УДК 658.5.012+651

В.П. КАРАНДАШОВ, Е.В. ЗАДОРОЖНАЯ
Пермский государственный технический университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ РИСКОВЫХ СИТУАЦИЙ В СТРАХОВАНИИ

В работе рассмотрены решения задач об оптимальном выборе рисковых ситуаций в страховании при оценке минимальной величины собственных средств, оптимального страхового взноса с учетом кривой спроса, максимальной полезности без явного учета вероятности разорения в случае нормальной модели суммарного риска для однородной группы клиентов. Показано, что распределение суммарного риска для однородной группы параметрически зависит от коэффициента нагрузки, имеющего смысл спроса на страховой продукт.

Рассмотрим задачу нахождения минимальной величины собственных средств. Представим математическую постановку и решение задачи.

Пусть на основе предыдущего опыта страховщик полагает, что объем портфеля однотипных договоров (т.е. их количество), которые удастся заключить на предстоящий страховой период, распределен по закону Пуассона с параметром n. Среднее и дисперсия ущербов клиентов равны, соответственно, M_1 и σ_1^2, задан коэффициент нагрузки страховщика α. Известно, что значение n достаточно высоко и достигает 100. Найти явную формулу минимального объема собственных средств S_*, гарантирующего заданную вероятность неразорения β, как функцию от n, и определить ее интервалы монотонности.

Численность группы клиентов рассматривается как случайная величина $\eta \sim P(n)$. Предполагается, что X_i – независимы от η. Ограничение на вероятность неразорения в данном случае означает

$$P\left\{S + D \geq X\right\} = P\left\{S + (1+\alpha)M \geq X\right\} \geq \beta .$$

Предположение о случайности числа клиентов приводит к тому, что суммарный взнос $D = \sum_{i=1}^{\eta} d = \eta d$ является случайной величиной.

Поэтому для расчета вероятности неразорения $P\{S + D \geq X\} = P\{S \geq X - D\}$ необходимо знать функцию распределения величины

$$X - D = \sum_{i=1}^{\eta} (X_i - d) .$$

Поскольку $d=(1+\alpha)M_1, E[X_1-d]=-\alpha M_1, E[X_1-d]^2=\sigma_1^2+\alpha^2 M_1^2$.

Воспользуемся нормальной аппроксимацией, так как значение n достаточно велико. Тогда вероятность неразорения

$$P\{X-D\le S\}=\Phi_{M',\sigma'}(S)=\beta,$$

где $M'=-n\alpha M_1$, $\sigma'=\sqrt{n(\sigma_1^2+\alpha^2M_1^2)}$.

Откуда $S_*(\alpha)=x'_\beta$.

Т.о. задача сводится к нахождению β-квантиля нормального распределения $F(S)$, т.е. найти решение x'_β уравнения $\Phi_{M',\sigma'}(S)=\beta$.

Воспользуемся приемом линейного преобразования нормальной случайной величины:

$$\Phi_{M',\sigma'}(S)=P\{\xi\le S\}=P\{\frac{\xi-S}{\sigma'}\le\frac{S-M'}{\sigma'}\}=\Phi(\frac{S-M'}{\sigma'}).$$

После вычисления x_β^N — β-квантиля стандартной нормальной функции распределения $\Phi(x)$ — находим β-квантиль x'_β нормальной функции распределения $\Phi_{M',\sigma'}(S)=\Phi(\frac{S-M'}{\sigma'})$, по формуле $x'_\beta=\sigma' x_\beta^N+M'$, тогда

$$S_*=\sigma' x_\beta^N+M'=\sqrt{n(\sigma_1^2+\alpha^2M_1^2)}x_\beta^N-n\alpha M_1. \quad (1)$$

Рассмотрим $S_*=S_*(n)$ как функцию от действительного переменного $n\in(0,\infty)$. Поскольку $S'_*(n)=\frac{\sqrt{(\sigma_1^2+\alpha^2M_1^2)}x_\beta^N}{(2\sqrt{n})-\alpha M_1}$ убывает на $(0,\infty)$, $S_*(n)$ — вогнутая функция, имеющая единственный максимум в точке

$$n'=[\frac{x_\beta^N\sqrt{(\sigma_1^2+\alpha^2M_1^2)}}{2\alpha M_1}]^2,$$

после которой $S_*(n)$ убывает.

