

К ВОПРОСУ О РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ГОРНОМ МАССИВЕ В ОКРЕСТНОСТИ ВЫРАБОТКИ

Приведена численная реализация моделей наследственности и старения в задаче об изменении во времени напряженно-деформированного состояния соляного массива вокруг выработки.

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии (НДС) однородного изотропного массива соляных пород вокруг односторонней протяженной цилиндрической выработки глубокого заложения в условиях гидростатического распределения напряжений в ненарушенном массиве ($\lambda=1$).

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z . Если ось z совместить с продольной осью выработки, сечения породного массива, нормальные к оси z , будут находиться в состоянии обобщенной плоской деформации.

На глубине H компоненты начального поля напряжений (до проведения выработки) следующие:

$$\sigma_z^{(0)} = \sigma_r^{(0)} = \sigma_\varphi^{(0)} = \gamma H; \tau_{rz}^{(0)} = \tau_{r\varphi}^{(0)} = \tau_{z\varphi}^{(0)} = 0. \quad (1)$$

Соответствующее ему начальное поле деформации имеет вид:

$$\gamma_{rz}^{(0)} = \gamma_{r\varphi}^{(0)} = \gamma_{z\varphi}^{(0)} = 0; \varepsilon_z^{(0)} = \varepsilon_\theta^{(0)} = \varepsilon_r^{(0)} = \frac{\gamma H}{E} (1 - 2\mu), \quad (2)$$

где γ – средний предельный вес вышележащих пород; μ – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости.

Проведение выработки в момент $t=0$ вызывает возмущение начального поля напряжений: на компоненты напряжений (1) накладываются дополнительные напряжения, вызванные проведением выработки:

$$\sigma_z^{VII} = \sigma_z^{(0)} + \sigma_z^{(V)}; \sigma_\varphi^{VII} = \sigma_\varphi^{(0)} + \sigma_\varphi^{(V)}; \sigma_r^{VII} = \sigma_r^{(0)} + \sigma_r^{(V)}. \quad (3)$$

Дополнительные напряжения и соответствующие им дополнительные деформации определяются в начальный момент ($t=0$) упругими свойствами массива и находятся из известного решения задачи Ламе:

$$\sigma_r^{(V)} = -\frac{\gamma H}{r^2}; \quad \sigma_\phi^{(V)} = \frac{\gamma H}{r^2}; \quad \sigma_z^{(V)} = \mu(\sigma_r^{(V)} + \sigma_\phi^{(V)}) = 0; \quad (4)$$

$$\varepsilon_r^{(V)} = -\frac{1+\mu}{E} \frac{\gamma H}{r^2}; \quad \varepsilon_\phi^{(V)} = \frac{1+\mu}{E} \frac{\gamma H}{r^2}; \quad \varepsilon_z^{(V)} = 0. \quad (5)$$

Полные упругие напряжения при этом будут:

$$\sigma_r^{VII} = \gamma H \left(1 - \frac{1}{r^2}\right); \quad \sigma_\phi^{VII} = \gamma H \left(1 + \frac{1}{r^2}\right); \quad \sigma_z^{VII} = \gamma H. \quad (6)$$

Здесь через r обозначена радиальная координата, отнесенная к начальному радиусу выработки R_0 . Полю полных упругих напряжений соответствует по закону Гука поле полных деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{VII} &= \frac{\gamma H}{E} (1 - 2\mu) - \frac{1+\mu}{E} \frac{\gamma H}{r^2}; \quad \varepsilon_\phi^{VII} = \frac{\gamma H}{E} (1 - 2\mu) + \frac{1+\mu}{E} \frac{\gamma H}{r^2}; \\ \varepsilon_z^{VII} &= \frac{\gamma H}{E} (1 - 2\mu) \end{aligned} \quad (7)$$

и соответствующее поле полных смещений массива.

В последующие моменты времени $t > 0$ напряженно-деформированное состояние массива пород определяется нелинейными соотношениями теории наследственной ползучести [1]. Образуются новые поля напряжений и деформаций, обусловленные реологическими процессами в массиве. Поле полных деформаций ε^{II} определяется полем полных напряжений σ^{II} и зависит от времени:

$$\varepsilon^{II} = \varepsilon^{VII} + \varepsilon(t); \quad \sigma^{II} = \sigma^{VII} + \sigma(t); \quad \varepsilon^{II} = f(\sigma^{II}) = f[\sigma^{VII} + \sigma(t)]. \quad (8)$$

Такая расчетная схема, однако, как справедливо отмечает И.В. Родин [2], давала бы неверные оценки для распределения смещений в окрестности горной выработки, поскольку наблюдаемые в породном массиве механические процессы при производстве горных работ свя-

заны с формированием лишь дополнительных деформаций и, соответственно дополнительных смещений.

