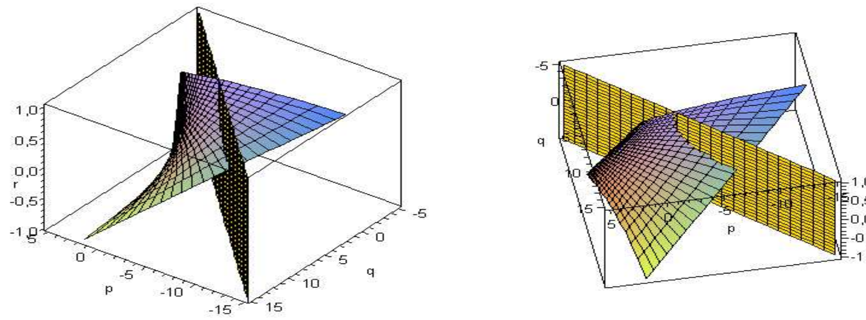
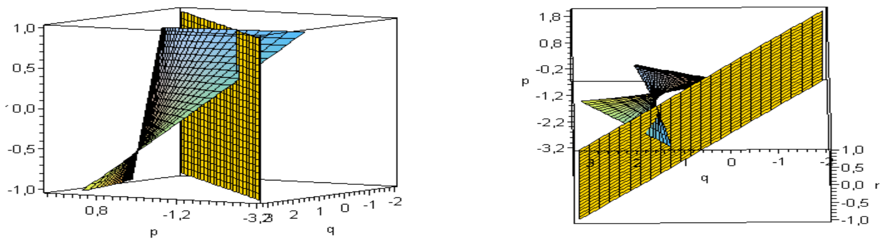


Рис.2

3) $\tau = 0{,}1;\ 0{,}01 < y < 2;\ -1 < r < 1$



Р

ис.3

Поскольку при $q=0$, $r=0$ и $p>0$ квазиполином $\Phi(z)$ не имеет корней с положительной действительной частью, то согласно методу Д-разбиений [3] в заштрихованных на рисунках 1, 2, 3 областях указанный квазиполином также не будет иметь корней с положительной действительной частью, а потому [2] эти области будут областями асимптотической устойчивости уравнения (2) при различных значениях τ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аллен Р. Математическая экономия. – М.: ИЛ, 1963. – 668 с.
2. Белман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
3. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978. – 336 с.