

С.Ю.КУЛТЫШЕВ, Л.М.КУЛТЫШЕВА
Пермский государственный технический университет

ПРИБЛИЖЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ С ПОГРЕШНОСТЯМИ

Рассматривается задача приближенной идентификации для некоторых классов ε – моделей реальных объектов по косвенным измерениям их входов и выходов с погрешностями.

Пусть R^n – пространство n -мерных векторов, компонентами которых являются действительные числа; $B_1^m[\theta, T], B_2^n[\theta, T], B_3^q[\theta, T]$ – нормированные пространства m, n и q -мерных вектор-функций, определенных на отрезке $[\theta, T]$; Y, Z и W – нормированные пространства. Через $\|x\|$ обозначим норму элемента x в том пространстве, которому он принадлежит.

Рассмотрим реальный объект на отрезке времени $[\theta, T]$, где θ – момент возникновения объекта. Через $\bar{v}(t)$ обозначим m -мерный вектор параметров, характеризующих внешние воздействия на объект в момент времени $t \in [\theta, T], \bar{v}(t) \in R^m$, а через $\bar{x}(t)$ – n -мерный вектор параметров, характеризующих реакцию объекта на внешние воздействия в момент $t, \bar{x}(t) \in R^n$. Вектор-функции $\bar{v}$ и $\bar{x}$ будем называть входом и выходом объекта соответственно. Будем считать, что $\bar{v} \in V[\theta, T]$, а $\bar{x} \in X[\theta, T]$, где $V[\theta, T]$ и $X[\theta, T]$ – некоторые подмножества из $B_1^m[\theta, T]$ и $B_2^n[\theta, T]$ соответственно.

Так как объект реален, то $\bar{x}(t)$ зависит только от предыстории изменения внешних воздействий, т.е. $\bar{x}(t)$ однозначно определяется значениями $\bar{v}(s)$ при $s \in [\theta, t]$, следовательно $\bar{x}(t) = \bar{A}(t, \overset{t}{C}_\theta \bar{v})$, где $\bar{A}(t, \bullet): V[\theta, t] \rightarrow R^n$ при каждом фиксированном $t \in [\theta, T]$, $\overset{t}{C}_\theta$ – оператор сужения вектор-функции $\bar{v}$ на отрезок $[\theta, t]$, а $V[\theta, t]$ – множество вектор-функций, полученных сужением на отрезок $[\theta, t]$ всех вектор-функций из $V[\theta, T]$. Равенство $\bar{x}(t) = \bar{A}(t, \overset{t}{C}_\theta \bar{v})$ задает ма-

тематическую модель рассматриваемого объекта. Попытки построить эту модель, т.е. найти оператор $\bar{A}$, часто приводят к неявной зависимости $F(\bar{x}, \bar{v}) \approx 0$ между $\bar{v}$ и $\bar{x}$.

Поэтому имеет смысл ввести

Определение 1. Уравнение $F(\bar{x}, \bar{v}) = 0$ назовем ε -моделью рассматриваемого объекта, если

- 1) $F : X[\theta, T] \times V[\theta, T] \rightarrow W$ – непрерывный оператор;
- 2) уравнение $F(x, v) = 0$ однозначно разрешимо относительно x при каждом $v \in V[\theta, T]$ и это решение представимо в виде $x(t) = A(t, \overset{t}{C}_\theta v)$, где $A(t, \bullet) : V[\theta, t] \rightarrow R^n$ при каждом фиксированном $t \in [\theta, T]$;

- 3) оператор $B : V[\theta, T] \rightarrow X[\theta, T]$, $B(v)(t) = A(t, \overset{t}{C}_\theta v)$ непрерывен;

- 4) выполняется неравенство $\|F(\bar{x}, \bar{v})\| \leq \varepsilon$, где ε – достаточно малое положительное число или нуль.

Обычно ε -модель строится из естественно-научных законов в виде $\bar{F}(x, v, \omega) = 0$, где ω – неизвестный вектор параметров (коэффициентов) модели, $\omega \in \Omega \subseteq B_4$, B_4 – нормированное пространство, $\bar{F} : X[\theta, T] \times V[\theta, T] \times \Omega \rightarrow W$ – оператор, который удовлетворяет условиям определения 1 при некотором $\omega \in \Omega$ и отражает внутреннюю структуру объекта.

