

В.А. ОНЯНОВ, М.В. ШАДРИН
Пермский государственный технический университет

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫТЯЖКЕ ПОЛЫХ КВАРЦЕВЫХ ВОЛОКОН **О**

Рассматривается квазиодномерная стационарная краевая задача о вытягивании полых кварцевой трубки, проходящей внутри цилиндрического термозлемента. Математическая модель основана на асимптотическом приближении уравнений Навье-Стокса. Учитываются три вида теплообмена – теплопроводность, конвекция и теплообмен излучением. Приведено описание алгоритма реализации построенной итерационной конечно-разностной задачи.

В настоящее время имеется большое число научно-технических публикаций, в которых рассмотрены вопросы производства фотонно-кристаллических волокон (PCF). В то же время, число работ, в которых детальное исследование процесса вытяжки было проведено с применением математических моделей, обладающих достаточно высокой степенью адекватности реальному процессу, несоизмеримо мало. Отметим, что фотонно-кристаллические волокна производятся, как правило, одним из двух способов:

1) по технологической схеме «складывай и вытягивай» (stack and draw), когда заготовка сердечника обкладывается несколькими слоями пустотелых трубок с круглым, шестигранным или, в общем случае, произвольным сечением; 2) путем просверливания отверстий в стеклянной заготовке. Полученные одним из отмеченных способов преформы затем нагреваются и подвергаются вытягиванию до приемлемых размеров. На рис. 1 приведены примеры сечений микроструктурированных волокон, полученных по первой схеме.

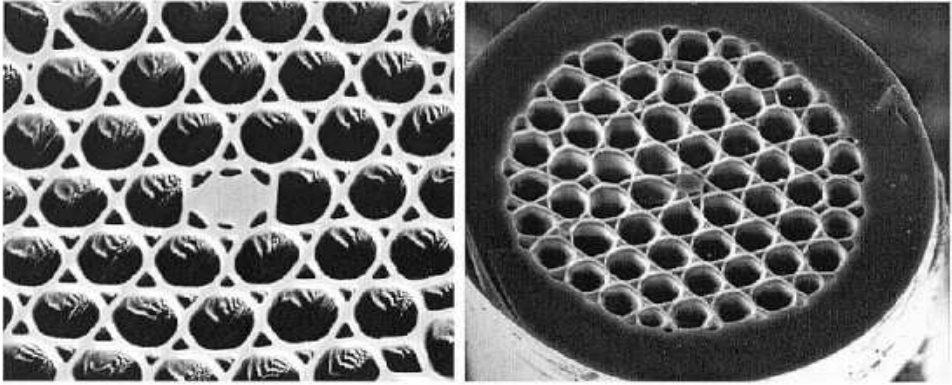


Рис. 1. Примеры сечений микроструктурированных волокон

Ниже, учитывая результаты работ [1,2], рассматривается квази-одномерная стационарная краевая задача о вытягивании полый кварцевой трубки, проходящей внутри цилиндрического термоэлемента. Общая схема вытяжки представлена на рис. 2. Если отношение характерного размера радиуса волокна h к длине рассматриваемого участка вытяжки L много меньше единицы, то из асимптотического анализа уравнений Навье-Стокса (уравнение несжимаемости, уравнения движения) получаем следующую систему [1]:

$$\rho(h_2^2 - h_1^2)[uu_z - g] = [3\mu(h_2^2 - h_1^2)u_z + \gamma(h_1 + h_2)]_z, \quad (1)$$

$$(h_1^2 u)_z = \frac{p_0 h_1^2 h_2^2 - \gamma h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{\mu(h_2^2 - h_1^2)}, \quad (2)$$

$$(h_2^2 u)_z = \frac{p_0 h_1^2 h_2^2 - \gamma h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{\mu(h_2^2 - h_1^2)}, \quad (3)$$

где $p_0 = p_u - p_a$, γ – коэффициент поверхностного натяжения, $h_1 = h_1(z)$, $h_2 = h_2(z)$ определяют, соответственно, внутреннюю и внешнюю границы кварцевого расплава, $\mu = \mu(T)$ – коэффициент динамической вязкости кварца.

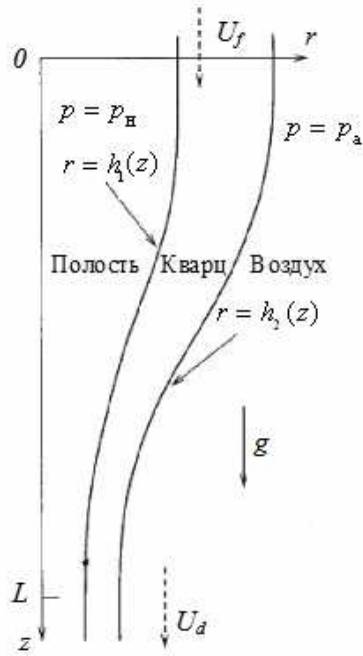


Рис. 2. Общая схема вытяжки полого кварцевого волокна

Учитывая результаты работ [2,3], приходим к уравнению для температуры вида:

$$\begin{aligned}
 (h_2^2 - h_1^2) \rho c_p u T_z = & (k(h_2^2 - h_1^2) T_z)_z - 2h_2 (1 + (h_{2z})^2)^{0.5} \cdot (\omega \epsilon n_c^2 \sigma_0 (T^4 - T_0^4) + \\
 & + \alpha (T - T_0)) + 4n_c^2 \sigma_0 a h_2 (a - h_2) \int_{l_1}^{l_2} \frac{(\beta \epsilon_p T_p^4(\eta) - \epsilon T^4(z)) \cdot (a - h_2 + |h_{2z}|(\eta - z))}{((\eta - z)^2 + (a - h_2)^2)^2} d\eta, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где k – коэффициент теплопроводности кварца; n – показатель преломления кварца; n_c – показатель преломления газа; ϵ – интегральная степень черноты кварца; ϵ_p – интегральная степень черноты печи; β – коэффициент поглощения поверхности волокна; T_p – функция, описывающая распределение температуры на поверхности термоэлемента; a – радиус печи; T_0 – температура газа у поверхности волокна; α – коэффициент теплообмена.

Доопределим систему (1)–(4) краевыми условиями:

$$u(0) = u_0, \quad u(L) = u_l, \quad (5)$$

$$h_1(0) = r_{1,0} , h_2(0) = r_{2,0} , \quad (6)$$

$$T(0) = T_0 , T_z(L) = 0 . \quad (7)$$

Для численного решения краевой задачи (1)–(7) запишем следующий итерационный алгоритм:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + u^n u_z^{n+1} - g = \frac{3(K^n u_z^{n+1})_z}{\rho[(h_2^n)^2 - (h_1^n)^2]} + \frac{\gamma}{\rho[(h_2^n)^2 - (h_1^n)^2]} (h_1^n + h_2^n)_z , \quad (8)$$

$$u^{n+1}((h_2^{n+1})^2 - (h_1^{n+1})^2) = u_0((r_{2,0})^2 - (r_{1,0})^2), \quad (9)$$

$$(u^{n+1}(h_1^{n+1})^2)_z = \frac{p_0(h_1^{n+1})^2(h_2^{n+1})^2 - \gamma h_1^{n+1} h_2^{n+1} (h_1^{n+1} + h_2^{n+1})}{\mu^n [(h_2^{n+1})^2 - (h_1^{n+1})^2]} , \quad (10)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} + u^{n+1} T_z^{n+1} = \frac{1}{c_p \rho((h_2^{n+1})^2 - (h_1^{n+1})^2)} \cdot [\lambda^n [(h_2^{n+1})^2 - (h_1^{n+1})^2] T_z^n]_z - \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & -2h_2^{n+1} \left[1 + \left(h_{2,z}^{n+1} \right)^2 \right]^{0.5} (\omega \varepsilon n_c^2 \sigma_0 ((T^n)^4 - T_B^4) + \alpha (T^n - T_0^n)) + \\ & + 4n_c^2 \sigma_0 a r_2^{n+1} (a - r_2^{n+1}) S^{n,n+1} , \end{aligned}$$

где $S^{n,n+1} = h_* (0,5(f_0 + f_N) + \sum_{k=1}^{N-1} f_k) , \quad h_* = L / I ,$

$$f_k = \frac{(\beta \varepsilon_p T_p^4 (\eta_k) - \varepsilon (T_i^n)^4) \cdot (a - h_2^{n+1} + |h_{2,z}^{n+1}| (\eta_k - x_i))}{((\eta_k - x_i)^2 + (a - h_2^n)^2)^2} ;$$

$$K^n = 0,5(\mu_i^n ((h_{2,i}^n)^2 - (h_{1,i}^n)^2) + \mu_{i-1}^n ((h_{2,i-1}^n)^2 - (h_{1,i}^n)^2)) ,$$

$$u_0^{n+1} = u_0 , u_I^{n+1} = u_I , \quad h_{1,0}^{n+1} = r_{1,0} , h_{2,0}^{n+1} = r_{2,0} , \quad T_0^{n+1} = T_0 ,$$

$$T_I^{n+1} - T_{I-1}^{n+1} = 0 .$$

Для определения u_i^{n+1} (8) используется метод прогонки ($i=1, \dots, I-1$). Уравнения (9),(10) в каждом узле сетки образуют систему

двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными $h_{1,i}^{n+1}, h_{2,i}^{n+1}$ ($i=1, \dots, I$). Решение данной системы может быть найдено, например, методом простых итераций. Значения T_i^{n+1} (11) определяются методом бегущего счета ($i=1, \dots, I-1$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Modeling the Fabrication of Hollow Fibers: Capillary Drawing / A.D. Fitt, K. Furusawa, T.M. Monro, C.P. Please // Journal of Lightwave Technology. – 2001. – Vol.19, № 12. – P.1924–1931.
2. The Mathematical Modelling of Capillary Drawing for Holey Fibre Manufacture / D. Fitt , K. Furusawa , T. M. Monro , C.P. Please , D.J. Richardson // Journal of Engineering Mathematics. – 2002. – Vol. 43, № 2–4 (300 p.), (33 ref.), P. 201–227.
3. Наумчик В.Д. Квазиодномерная модель процесса вытяжки оптических волокон // Энергоперенос в конвективных потоках: сб. науч. ст.– Минск, 1985.– С.64–76.