УДК 519.1

*И.П. НЕПОРОЖНЕВ*
*Пермский государственный технический университет*

# МИНИМАЛЬНЫЕ И БЛИЗКИЕ К МИНИМАЛЬНЫМ РАСКРАСКИ РЕБЕР ОБЫКНОВЕННОГО ПОЛНОГО 6-ГРАФА

В работе рассматриваются различные, с точностью до переобозначения вершин и ребер, минимальные и близкие к минимальным раскраски ребер полного 6-графа без петель и их группы автоморфизмов.

Минимальные и близкие к минимальным раскраски ребер полного 6-графа без петель будем находить из известных базисных раскрасок ребер полного 5-графа без петель. Из таблицы предыдущей работы видно, что минимальная раскраска ребер обыкновенного полного 5-графа в число цветов σ=5 возможна единственным образом (граф $\mathrm{III}_1$). Возможные минимальные раскраски ребер обыкновенного полного 6-графа в число цветов σ=5 могут быть получены продолжением графа $\mathrm{III}_1$. Пучок ребер, соединяющих шестую вершину *F* графа $S_1^6$ с остальными вершинами подграфа $\mathrm{III}_1$, выбирается однозначно: $S_1^6 = \mathrm{III}_1 + 52341$. Подгруппа группы автоморфизмов графа $\mathrm{III}_1$, сохраняющая вершину *F*, совпадает со всей группой и имеет порядок 20, а ее образующими служат подстановки $S_3 = (ABCD)(2453)$, $u = (ABCED)(14523)$. Множество вершин графа $\mathrm{III}_1$ относительно этой подгруппы образуют один класс транзитивности вершин[2].

Перестановка вершин *E* и *F* приводит к следующей схеме преобразований.

$$S_1^6 = \mathrm{III} + 4352 + 52341 \xrightarrow{(EF)} \mathrm{III} + 5234 +$$
$$+ 43521 \xrightarrow{t_3=(AD)(BC)(25)} \mathrm{III}_1 + 52341 = S_1^6.$$

Подстановка $(AD)(BC)(EF)(25)$ является автоморфизмом графа $S_1^6$. Порядок группы автоморфизмов графа $S_1^6$ равен $20 \cdot 2 = 40$.

---

[2] Непорожнев И.П. Неизоморфные раскраски ребер обыкновенного полного шестивершинного графа в девять цветов // Сборник рефератов депонированных рукописей. Вып.13. Сер.Б. Инв. № 2228, 1992.

Раскраски ребер полного 6-графа в число цветов σ=6, близкие к минимальной, могут быть получены продолжением графов $\mathrm{III}_1, \mathrm{II}_1, \mathrm{IV}_7$.

Для графа $\mathrm{III}_1$ выбор пучка ребер, соединяющих шестую вершину *F* графа $S^6$ с вершинами графа $\mathrm{III}_1$, возможен пятью следующими способами, соответствующими одному классу транзитивности относительно группы автоморфизмов $< S_3, u >$ порядка 20: 1,52346, 2,52361, 3,52641, 4,56341, 5,62341; класс транзитивности $1 \xleftrightarrow{S_3} 1 \xrightarrow{u} 2 \xrightarrow{u} 5 \xrightarrow{u} 4 \xrightarrow{u} 3 \xrightarrow{u} 1$.

Для графа $\mathrm{II}_1$ выбор пучка ребер, соединяющих шестую вершину *F* графа $S^6$ с остальными вершинами графа $\mathrm{II}_1$, возможен четырьмя следующими способами, образующими относительно автоморфизма $t_2 = (AB)(CD)(34)(56)$ четыре класса транзитивности: 1,56341, 2,56342, 3,65341, 4,65342.

Для графа $\mathrm{IV}_7$ выбор пучка ребер, соединяющих шестую вершину *F* графа $S^6$ с вершинами графа $\mathrm{IV}_7$, возможен шестью следующими способами, образующими относительно автоморфизма $S_4 = (ABCD)(1463)(25)$ два класса транзитивности: 1,53142, 2,62145, 3,63125, 4,63145, 5,63542, 6,63142; $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$, $4 \leftrightarrow 6$.