Найдем точки пересечения функции $S_*(n)$ с осью абсцисс.

Приравняем S_* к нулю: $S_* = \sqrt{n(\sigma_1^2 + \alpha^2 M_1^2)} x_\beta^N - n\alpha M_1 = 0$, преобразуем $(\alpha M_1)^2 n^2 - (\sigma_1^2 + \alpha^2 M_1^2)\left(x_\beta^N\right)^2 n = 0$, откуда находим $n = 0$ и

$$n = \frac{(\sigma_1^2 + \alpha^2 M_1^2)\left(x_\beta^N\right)^2}{\left(\alpha M_1\right)^2} = 4n'.$$

Допустим, что $\sigma_1 = 10$, $M_1 = 1$, $\alpha = 0,2$, $x_\beta^N = 2,5$, тогда $n' \approx 3906$, $4n' = 15625$.

По формуле (3.1) находим, что $S_* = 781,56$.

Построим график зависимости минимального объема собственных средств от численности группы (рис. 1).

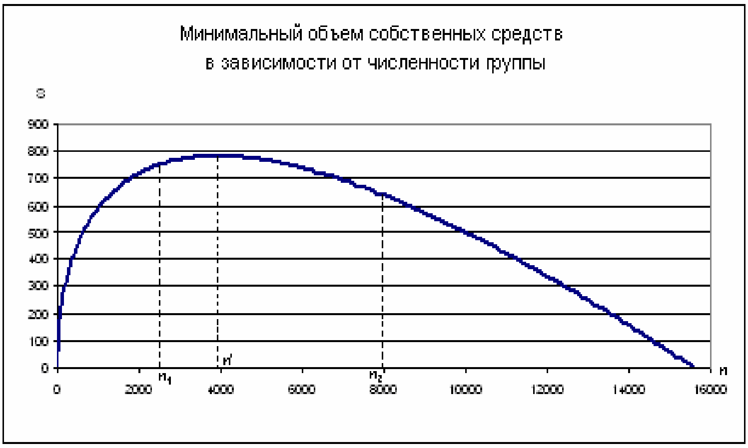

Рис. 1. Минимальный объем собственных средств
в зависимости от численности группы

Из формулы (1) и рис.1 видно, что мелкая компания, у которой число клиентов $n < n'$, должна преодолеть своеобразный барьер в процессе своего роста: при приближении к n' величина $S_*(n)$ растет и рисковая ситуация в этом смысле ухудшается до тех пор, пока n не станет равным n'. На интервале же $[n',\infty)$ при увеличении n минимальный собственный резерв $S_*(n)$ довольно быстро убывает (со скоростью $\sqrt{(\sigma_1^2 + \alpha^2 M_1^2)} x_\beta^N / (2\sqrt{n}) - \alpha M_1$). Таким образом, можно сказать, что в классе относительно крупных компаний ($n \geq n'$) страховщик, имеющий более многочисленную группу клиентов, способен обойтись малыми резервами, поддерживая основную часть страхового покрытия за счет взносов клиентов, в то время как его конкурент обязан создать больший резерв собственных средств.

Рассмотрим задачу оптимизации страхового взноса с учетом кривой спроса. Представим математическую постановку с решением задачи.

Рассмотрим задачу оптимизации страхового взноса d в формулировке типа I, в которой предполагается, что страховщику известна детерминированная количественная зависимость численности группы клиентов $n = n_1(d)$ от страхового взноса (цены полиса) d. Предполагается, что группа клиентов однородна. В качестве минимизируемого критерия выбрана величина собственных средств компании S в страховом покрытии. Известно распределение риска (используется нормальная модель суммарного риска) $X_d = \sum_{i=1}^{n(d)} X_i$, параметрически зависящее от $n(d)$, где $n(\cdot)$ — заданная функция спроса от страхового взноса d, который можно менять в заданном диапазоне $d \in [d^-, d^+]$. X_d распределен нормально с параметрами $n(d)M_1$ и $n(d)\sigma_1^2$. Требуется определить параметры страхования (S^*, d^*), обеспечивающие заданный уровень надежности β при минимальном объеме собственных средств. Решить задачу в предположении, что функция спроса экспоненциальна, т.е. $n(d) = A\exp(-rd)$.