В том случае, когда деформации и напряжения связаны линейным законом Гука, деформации и смещения, вызванные проведением выработки, могут быть выражены через дополнительные (снимаемые) напряжения. Термин «снимаемые напряжения» (снимаемое поле напряжений) предложен И.В. Родиным и характеризует физический смысл дополнительных напряжений. Действительно, образование выработки означает, что с контура ее сечения как бы снимаются напряжения (нормальные и касательные к контуру), действовавшие в ненарушенном массиве. Таким образом, реальное поле деформаций и, соответственно, смещений будет определяться выражением (5), а не (7). Тот же результат получится, если из поля полных упругих деформаций ε^{VII} вычесть начальное поле $\varepsilon^{(0)}$ (2). Такой подход будет справедлив и в случае породного массива, подчиняющегося нелинейному физическому закону деформирования (8) и [1].

В математической постановке задачи, излагаемой ниже, под деформациями и напряжением понимаются их полные значения.

Для сформулированной выше задачи имеем уравнения равновесия и совместимости деформаций:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r} - \frac{\varepsilon_r - \sigma_\varphi}{r} = 0. \quad (10)$$

Уравнения состояния породного массива [1] запишутся в виде:

$$\varepsilon_r - \varepsilon = \frac{1}{2G} \left\{ (\sigma_r - \sigma) + \int_0^t K_c [t - \tau, \sigma_i] (\sigma_r - \sigma) d\tau \right\};$$

$$\varepsilon_\varphi - \varepsilon = \frac{1}{2G} \left\{ (\sigma_\varphi - \sigma) + \int_0^t K_c [t - \tau, \sigma_i] (\sigma_\varphi - \sigma) d\tau \right\}; \quad (11)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3B} \left\{ \sigma + \int_0^t K_v [t - \tau, \sigma_i] \sigma d\tau \right\}, \quad (12)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)$; $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$; $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)$; $B = \frac{E}{3(1-2\mu)}$.

Ядра интегральных уравнений (11) и (12) или функций скоростей сдвигов и объемной ползучести принимаем в виде [1]:

$$K_c[t, \tau, \sigma_s(\tau)] = \delta_{oc} \exp\{b_c [\sigma_s(\tau)/\sigma_{сж}]^{n_c}\} (t - \tau)^{-\alpha}, \quad (13)$$

$$K_v[t, \tau, \sigma_s(\tau)] = \delta_{ov} \exp\{b_v [\sigma_s(\tau)/\sigma_{сж}]^{n_v} - 1\} (t - \tau)^{-\alpha}, \quad (14)$$

где α , δ_{oc} , δ_{ov} , b_c , b_v , n_c , n_v - параметры сдвиговой и объемной ползучести; $\sigma_{сж}$ - предел прочности породы на одноосное сжатие при «мгновенном» нагружении. Безразмерный параметр α будем считать постоянным и примем равным 0,7 [3].

В качестве эквивалентного напряжения σ_i для соляных пород можно принять интенсивность напряжений или обобщенное напряжение [4]:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2},$$

где σ_1 , σ_2 , σ_3 - главные напряжения.

Параметры ядер сдвиговой и объемной ползучести представляют собой параметры формальной аппроксимации кривых сдвиговой и объемной ползучести. Если же параметр α принять постоянным, то остальным параметрам можно приписать на феноменологическом уровне некоторый физический смысл.

Соотношения (11) и (12) описывают активную наследственную деформацию соляных пород в случае, когда нелинейность обусловлена исключительно влиянием фактора времени. Для каждого момента времени $t > 0$ будет свой (нелинейный) закон связи между напряжениями и деформациями.

Процессы, соответствующие нагрузке в прямом смысле слова, т.е. уменьшение деформации при уменьшении напряжений, уравнения (11) и (12) не описывают. Заметим, что процесс релаксации не является процессом разгрузки, и делать специальные предположения о законе разгрузки при этом не нужно [5].

Заметим, что уравнение (12) описывает не объемную ползучесть, а трещинообразование в процессе ползучести, сопровождающееся изменением объема. При этом разрушающееся тело ведет себя как наследственно-упругое с объемной наследственностью [5], [1].

В системе пяти уравнений (9)–(12) независимы лишь пять неизвестных функций координаты r и времени t : σ_r , σ_φ , σ_z , ε_r , ε_φ . Величина ε_z является известной постоянной, равной $\varepsilon_z = \frac{\gamma H}{E}(1-2\mu)$.