Рассмотрим граф $S_2^6 = \mathrm{III}_1 + 52346$. Перестановка вершин *E* и *F* приводит к следующей схеме преобразований:

$$S_2^6 = \mathrm{III} + 4352 + 52346 \xrightarrow{(EF)} \mathrm{III} + 5234 + 43526 \xrightarrow{t_3=(AD)(BC)(25)} \mathrm{III} + \\ +4352 + 52346 = S_2^6.$$

Подстановка $(AD)(BC)(EF)(25)$ является автоморфизмом графа $S_2^6$. Перестановка вершин *F* и *D*, с предварительной перестановкой вершины *D* на место *E* подстановкой $u^{-1} = (ADECB)(13254)$, приводит к следующей схеме преобразований:

$$S_2^6 = \mathrm{III}_1 + 52346 \xrightarrow{(u^{-1})} \mathrm{III}_1 + 52641 \xrightarrow{(EF)} \mathrm{III} + 5264 + 43521 \xrightarrow{t_3 S_3} \mathrm{III} + \\ +4356 + 52346 \xrightarrow{C^{-1}=(BED)(143)(56)} \mathrm{IV} + 4631 + 63142 \xrightarrow{S_4} \mathrm{IV} + 4631 + \\ +63145 = \mathrm{IV}_7 + 63145 = \mathrm{IV}_{7,4.}$$

Результатом преобразований является подстановка $(ADF)(CE)(153462)$, отображающая граф $S_2^6$ в граф $\mathrm{IV}_{7,4}$.

Рассмотрим граф $S_3^6 = \mathrm{II}_1 + 56341$. Перестановка вершин $E$ и $F$ приводит к следующей схеме преобразований:
$S_3^6 = \mathrm{II} + 4356 + 56341 \xrightarrow{(EF)} \mathrm{II} + 5634 + 43561 \xrightarrow{(AD)(BC)(56)} \mathrm{II} +$
$+4356 + 56341 = S_3^6$.

Подстановка $(AD)(BC)(EF)(56)$ является автоморфизмом графа $S_3^6$. Перестановка вершин $D$ и $F$, с предварительной перестановкой вершины $D$ на место $E$ подстановкой $a = (BDE)(1354)$, приводит к следующей схеме:
$S_3^6 \xrightarrow{a} \mathrm{III} + 5632 + 43561 \xrightarrow{(EF)} \mathrm{III} + 4356 + 56321 = \mathrm{III}_5 + 56321 \xrightarrow{C^{-1}}$
$\xrightarrow{C^{-1}} \mathrm{IV}_7 + 62145 \xrightarrow{S_4^{-1}} \mathrm{IV}_7 + 53142 = \mathrm{IV}_{7,1}$.
Перестановка вершин $B$ и $F$, с предвариельной перестановкой вершины $B$ на место $E$ подстановкой $b = (BED)(143)(56)$, приводит к подстановке $(ABFECD)(13)(256)$, отображающей граф $S_3^6$ в граф $\mathrm{IV}_{7,1}$.

Рассмотрим граф $S_4^6 = \mathrm{II}_1 + 56342$. Относительно автоморфизма $t_2 = (AB)(CD)(34)(56)$ имеем три класса транзитивности вершин. Перестановка вершин $E$ и $F$ с последующей подстановкой $(AD)(BC)(56)$ приводит к автоморфизму $(AD)(BC)(EF)(56)$ графа $S_4^6$. Перестановка вершин $D$ и $F$, с предварительной перестановкой вершины $D$ на место $E$ подстановкой $a = (BDE)(1354)$, приводит к следующей схеме:
$S_4^6 \xrightarrow{a} \mathrm{III} + 5632 + 42561 \xrightarrow{(EF)} \mathrm{III} + 4256 + 56321 = \mathrm{III}_4 + 56321 \xrightarrow{t_3 S_3^2}$
$\mathrm{III}_{13} + 42561 \xrightarrow{a^{-1}} \mathrm{II}_1 + 56342 = S_4^6$,
где $t_3 S_3^2 = (AC)(BD)(34)$. Результирующая подстановка $(AC)(BE)(DF)(15)$ является автоморфизмом графа $S_4^6$.