Поскольку $d = (1+\alpha)M_1$, где M_1 — фиксированный средний ущерб клиента, можно рассмотреть функцию $n(\alpha) = n_1(\frac{d}{M_1} - 1)$. Данная функция определена на интервале $[d^- / M_1 - 1, d^+ / M_1 + 1]$. Таким образом исходная задача может быть сведена к задаче нахождения параметров страхования (S_*, α_*).

Заданный уровень надежности в данном случае означает:

$$P\{S + D \geq X\} = P\{S + (1+\alpha)M \geq X\} \geq \beta. \qquad (2)$$

Обозначим через x_β квантиль порядка β распределения *F(x),* т.е. по определению минимальный обобщенный корень уравнения *F(x)* = β или $x_\beta = \inf\{x : F(x-0) \leq \beta, F(x) \geq \beta\}$. Тогда из (3.2.1) с учетом заданного ограничения $\alpha \in [d^- / M_1 - 1, d^+ / M_1 + 1]$ получим неравенства, которые определяют искомую область

$$\{(S,\alpha) \in R^2 : S + (1+\alpha)M \geq x_\beta,\ d^- / M_1 - 1 \leq \alpha \leq d^+ / M_1 - 1\}.$$

Из первого неравенства $S+(1+\alpha)M \geq x_\beta$ сразу же следует выражение для минимального объема капитала при фиксированном α:

$$S_*(\alpha) = x_\beta - M - \alpha M \ , \qquad (3)$$

которое есть частный случай функции $S_*(\alpha)$.

В силу ограничений $\alpha \in [d^- / M_1 - 1, d^+ / M_1 + 1]$ под X_α понимается заданное распределение риска X_d.

Тогда исходная задача сводится к одномерной задаче минимизации

$$S_*(\alpha) \to \min, \quad \alpha \in [d^- / M_1 - 1, d^+ / M_1 + 1], \qquad (4)$$

и найденная точка минимума α^* вместе с $S_* = S_*(\alpha^*)$ дает искомые параметры страхования.

Отметим, что в силу закона спроса функция $n(\alpha)$ убывает по α, тогда $x_\beta(\alpha)$ и среднее $M(\alpha)$ — неубывающие функции, и минимум их разности в (4) может достигаться как в граничной, так и во внутренней точке допустимого интервала.

Учитывая, что среднее и стандартное отклонение суммарного риска равны, соответственно, $M(\alpha) = n(\alpha)M_1$, $\sigma(\alpha) = \sqrt{n(\alpha)}\sigma_1$, и, переходя в задаче (4) к β-квантилю стандартного нормального распределения $x_\beta^N = (x_\beta(\alpha) - M(\alpha)) / \sigma(\alpha)$, получим, что целевая функция в (4) имеет вид

$$S_*(\alpha) = x_\beta^N \sigma_1 \sqrt{n(\alpha)} - M_1 \alpha n(\alpha). \qquad (5)$$

Подставляем выражение для $n(\alpha)$ в (3.2.4):

$$S_*(\alpha) = x_\beta^N \sigma_1 \sqrt{A} \exp(-\frac{r\alpha}{2}) - M_1 \alpha A \exp(-r\alpha) =$$

$$= M_1 A \exp(-r\alpha)(\frac{x_\beta^N \sigma_1}{\sqrt{A} M_1} \exp(\frac{r\alpha}{2}) - \alpha).$$

Обозначим через $\rho = \dfrac{x_\beta^N \sigma_1}{(M\sqrt{A})}$ $S_*(\alpha) = -M_1 A \exp(-r\alpha)(\alpha - \rho \exp(\dfrac{r\alpha}{2}))$.

