УДК 330.43

И.В. МОРДОВИНА, Т.А. ОСЕЧКИНА
Пермский государственный технический университет

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРЗИНЫ ВАЛЮТ

В условиях современного нестабильного экономического рынка одной из самых серьезных проблем является защита своих денежных средств от обесценивания. За прошлый год денежные средства потеряли 11 % своей стоимости, прогнозные данные на этот год 13–14 %, то есть только за два года без соответствующего вложения каждый человек, проживающий в России, станет беднее на 25 %. Возникает вопрос: можно ли избежать этого и как?

Одним из способов уберечь денежные средства можно считать приобретения валют иностранных государств в неком соотношении – приобретение «оптимальной корзины» валют. Подобная корзина почти не изменит своей стоимости в течение нескольких лет, за счет корректировки курсов валют, входящих в нее. Данная корзина может быть построена на основе матриц кросс-курсов валют, входящих в корзину.

Введем некоторую функцию $Val(q[u]) = Val(q;[u])$ от количества товара q (измеренного в единицах $[u]$), такой, что для любых двух количеств $q_i[u_i], q_j[u_j]$, обмениваемых товаров q_i, q_j отношение обмена, $q_i[u_i] = q_j[u_j]$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$Val(q_i[u_i]) = Val(q_j[u_j]) . \qquad (1)$$

Введенную функцию $Val(q[u])$ естественно интерпретировать как индекс (показатель, индикатор) меновой ценности («value in exchange») $q[u]$ единиц товара из множества $G = \{g_1, ..., g_n\}$ [1]. Для валют функция $Val(q[u])$ может быть интерпретирована как индекс обменного курса соответствующей валюты.

Относительно функции $Val(q[u])$ сделаем следующие предположения:

– непрерывность и строгое монотонное возрастание с ростом объема товара q;

– аддитивность, т.е. для любых двух количеств товара $q^1, q^2 > 0$ выполняется

$$Val(q^{(1)}[u]+q^{(2)}[u])=Val(q^{(1)}[u])+Val(q^{(2)}[u])\,. \qquad (2)$$

Хорошо известно, что решением функционального уравнения (2) (в предположении о непрерывности и строгом монотонном возрастании) является функция

$$Val(q[u])=\alpha q\,, \qquad (3)$$

определенная с точностью до положительного множителя $\alpha > 0$. Следует отметить, что множитель α в этом случае естественно интерпретировать как меновую стоимость единицы товара, поскольку

$$\alpha = Val(1;[u]) = Val([u]). \qquad (4)$$

Из выражений (3), (4) следует явная формула для определения меновой ценности q единиц товара (измеренных в единицах измерения $[u]$):

$$Val(q[u]) = q\cdot Val([u])\ . \qquad (5)$$

Формула (5) позволяет записать уравнение Аристотеля (1) через элементы матрицы
$C=(c(i,\,j)),\quad i,\,j=l,...,n$, задающей пропорции обмена товаров:

$$\frac{Val([u_i])}{Val([u_j])}=\frac{q_j}{q_i}\,. \qquad (6)$$

Таким образом, в рамках простой модели обмена наблюдаемые пропорции $Val(q[u])$ обмена двух товаров могут быть представлены отношением ненаблюдаемых меновых ценностей $Val(q_i[u_i]),Val(q_j[u_j])$ единиц обмениваемых товаров. Указанная теоретическая возможность определения n^2 эмпирических элементов матрицы обмена C посредством n элементов вектора меновых ценностей $Val(q_i[u_i]),...,Val(q_n[u_n])$ поднимает вопрос об определении условий, необходимых для существования вектора $Val(q_i[u_i]),...,Val(q_n[u_n])$, удовлетворяющего соотношению (6).

Нетрудно доказать, что для существования показателей меновых ценностей единиц $[u_1],...,[u_n]$ рассматриваемых товаров $g_1,...,g_n$ (т.е.

для существования показателей $Val(q_i[u_i]),...,Val(q_n[u_n])$, позволяющих представить элементы $c(i,j)$ матрицы обмена C через отношения $\frac{Val([u_i])}{Val([u_j])}$, необходимым и достаточным является условие транзитивности матрицы обмена C: $c(i,j)\cdot c(j,k)=c(i,k),\ i,j,k\{1,...,n\}$.