В результате достаточно громоздких, но элементарных преобразований система (9)–(12) приводится к одному нелинейному интегродифференциальному уравнению относительно σ_r :

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} + \int_0^t F(t-\tau)^{-\alpha} d\tau = 0, \quad (15)$$

где функция F с учетом принятых выражений для ядер интегральных операторов (13)–(14) имеет вид:

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{(1-\mu)r} \delta_{oc} \left\{ \exp\left(b_c \frac{\sigma_{i-}}{\sigma_{сж}}\right) \left[\left(3 \frac{d\sigma_r}{dr} + r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} \right) \frac{2-\mu}{3} - \frac{d\sigma_z}{dr} \frac{2-\mu}{3} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{d}{dr} \left[\exp\left(b_c \frac{\sigma_{i-}}{\sigma_{сж}}\right) \right] \left[\frac{1-2\mu}{3} (\sigma_r - \sigma_z) + r \frac{d\sigma_r}{dr} \frac{2-\mu}{3} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{(1-\mu)r} \delta_{ov} \left\{ \exp\left(b_v \frac{\sigma_{i-}}{\sigma_{сж}}\right) \frac{1-2\mu}{3} \left(3 \frac{d\sigma_r}{dr} + r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{d\sigma_z}{dr} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{d}{dr} \left[\exp\left(b_v \frac{\sigma_{i-}}{\sigma_{сж}}\right) \right] \frac{1-2\mu}{3} \left(2\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_z \right) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Граничные условия задачи имеют вид:

$$\sigma_r = 0 \text{ при } r=1 \text{ (на контуре выработки), } \sigma_r = \gamma H \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Значения неизвестных величин σ_φ , σ_z , ε_r , ε_φ определяются из выражений:

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr}, \quad (18)$$

$$\sigma_z = 2\mu\sigma_r + \mu r \frac{d\sigma_r}{dr} + \int_0^t \left\{ \delta_{oc} \frac{1+\mu}{3} \exp\left(b_c \frac{\sigma_i}{\sigma_{сж}}\right) (2\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} - 2\sigma_z) - \delta_{ov} \exp\left(b_v \frac{\sigma_i}{\sigma_{сж}}\right) (2\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_z) \right\} * (t-\tau)^{-\alpha} d\tau + E\varepsilon_z^{(0)}, \quad (19)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2G} + \frac{1}{2G_0} \int_0^t \delta_{oc} \exp\left(b_c \frac{\sigma_i}{\sigma_{сж}}\right) (\sigma_r - \sigma_z) (t-\tau)^{-\alpha} d\tau, \quad (20)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_z}{2G} + \frac{1}{2G_0} \int_0^t \delta_{oc} \exp\left(b_c \frac{\sigma_i}{\sigma_{сж}}\right) (\sigma_\varphi - \sigma_z) (t-\tau)^{-\alpha} d\tau. \quad (21)$$

При этом в выражениях для деформации исключены их начальные значения, соответствующие напряженному состоянию нетронутого массива.

Решение уравнения (15) с граничными условиями (17) осуществлялось методом шагов по времени [6]. Промежуток времени $[0, t]$ разбивается на части точками $t_s (s=1, 2, 3, \dots)$. Значения $\sigma_r(r, t)$, $\sigma_z(r, t)$ представились последовательностями функций σ_r^s , σ_z^s . При этом интеграл по времени записывается в первой части уравнения (15) и после применения формулы интегрирования по частям заменяется квадратурной формулой вида

$$P = \int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\alpha} d\tau \approx \sum_{i=2}^N \left\{ F(t_{i-1}) \frac{(t_n - t_{i-1})^{1-\alpha}}{1-\alpha} - F(t_i) \frac{(t_n - t_i)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{(1-\alpha)(t_i - t_{i-1})} * \left[\frac{(t_n - t_{i-1})^{2-\alpha} - (t_n - t_i)^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right] \right\}. \quad (22)$$

Здесь неявная зависимость от времени функции $F[r, \sigma_r(r, t), \sigma_z(r, t)]$ выражена для краткости в явной форме в функции $F(\tau)$.