Продифференцируем по α:

$$S_*'(\alpha) = M_1 Ar\exp(-r\alpha)(\alpha - \rho\exp(\frac{r\alpha}{2})) - M_1 A\exp(-r\alpha)(1 - \frac{r\rho}{2}\exp(\frac{r\alpha}{2})) =$$

$$= -M_1 A\exp(-r\alpha)[1 - r\alpha + \frac{r\rho}{2}\exp(\frac{r\alpha}{2})].$$

Поскольку $-M_1 A\exp(-r\alpha) < 0$ и выражение в скобках есть возрастающая функция от α, то согласно свойствам функции распределения $S_*(\alpha)$ унимодальна вверх (строго), причем единственный ноль $S_*'(\alpha)$ на $(0,\infty)$: $S(\alpha^0) = 0$ дает точку максимума $S_*(\alpha)$ на этом интервале.

Решение рассматриваемой задачи минимизации (4) есть одна из крайних точек отрезка $[\alpha^-, \alpha^+]$:

$$\alpha^* = \begin{cases} d^+ / M_1 - 1, & \text{при } \alpha^0 \le d^- / M_1 - 1 \\ \{d^- / M_1 - 1; d^+ / M_1 + 1\} & \text{при } d^- / M_1 - 1 < \alpha^0 < d^+ / M_1 + 1 \\ d^- / M_1 + 1, & \text{при } \alpha^0 \ge d^+ / M_1 + 1 \end{cases}$$

Тогда величина страхового взноса, обеспечивающая минимум функции $S_*(d)$, будет определяться из формулы

$$d^* = \begin{cases} d^+, & \text{при } d^0 \le d^- \\ \{d^-, d^+\}, & \text{при } d^- < d^0 < d^+ , \\ d^-, & \text{при } d^0 \ge d^+ \end{cases}$$

где $d^0 = (1 + \alpha^0)M_1$.

Основную трудность здесь представляет нахождение стационарной точки α^0, что связано с необходимостью решения нелинейного уравнения

$$1 - r\alpha + \frac{r\rho}{2}\exp(\frac{r\alpha}{2}) = 0 .$$

Для примера рассмотрим случай, когда $r = 2$, $\rho = 1$, рассматривается промежуток значений d равный $[10;30]$, $M_1 = 10$, $A = 0{,}1$.

Тогда из уравнения $\exp\alpha = 1 - 2\alpha$ находим $\alpha^0 = 1$ и $d^0 = 20$. Таким образом, минимум функции $S_*(d)$ достигается в одной из граничных точек, в данном случае в точке $d = 30$ (рис. 2).

Рис. 2. Зависимость объема собственных средств от цены полиса при экспоненциальном спросе

Рассмотрим задачу оптимизации нагрузки α в формулировке типа II без явного учета вероятности разорения, считая критерием оптимальности экспоненциальную полезность остаточного капитала $S+D_\alpha-X_\alpha$, где размер собственного капитала S предполагается фиксированным, суммарный взнос есть (детерминированная) величина, равная $D_\alpha=(1+\alpha)M(\alpha)$:

$$J(\alpha)\equiv -E\exp -c[S+(1+\alpha)M(\alpha)-X(\alpha)]\to \max, \alpha\in[\alpha^-,\alpha^+]. \quad (6)$$

Здесь $c > 0$ − заданный показатель неприятия риска, а α является управляемым параметром на множестве $A=[\alpha^-,\alpha^+]$. Распределение суммарного риска рассматриваемой однородной группы клиентов X_α параметрически зависит от коэффициента нагрузки α через $n(\alpha)$ − положительный параметр, имеющий смысл спроса на страховой продукт, который линейно входит в выражение для среднего риска $M(\alpha)=EX_\alpha=n(\alpha)M_1$.

Рассмотрим решение оптимизационной задачи (6) для нормальной модели суммарного риска однородной группы клиентов, предполагая, что кривая спроса экспоненциальна $n(\alpha)=A\exp(-r\alpha)$, где $A,r>0$.