Пусть далее $y = P(\overset{\tau}{C}_\mu \bar{v}) + \xi$, $z = Q(\overset{\tau}{C}_\mu \bar{x}) + \eta$ – измерения входа и выхода объекта, где $P : V[\mu, \tau] \rightarrow Y$ и $Q : X[\mu, \tau] \rightarrow Z$ – непрерывные операторы, $[\mu, \tau]$ – отрезок времени, в течение которого производятся измерения, $\theta \leq \mu < \tau < T$, ξ и η – погрешности измерений, о которых известно лишь то, что $\|\xi\| \leq \varepsilon_2$ и $\|\eta\| \leq \varepsilon_3$, где ε_2 и ε_3 – заданные малые положительные числа.

Задача идентификации – по известным $y, z, P, Q, \bar{F}, \mu, \tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ найти такое $\omega \in \Omega$, при котором $\bar{F}(x, v, \omega) = 0$ является ε_1 -моделью объекта.

Будем решать эту задачу для ε -модели вида

$$A_0(x) + B_0(v) - \sum_{i=1}^K \alpha_i(\omega) A_i(x) - \sum_{j=1}^J \beta_j(\omega) B_j(v) = 0, \quad (1)$$

где $A_i : X[\theta, T] \rightarrow B_3^q[\theta, T], A_i(x)(t) = \bar{A}_i(t, \overset{t}{C}_\theta x)$ – непрерывный оператор $\bar{A}_i(t, \bullet) : X[\theta, t] \rightarrow R^q$ при каждом (почти каждом) $t \in [\theta, T], i = \overline{0, K}$, $B_j : V[\theta, T] \rightarrow B_3^q[\theta, T], B_j(v)(t) = \bar{B}_j(t, \overset{t}{C}_\theta v)$ – непрерывный оператор, $\bar{B}_j(t, \bullet) : V[\theta, t] \rightarrow R^q$ при каждом (почти каждом) $t \in [\theta, T], j = \overline{0, J}$, $\omega \in \Omega \subseteq R^k, \alpha_i : \Omega \rightarrow R^1$ и $\beta_j : \Omega \rightarrow R^1$ – непрерывные функции.

Пусть измерения входа и выхода имеют вид

$$y_j = \bar{Q} \overset{\tau}{C}_\mu B_j(\bar{v}) + \xi_j, z_i = \bar{Q} \overset{\tau}{C}_\mu A_i(\bar{x}) + \eta_i, j = \overline{0, J}, i = \overline{0, K}, \quad (2)$$

где $\bar{Q} : B_3^q[\mu, \tau] \rightarrow H$ – линейный ограниченный оператор, H – нормированное пространство, $\theta \leq \mu < \tau < T$, $\|\xi_j\| \leq \bar{\epsilon}_j, \|\eta_i\| \leq \tilde{\epsilon}_i$, $y_j \in H, z_i \in H, \xi_j \in H, \eta_i \in H$.

Необходимое условие разрешимости задачи идентификации для (1),(2) дает

Теорема 1. Если задача идентификации для (1),(2) разрешима, то существуют такие $\left\{ \xi_j, j = \overline{0, J} \right\}, \left\{ \eta_i, i = \overline{0, K} \right\}$ и f , что $\|\xi_j\| \leq \bar{\epsilon}_j, \|\eta_i\| \leq \tilde{\epsilon}_i, \|f\| \leq \epsilon_1$ и для любого линейного ограниченного оператора $G : H \rightarrow R^{K+J}$ система

$$\sum_{i=1}^K (Gz_i - G\eta_i) \alpha_i(\omega) + \sum_{j=1}^J (Gy_j - G\xi_j) \beta_j(\omega) = Gz_0 - G\eta_0 + Gy_0 - G\xi_0 - G \bar{Q} \overset{\tau}{C}_\mu f \quad (3)$$

имеет хотя бы одно решение ω в области Ω .

Доказательство. Если задача идентификации для (1),(2) разрешима, то

$\exists \bar{\omega} \in \Omega, \left\{ \xi_j, j = \overline{0, J} \right\}, \left\{ \eta_i, i = \overline{0, K} \right\}, f : A_0(\bar{x}) + B_0(\bar{v}) - \sum_{i=1}^K \alpha_i(\bar{\omega}) A_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^J \beta_j(\bar{\omega}) B_j(\bar{v}) = f, y_j = \bar{Q} \overset{\tau}{C}_\mu B_j(\bar{v}) + \xi_j, j = \overline{0, J}, z_i = \bar{Q} \overset{\tau}{C}_\mu A_i(\bar{x}) + \eta_i, i = \overline{0, K},$
 $\|\xi_j\| \leq \bar{\epsilon}_j, \|\eta_i\| \leq \tilde{\epsilon}_i, \|f\| \leq \epsilon_1$. Возьмем любой линейный ограниченный оператор $G : H \rightarrow R^{K+J}$, тогда

$$G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau A_0(\bar{x}) + G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau B_0(\bar{v}) - \sum_{i=1}^K \alpha_i(\bar{\omega}) G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau A_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^J \beta_j(\bar{\omega}) G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau B_j(\bar{v}) = G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau f.$$