Таким образом, на каждом шаге по времени t_s уравнение (15) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d^2\sigma_r^s}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r^s}{dr} = P(r, \sigma_r^s, \sigma_z^s). \quad (23)$$

Одним из принципов метода «шагов по времени» является вычисление интегральных сумм (22) в правой части уравнения (23) в момент времени t_{s-1} , т.е. редукция к решению линейного дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2\sigma_r^s}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r^s}{dr} = P(r, \sigma_r^{s-1}, \sigma_z^{s-1}). \quad (24)$$

Если принять, что решение уравнения (24) совпадает в первом приближении с решением уравнения (23), получим возможность вычислить новую интегральную сумму (22) и найти второе приближение искомого решения. Таким образом, уравнение (24) заменяется уравнением

$$\frac{d^2\sigma_r^{s(N+1)}}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r^{s(N+1)}}{dr} = P(r, \sigma_r^{s(N)}, \sigma_z^{s-1}), \quad (25)$$

где N – номер итерации в излагаемом методе последовательных приближений. Процесс нахождения решения на S -м шаге продолжается до тех пор, пока различие между последовательными приближениями не будет достаточно мало. Решение при $S=1$ ($t=0$) дается формулами (6).

Интегрирование уравнений (24)–(25) проводилось численным методом конечных разностей. Область интегрирования по r ограничивалась значением $r=R$ ($R \gg 1$) и дискретизировалась точками r_i одномерной сетки с переменным шагом Δr_i ($i=1, 2, 3, \dots$) с целью повышения точности аппроксимации. Это связано с большими градиентами напряжений вблизи внутреннего контура выработки и с быстрым их уменьшением с удалением вглубь массива. Значения σ_r^s , σ_z^s представлялись на каждом шаге по времени последовательностями дискретных значений в точках r_i . При этом их производные по координатам аппроксимировались обычными конечно-разностными соотношениями. Уравнение (25) в его конечно-разностной форме решалось методом прогонки [7].

В разработанном пакете программ учитывались особенности деформирования соляных пород при различных условиях нагрузки, предусмотренные феноменологической моделью [1].

В расчетной сетке по r в ходе решения выделялись 3 области: область линейного деформирования ($\sigma_i < \sigma_{i\infty}$); область нелинейного деформирования ($\sigma_i \geq \sigma_{i\infty}$); область предельного деформирования (разрушения), в которой выполняется критерий перехода процесса деформирования в предельную стадию.

В соответствии с законами деформирования [1] в каждой из областей вычислялись интегральные суммы (22) и после решения уравнения (25) для σ_r определялись неизвестные функции σ_ϕ , σ_z , ϵ_r , ϵ_ϕ . Заметим, что соотношения (16) и (19)–(21) приведены для области нелинейного деформирования в запредельной стадии. Границы областей определяются на каждом шаге t_s . С течением времени они перемещаются от контура выработки вглубь массива.

Программа написана на языке ФОРТРАН и состоит из 11 модулей основной программы и 10 подпрограмм SUBROUTINE. Константы модели приняты по данным [1].

На рис. 1 представлены результаты расчетов НДС приконтурных пород по моделям нелинейной и линейной наследственной ползучести. Для модели линейной наследственной ползучести характерно, что скорость сдвиговых деформаций не зависит от уровня действующих напряжений (в ядре (13) отсутствует экспонента) и не происходит изменения объема во времени, т.е. при $t > 0$ ($K_v \equiv 0$). Анализ решения показывает, что в массиве происходит релаксация напряжений, причем релаксация проявляется в основном в первые часы существования выработки. В случае линейной модели незначительная релаксация напряжений (~8%) имеет, по-видимому, «численную природу», т. е. характеризует погрешность решения задачи численным методом. В случае нелинейной наследственной модели релаксация напряжений появляется в значительно большей степени и имеет физическую природу, так как обусловлена разрушением приконтурных пород в процессе ползучести.

Окружные деформации, а соответственно и смещения контура выработки $U = \epsilon_\phi R_0$, рассчитанные по нелинейной теории, значительно превосходят линейные, и это различие возрастает с глубиной H .

Следует отметить, что численная реализация модели нелинейной наследственной ползучести требует больших затрат оперативной памяти машины, так как для вычисления интегральных сумм (22) необходимо «запомнить» все значения искомых функций на каждом шаге t_s .

В ходе выполнения решения шагами по t накапливается численная погрешность в искомом решении, что приводит на определенном шаге t_s^* к неустойчивости итерационного процесса. Ситуацию можно улучшить измельчением шагов по времени, при этом, однако, повышаются требования к объему оперативной памяти машины, которая, как известно, всегда ограничена. Обращение же к внешней памяти приводит к резкому (на 3–4 порядка) увеличению затрат машинного времени. Результаты, представленные на рис.1, получены при полном использовании оперативной памяти и оптимальном выборе шага по времени t с учетом интенсивности релаксации напряжений и затрат машинного времени. При этом итерационные процессы сходятся лишь до момента $t^y = 860$ часов. В дальнейшем наступает численная неустойчивость.