Рассмотрим граф $S_5^6 = \mathrm{II}_1 + 65341$. Относительно автоморфизма $t_2$ имеем три класса транзитивности вершин графа $\mathrm{II}_1$. Перестановка вершин $E$ и $F$ с последующей подстановкой $(AD)(BC)$ приводит к автоморфизму $(AD)(BC)(EF)$ графа $S_5^6$. Перестановка вершин $D$ и $F$, с предварительной перестановкой вершины $D$ на место $E$ подстановкой $a$, приводит к следующей схеме:
$S_5^6 \xrightarrow{a} \mathrm{III} + 5632 + 63541 \xrightarrow{(EF)} \mathrm{III} + 6354 + 56321 \xrightarrow{S_3 t_3}$
$\mathrm{III}_{13} + 63541 \xrightarrow{a^{-1}} \mathrm{II}_1 + 65341 = S_5^6$,

где $S_3 t_3 = (AB)(24)(35)$. Результирующая подстановка $(AE)(DF)(13)(25)$ является автоморфизмом графа $S_5^6$.

Рассмотрим граф $S_6^6 = \mathrm{II}_1 + 65342$. Подстановка $t_2$ является автоморфизмом графа $\mathrm{II}_1$, сохраняющим вершину *F*. Перестановка вершин *E* и *F* с последующей подстановкой $(AD)(BC)$ приводит к автоморфизму $(AD)(BC)(EF)$ графа $S_6^6$. Перестановка вершин *D* и *F*, с предварительной перестановкой вершины *D* на место *E* подстановкой $a$, приводит к следующей схеме преобразований:

$S_6^6 \xrightarrow{a} \mathrm{III} + 5632 + 62541 \xrightarrow{(EF)} \mathrm{III} + 6254 + 56321 \xrightarrow{S_3^2}$

$\mathrm{III} + 5632 + 62541 \xrightarrow{a^{-1}} \mathrm{II}_1 + 65342 = S_6^6$, где $S_3^2 = (AB)(CD)(25)(34)$. Результирующая подстановка $(AE)(BC)(DF)(15)(23)$ является автоморфизмом графа $S_6^6$.

В итоге, различные раскраски ребер полного 6-графа без петель в число цветов σ=6, близкие к минимальной раскраске в пять цветов, возможны пятью способами: графы $S_2^6$, $S_3^6$, $S_4^6$, $S_5^6$, $S_6^6$. Группа автоморфизмов графа $S_2^6$ имеет порядок 8 и образующие $(ACBD)(2453)$, $(AD)(BC)(EF)(25)$. Группа автоморфизмов $S_3^6$ имеет порядок 2 и образующую $(AB)(CD)(34)(56)$. Группа автоморфизмов $S_4^6$ имеет порядок 16 и образующие $(AB)(CD)(34)(56)$, $(AD)(BC)(EF)(56)$, $(AC)(BE)(DF)(15)$. Группа автоморфизмов $S_5^6$ имеет порядок 16 и образующие $(AB)(CD)(34)(56)$, $(AD)(BC)(EF)(56)$, $(AE)(DF)(13)(25)$. Группа автоморфизмов $S_6^6$ имеет порядок 16 и образующие $(AB)(CD)(34)(56)$, $(AD)(BC)(EF)$, $(AE)(BC)(DF)(15)(23)$.

Продолжение работы может быть связано с перечислением различных минимальных и близких к ним раскрасок ребер полного 7-графа без петель.