Далее, в силу равенств $\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau B_j(\bar{v}) = y_j - \xi_j$, $\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau A_i(\bar{x}) = z_i - \eta_i$, получа-

ем

$$\sum_{i=1}^K (Gz_i - G\eta_i) \alpha_i(\bar{\omega}) + \sum_{j=1}^J (Gy_j - G\xi_j) \beta_j(\bar{\omega}) = Gz_0 - G\eta_0 + Gy_0 - G\xi_0 - G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau f.$$

Следовательно система (3) имеет решение $\omega = \bar{\omega}$ в области Ω . Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает очевидное

Следствие 1. Если задача идентификации для (1),(2) разрешима, то существуют такие $\left\{ \xi_j, j = \overline{0, J} \right\}, \left\{ \eta_i, i = \overline{0, K} \right\}, f$ и такой линейный ограниченный оператор $G: H \rightarrow R^{K+J}$, что $\|\xi_j\| \leq \bar{\varepsilon}_j, \|\eta_i\| \leq \tilde{\varepsilon}_i, \|f\| \leq \varepsilon_1$ и система (3) имеет хотя бы одно решение ω в области Ω .

Приближенное решение задачи идентификации для (1),(2) дает

Теорема 2. Пусть

$$1) \exists \bar{\omega} \in \Omega : \left\| A_0(\bar{x}) + B_0(\bar{v}) - \sum_{i=1}^K \alpha_i(\bar{\omega}) A_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^J \beta_j(\bar{\omega}) B_j(\bar{v}) \right\| \leq \varepsilon_1$$

и выполняются условия 1),2) и 3) определения 1 для

$$F(x, v) = A_0(x) + B_0(v) - \sum_{i=1}^K \alpha_i(\bar{\omega}) A_i(x) - \sum_{j=1}^J \beta_j(\bar{\omega}) B_j(v);$$

2) найдется линейный ограниченный оператор $G: H \rightarrow R^{K+J}$ такой, что линейная алгебраическая система

$$\sum_{i=1}^K (Gz_i) \tilde{\alpha}_i + \sum_{j=1}^J (Gy_j) \tilde{\beta}_j = Gz_0 + Gy_0 \quad (4)$$

имеет единственное решение $\{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j\}$ в пространстве R^{K+J} ;

3) выполняется неравенство $\mathfrak{E} < \frac{1}{\|\tilde{M}^{-1}\|}$, где $\tilde{M}$ – матрица систе-

мы (4), $\mathfrak{E} = \|G\| \max(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_J, \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_K), \|G\| = \sum_{i=1}^{K+J} \|g_i\|, g_i -$

компоненты оператора G , $\|\tilde{M}^{-1}\|$ – норма матрицы $\tilde{M}^{-1}$, согласованная с нормой векторов в R^{K+J} , $\|x\| = \sum_{i=1}^{K+J} |x_i|$ – норма векторов в R^{K+J} ;

4) система

$$\left\{ \alpha_i(\omega) = \bar{\alpha}_i, \beta_j(\omega) = \bar{\beta}_j, i = \overline{1, K}, j = \overline{1, J} \right\} \quad (5)$$

имеет единственное решение ω в области Ω при каждом $\{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j\} \in D \subset R^{K+J}$, где $\{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j\}$ – решение линейной алгебраической системы

$$\sum_{i=1}^K (Gz_i - G\eta_i) \bar{\alpha}_i + \sum_{j=1}^J (Gy_j - G\xi_j) \bar{\beta}_j = Gz_0 - G\eta_0 + Gy_0 - G\xi_0 - G\bar{Q} \bar{C}_\mu^\tau f, \quad (6)$$

$f \in B_3^q[\theta, T], \|f\| \leq \varepsilon_1, D$ – множество решений системы (6) при всех $\{\xi_j, \eta_i, f\}$, удовлетворяющих условиям $\|\xi_j\| \leq \bar{\varepsilon}_j, \|\eta_i\| \leq \bar{\varepsilon}_i, \|f\| \leq \varepsilon_1$;