Свойство пропорциональности столбцов

$$\frac{c(i,r)}{c(j,r)}=\frac{c(i,s)}{c(j,s)},\quad i,j,r,s=1,...,n \tag{7}$$

указывает на то, что ранг матрицы C равен единице и, следовательно, максимальное собственное число матрицы равно n, а отвечающий ему собственный вектор пропорционален столбцам матрицы.

Воспользуемся соотношениями (6), (7) для получения искомой оценки $Val([u_i]), i=1,...,n$, меновой ценности единиц $[u_1],...,[u_n]$ обмениваемых товаров. Действительно, в качестве таковых могут выступать, например, элементы j-го столбца транзитивной матрицы обмена C:

$$Val([u_i])=c(i,j),\quad i=1,...,n.$$

В этом случае товар g_j становится своеобразным «эталонным товаром» (в единицах которого производится измерение всех остальных товаров множества $G=\{g_1,...,g_n\}$, а единица $[u_j]$ этого товара — «эталоном ценности» («numeraire», «unit of account», «standard of value») для измерения меновой ценности товаров простого рынка $M = (G, C)$; $Val([u_i])=c(i,j)=1$.

Воспользовавшись тем, что меновая ценность измеряется по шкале отношений (т.е. с точностью до некоторого множителя α > 0), определим коэффициент α как обратное геометрическое среднее $\alpha=GMean(Val(1/j),...,Val(n/j)=\sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}Val(r/j)}$ меновых.

Введем показатель нормированной меновой ценности

$$NVal(i/j)=\alpha Val(i/j)=\frac{Val(i/j)}{GMean\left(Val(1/j),...,Val(n/j)\right)}=\frac{c(i,j)}{\sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}c(r,j)}}.$$

Важным свойством введенного нормированного показателя меновой ценности является его инвариантность относительно выбора единицы измерения меновой ценности.

Однако наиболее значимым свойством введенного нормированного показателя меновой ценности оказывается независимость (инвариантность) относительно выбора эталонного товара g_j. Действительно, воспользовавшись (7) и осуществив несколько несложных преобразований, получим первую формулу для индекса, построенного по среднему геометрическому, вторую – для индекса, построенного по среднему арифметическому

$$NVal\left(i/j\right)=\frac{c(i,j)}{\sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}c(r,j)}}=\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}\frac{c(r,j)}{c(i,j)}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}\frac{c(r,l)}{c(i,l)}}}=\frac{c(i,l)}{\sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}c(r,l)}}=NVal\left(i/l\right),$$

$$NVal\left(i/j\right)=\frac{c(i,j)}{\sqrt[n]{\sum_{r=1}^{n}c(r,j)}}=\frac{1}{\sqrt[n]{\sum_{r=1}^{n}\frac{c(r,j)}{c(i,j)}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{\sum_{r=1}^{n}\frac{c(r,l)}{c(i,l)}}}=\frac{c(i,j)}{\sqrt[n]{\sum_{r=1}^{n}c(r,l)}}=NVal\left(i/l\right).$$

В целях упрощения анализа динамики валютных курсов вместо показателя

$$NVal\left(i;t\right)=\frac{c(i,j;t)}{\sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}c(r,j;t)}} \tag{8}$$

удобно использовать нормированный показатель, приведенный к некоторому моменту времени t_0:

$$RNVal\left(i;t/t_0\right)=\frac{NVal(i;t)}{NVal(i;t_0)}. \tag{9}$$

Без потери общности можно полагать, что $t_0=1$.

Заметим, что после такого приведения матрица обмена $C(t_0)$ состоит из единиц, что позволяет судить об изменении рыночной конъюнктуры за время t по отклонению матрицы обмена $C(t)$ от матрицы $C(t_0)$. Формулы (8), (9) позволяют говорить о приведенном (к моменту t_0) нормированном показателе $RNVal\left(i;t/t_0\right)$ меновой ценности (Reduced Normalized Value in exchange) товара g_i в момент времени t.