Отметим, что выбор временной сетки t_s является, вообще говоря, отдельной проблемой при решении задач наследственности и старения.

Обратимся к модели старения, отличающейся от описанной тем, что ядра интегральных уравнений состояния принимаются в виде

$$K_c[t, \sigma_i(t)] = \delta_{oc} \exp\left\{b_c \frac{\sigma_i(t)}{\sigma_{сж}}\right\} t^{-\alpha}, \quad K_v[t, \sigma_i(t)] = \delta_{ov} \exp\left\{b_v \frac{\sigma_i(t)}{\sigma_{сж}}\right\} t^{-\alpha}. \quad (26)$$

В схеме описанного решения задачи (15)–(17) – в этом случае изменится лишь способ вычисления интегральных сумм, который для соотношения (22) преобразуется к виду

$$P = \int_0^t F(t) t^{-\alpha} dt \approx \sum_{i=1}^N \left(F(t_i) \frac{t_i^{1-\alpha}}{1-\alpha} - F(t_{i-1}) \frac{t_{i-1}^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})} \frac{t_i^{2-\alpha} - t_{i-1}^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \right). \quad (27)$$

Алгоритмы вычисления интегральных сумм по формулам (22) и (27) в программах для ЭВМ при этом существенно различны. При численной реализации модели старения используется значительно меньший объем оперативной памяти, существенно ниже затраты машинного времени и, как показала практика расчетов, гораздо выше устойчивость решения. Время устойчивого счета t^y составляет величину порядка 10^5 часов. Результаты расчетов модели старения при той же пространственно-временной сетке, что и для модели наследственной вязкоупругости, приведены на рис.1.

Сравнение результатов численной реализации моделей наследственной ползучести и старения в рамках описанной схемы решения осе-

симметричной задачи в постановке плоской деформации позволяет сделать следующие выводы:

– для рассмотренных промежутков времени изменение напряжений вокруг выработки с течением времени для обеих моделей носит один и тот же характер; количественные же различия не превышают 6%;

– деформации ползучести и соответствующие им смещения породного контура выработки для линейных моделей практически совпадают, а для нелинейных отличаются не более чем на 3%.

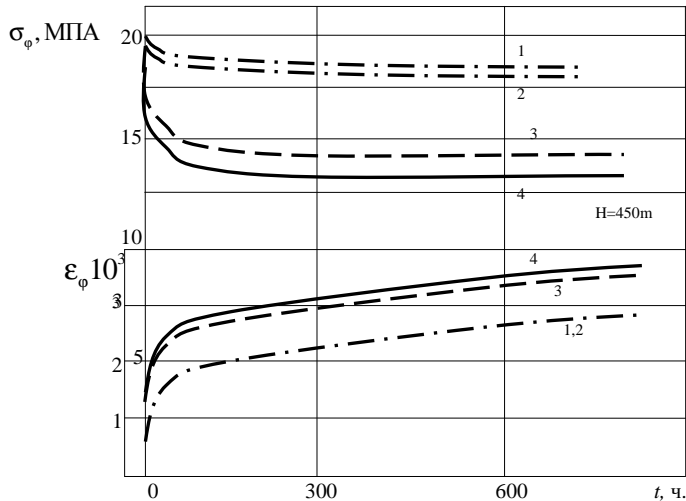


Рис. 1. Релаксация напряжений и смещение контура цилиндрической выработки в зависимости от времени:

- 1 – модель линейной наследственной вязкоупругости; 2 – модель старения (линейная); 3 – модель нелинейной наследственной вязкоупругости; 4 – модель старения (нелинейная).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Константинова С.А., Саврасов И.Ф. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость соляных пород вокруг выработки с учетом нелинейности их деформирования, разрыхления и возможности перехода деформаций в предельную стадию // ФТПРПИ. – 1983. – №2. – С. 29–35.

2. Родин И.В. К вопросу о решении задач гравитационного горного давления горного массива на крепи подземных выработок // Докл. АН СССР. – 1951. – №3. – С. 10–15.

3. Ержанов Ж.С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. – Алма-Ата: Наука, 1964. – 176 с.

4. Гальперин А.Н., Шафаренко Е.М. Реологические расчеты горно-технических сооружений.– М.: Недра, 1977. – 201 с.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел.– М.: Наука, 1977. – 358 с.
6. Ержанов Ж.С., Сагинов А.С., Векслер Ю.А. Расчет устойчивости горных выработок, подверженных большим деформациям.– Алма-Ата: Наука, 1973. – 176 с.
7. Годунов С.К., Рябенький С.К. Разностные схемы.– М.: Наука, 1977. – 440 с.