5) $\tilde{\omega}$ – решение системы (5) при $\{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j\} = \{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j\}$;

6) $\exists c_1 = \text{const} > 0 : \|\omega - \tilde{\omega}\| \leq c_1 \|\{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j\} - \{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j\}\|$ при всех $\{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j\} \in D$, где ω – решение системы (5). Тогда
$$\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\| \leq \frac{c_1 \|\tilde{M}^{-1}\| (\|\{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j\}\| \boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon_0)}{1 - \|\tilde{M}^{-1}\| \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_0 = \|G\| (\bar{\varepsilon}_0 + \tilde{\varepsilon}_0 + \|\bar{Q} \bar{C}_\mu^\tau\| \varepsilon_1),$$

$\bar{\omega}$ – искомый вектор параметров модели, а $\tilde{\omega}$ – приближенное решение задачи идентификации.

Доказательство. В силу условия 1) выполняется равенство

$$A_0(\bar{x}) + B_0(\bar{v}) - \sum_{i=1}^K \alpha_i(\bar{\omega}) A_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^J \beta_j(\bar{\omega}) B_j(\bar{v}) = f, \quad \text{где} \quad f \in B_3^q[\theta, T], \quad \|f\| \leq \varepsilon_1.$$

Далее, применяя к этому равенству операторы $\bar{C}_\mu^\tau, \bar{Q}$ и G , получаем

$$G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau A_0(\bar{x}) + G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau B_0(\bar{v}) - \sum_{i=1}^K \alpha_i(\bar{\omega}) G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau A_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^J \beta_j(\bar{\omega}) G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau B_j(\bar{v}) = G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau f.$$

Отсюда, в силу равенств $\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau A_i(\bar{x}) = z_i - \eta_i, \bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau B_j(\bar{v}) = y_j - \xi_j$, получаем

$$\sum_{i=1}^K (Gz_i - G\eta_i) \alpha_i(\bar{\omega}) + \sum_{j=1}^J (Gy_j - G\xi_j) \beta_j(\bar{\omega}) = Gz_0 - G\eta_0 + Gy_0 - G\xi_0 - G\bar{Q}\bar{C}_\mu^\tau f. \quad (7)$$

Далее, вводя обозначения $\bar{\alpha}_i = \alpha_i(\bar{\omega}), \bar{\beta}_j = \beta_j(\bar{\omega})$, получаем, что $\{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j\}$ является решением системы (6). В силу условий 2) и 3) справедливы неравенства

$$\|M - \tilde{M}\| \leq \epsilon < \frac{1}{\|\tilde{M}^{-1}\|}, \text{ где } M - \text{ матрица системы (6). Следовательно,}$$

система (6) имеет единственное решение $\{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j\}$. В силу условия 4) $\bar{\omega}$ является единственным решением системы (7), причем в силу условий 3) и

$$6) \|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\| \leq c_1 \|\{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j\} - \{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j\}\| \leq \frac{c_1 \|\tilde{M}^{-1}\| (\|\{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j\}\| \epsilon + \epsilon_0)}{1 - \|\tilde{M}^{-1}\| \epsilon},$$

где $\bar{\omega}$ – искомый вектор параметров модели. Теорема доказана.

Эту теорему иллюстрирует

Пример 1. Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных индуктивности L и активного сопротивления R . Через $\bar{v}$ обозначим входное напряжение, приложенное к цепи, а через $\bar{x}$ – ток в цепи.

Введем обозначения: $C^1[0, T]$ – пространство непрерывных на $[0, T]$ функций с нормой $\|x\| = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|$, $C_1^1[0, T]$ – пространство непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ функций с нормой $\|x\| = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|$. Согласно законам электротехники, математическая модель этой цепи имеет вид $L\dot{x}(t) + Rx(t) = v(t), t \in [0, T], x(0) = \gamma$, где

$$v \in C^1[0, T], x \in C_1^1[0, T], \omega = \{\gamma, R, L\} \in \Omega = \{\gamma, R, L : \gamma \in R^1, R > 0, L > 0\} \subset R^3.$$

Эту модель можно записать в эквивалентном интегральном виде

$$x(t) - \gamma + \frac{R}{L} \int_0^t x(s) ds - \frac{1}{L} \int_0^t v(s) ds = 0, t \in [0, T]. \quad (8)$$

Полагая,
 $\theta = 0, T = 4, B_1^1[\theta, T] = V[\theta, T] = C^1[0, 4], B_2^1[\theta, T] = B_3^1[\theta, T] = X[\theta, T] = C_1^1[0, 4]$
 $A_0(x)(t) = x(t), B_0(v)(t) = 0, A_1(x)(t) = 1,$
 $B_1(v)(t) = \int_0^t v(s) ds, A_2(x)(t) = \int_0^t x(s) ds, K = 2,$
 $J = 1, \alpha_1(\omega) = \gamma, \alpha_2(\omega) = -\frac{R}{L}, \beta_1(\omega) = \frac{1}{L},$ эту модель можно записать в виде (1).