Теперь обратимся к основной задаче нашего исследования – проблеме создания корзины валют минимальной волатильности. Проблема построения таких корзин возникает в связи с тем, что числовые значения меновых коэффициентов весьма изменчивы во времени и при переходе от одного сегмента мирового рынка к другому.

Для разрешения проблемы построим некоторый индекс, являющийся функцией приведенных нормированных показателей меновой ценности фиксированного множества товаров и обладающего относительной стабильностью на фиксированном промежутке времени.

Такой индекс будет построен в форме взвешенного арифметического среднего

$$Ind(w,t/t_0) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot RNval(i;t/t_0) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} w_i = 1;\ w_i \geq 0 \right)$$

приведенных нормированных показателей ценности отдельных товаров.

Воспользуемся формально введенным индексом $Ind(w;t)$

$$Ind(w,t/t_0) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot RNval(i;t/t_0) = RNVal(AG(q);t/t_0)$$

для построения комплексной (составной) корзины, обладающей относительной стабильностью на фиксированном рынке товаров $G = \{g_1,...,g_n\}$ и промежутке времени $[1;T] = \{1,2,...,T\}$. Используем вариацию

$$\mathrm{var}(Ind(w)) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left[Ind(w;t) - MInd(w) \right]^2 = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \,\mathrm{cov}(i;j)$$

в качестве меры изменчивости (волатильности) временного ряда индекса $Ind\,(w;t)$. Здесь $MInd(w) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Ind(w;t)$

$$\mathrm{cov}(i,j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} RNVal(i;t/t_0) RNVal\left(j;t/t_0\right) -$$

$$- \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} RNVal(i;t/t_0) \cdot \sum_{t=1}^{T} RNVal\left(j;t/t_0\right).$$

Для построения агрегированной валюты минимальной волатильности (минимальной вариации) воспользуемся предложением, выдвинутым в работе [2], и подберем весовые коэффициенты $w_1^*,...,w_n^*$, минимизирующие квадратичную форму

$$\min_{w} \mathrm{var}(w) = \mathrm{var}(w^*) = \mathrm{var}\left(w_1^*,...,w_n^*\right)$$

при линейных ограничениях $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1; \quad w_i \geq 0, \quad i = 1,...,n$.

Для решения задачи минимизации

$$\begin{cases} \operatorname{var}(w) \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{cases}$$

построим функцию Лагранжа $F(w_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j c_{ij} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right)$.

Приравнивая частные производные функции Лагранжа нулю, получаем систему

$$\begin{cases} 2\sum w_i c_{ij} - \lambda = 0, \quad i = 1,\dots,n, \\ -\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right) = 0. \end{cases}$$

Откуда $\sum_{i=1}^{n} w_i c_{ij} = \frac{\lambda}{2}$, или в матричной форме $CW = \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

Отсюда $W = \frac{\lambda}{2} \cdot C^{-1} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ или $w_j = \frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^{-1}$.

Учитывая условие нормировки, получим $\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^{-1} = 1$.

Отсюда $\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^{-1}}$; $w_j = \frac{\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^{-1}}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^{-1}}$.

Найденные оптимальные весовые коэффициенты $w_1^*,\dots,w_n^*$ можно интерпретировать также как процентное соотношение валют в искомой корзине.

Вложение своих сбережений подобным образом, т.е. приобретение комплексного пакета валют, позволит «заморозить» стоимость сбережений на момент приобретения пакета. Таким образом, даже через несколько лет при обмене пакета на одну валюту можно будет получить сумму, эквивалентную сумме его покупки, с учетом инфляции, т.е. сбережения, вложенные подобным образом, сохранят свою покупательскую способность, которая была у них на момент приобретения корзины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гилберт М. В поисках единой валютной системы. – М., 1984.

2. Простая модель обмена: агрегированные валюты минимальной волатильности Н.В. Хованов, Д.Н. Колесов, М.В. Соколов, Дж.В. Колари // Применение математики в экономике. Вып. 15: Сб. статей / под ред. А.В. Воронцовского. – СПб., 2004. – С. 43–61.