Пусть $\bar{v}(t) = 1 + t, \bar{x}(t) = t + 0,00001 \sin(t)$ при $t \in [0, 4],$
 $\bar{\varepsilon}_0 = 0, \bar{\varepsilon}_1 = 0,00003,$
 $\tilde{\varepsilon}_0 = 0,00003, \tilde{\varepsilon}_1 = 0, \tilde{\varepsilon}_2 = 0,00003,$ а измерения входа и выхода цепи имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = \{0, 0, 0\}, \\ y_1 = \left\{ \int_0^1 \bar{v}(s) ds + \xi_{11}, \int_0^2 \bar{v}(s) ds + \xi_{12}, \int_0^3 \bar{v}(s) ds + \xi_{13} \right\} = \{1,50001, 3,99999, 7,50001\}, \\ z_0 = \{\bar{x}(1) + \eta_{01}, \bar{x}(2) + \eta_{02}, \bar{x}(3) + \eta_{03}\} = \{1,00002, 1,99999, 3,00001\}, \\ z_1 = \{1, 1, 1\}, \\ z_2 = \left\{ \int_0^1 \bar{x}(s) ds + \eta_{21}, \int_0^2 \bar{x}(s) ds + \eta_{22}, \int_0^3 \bar{x}(s) ds + \eta_{23} \right\} = \{0,50002, 2,00002, 4,50001\}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Полагая
 $H = R^3, \bar{Q} : C_1^1[1, 3] \rightarrow R^3, \bar{Q}(x) = \{x(1), x(2), x(3)\}, \mu = 1, \tau = 3,$ эти измерения можно записать в виде (2). Далее проверим выполнение условий теоремы 2.

Условие 1) выполняется, так как это неравенство справедливо при $\gamma = 0, R = 1, L = 1.$

Условие 2) выполняется, так как при $G : R^3 \rightarrow R^3, G(x) = x$ линейная алгебраическая система (4) имеет единственное решение $\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_1\} = \{-0,00002, -1,00009, 1,00006\}.$

Условие 3) выполняется, так как $\|G\|=1, \|\tilde{M}^{-1}\|=13,00188$,

$$\frac{1}{\|\tilde{M}^{-1}\|} = 0,07692, \epsilon = 0,00003, \text{ т.е. } \epsilon < \frac{1}{\|\tilde{M}^{-1}\|}.$$

Условие 4) выполняется, так как система (5) имеет вид $\left\{ \gamma = \bar{\alpha}_1, -\frac{R}{L} = \bar{\alpha}_2, \frac{1}{L} = \bar{\beta}_1 \right\}$, и она однозначно разрешима относительно ω при любых $\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_1\} \in R^3$.

В условии 5) вычисляется $\tilde{\omega}$, которое для этого примера имеет вид $\tilde{\omega} = \{\tilde{\gamma}, \tilde{R}, \tilde{L}\} = \{-0,00002, 1,00003, 0,99994\}$.

Условие 6) выполняется, так как при $c_1 = 2,00018$ справедливо неравенство

$$\|\omega - \tilde{\omega}\| \leq c_1 \left\| \{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j\} - \{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j\} \right\|, \text{ где } \omega - \text{ решение системы (5).}$$

И, наконец, выполняется неравенство

$$\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\| \leq \frac{c_1 \|\tilde{M}^{-1}\| (\|\{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j\}\| \epsilon + \epsilon_0)}{1 - \|\tilde{M}^{-1}\| \epsilon} = 0,02393, \text{ так как } \left\| \bar{Q} \begin{smallmatrix} 3 \\ C \\ 1 \end{smallmatrix} \right\| = 3 \text{ и}$$

$\epsilon_0 = 0,00092$. Пример закончен.

Замечание. Числовые данные в этом примере указаны с точностью до пятого знака после «запятой», то есть их абсолютная погрешность не превосходит 0,000005.