Определим численные значения оптимального коэффициента нагрузки этой задачи, если размер страховой выплаты детерминирован и равен $m=10$, вероятность страхового случая $p=0,01$, мера осторожности страховщика $c = 0,5$, величина собственного капитала $S = 100$, а кривая спроса $n(\alpha) = 300e^{-\alpha}$, $\alpha \in [0.1, 2]$.

Пусть для каждого $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$ суммарный риск группы клиентов X_α распределен нормально со средним $M(\alpha) = n(\alpha)M_1$ и дисперсией $\sigma^2 = n(\alpha)\sigma_1^2$. Требуется найти коэффициенты нагрузки, дающие максимальное значение экспоненциальной полезности в (6) для экспоненциальной функции спроса $u(Y) = -\exp(-cY)$.

Найдем выражение для целевой функции в (6):

$$J(\alpha) \equiv -E\exp - c[S + (1+\alpha)M(\alpha) - X_\alpha] = -\exp - c[S + (1+\alpha)M(\alpha)]E\exp cX_\alpha.$$

Поскольку случайная величина X_α распределена нормально,

$$E[\exp(cX_\alpha)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(cX_\alpha)\exp[-(X_\alpha - M)^2/(2\sigma^2)]dX_\alpha.$$

Складываем показатели экспонент и выделяем полный квадрат

$$\exp[cX_\alpha - \frac{(X_\alpha - M)^2}{2\sigma^2}] = \exp[\frac{2\sigma^2 cX_\alpha - X_\alpha{}^2 + 2X_\alpha M - M^2}{2\sigma^2}] =$$

$$= \exp[\frac{-X_\alpha{}^2 + 2(M + \sigma^2 c)X_\alpha - (M + \sigma^2 c)^2 + (M + \sigma^2 c)^2 - M^2}{2\sigma^2}] =$$

$$= \exp[\frac{-(X_\alpha - (M + \sigma^2 c))^2 + M^2 + 2\sigma^2 cM + \sigma^4 c^2 - M^2}{2\sigma^2}] =$$

$$= \exp[\frac{-(X_\alpha - (M + \sigma^2 c))^2}{2\sigma^2}] \cdot \exp[cM + \frac{\sigma^2 c^2}{2}].$$

Получим, что правая часть есть $\exp[cM + \frac{\sigma^2 c^2}{2}] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty}\exp[\frac{-(X_\alpha - (M + \sigma^2 c))^2}{2\sigma^2}].$$

Интеграл от плотности нормального распределения равен единице, поэтому

$$E[\exp(cX_\alpha)] = \exp[cM + \frac{\sigma^2 c^2}{2}].$$

Тогда ожидаемая экспоненциальная полезность

$$J(\alpha) = -\exp - c[S + (1+\alpha)M(\alpha)]E\exp cX_\alpha =$$

$$= -\exp - c[S + (1+\alpha)M(\alpha) - M(\alpha) + \sigma^2 c/2] =$$

$$= -\exp - c[S + \alpha n(\alpha)M_1 - n(\alpha)\sigma_1^2 c/2)].$$

Прологарифмируем функцию $-J(\alpha)$:

$$\ln(-J(\alpha)) = -c[S + \alpha n(\alpha) M_1 - n(\alpha)\sigma_1^2 c / 2)] =$$
$$= -c[S + M_1(\alpha n(\alpha) - n(\alpha)\sigma_1^2 c / (2M_1))].$$

Таким образом, исходная задача максимизации функции $J(\alpha)$ сводится к минимизации функции $I(\alpha) \equiv n(\alpha)\mu^N - \alpha n(\alpha)$ на $[\alpha^-, \alpha^+]$, где $\mu^N = c\sigma_1^2 / (2M_1)$. В случае экспоненциальной функции спроса $n(\alpha) = A\exp(-r\alpha)$ оптимальная точка α^* определяется формулами.

Заметим, что параметр μ положителен, так как из неравенства Йенсена для строго вогнутой функции $\ln y$ имеем

$$\ln E\exp(cX_1) > EcX_1 = cM_1 > 0.$$

При дифференцируемой $n(\alpha)$ производная $I(\alpha)$ равна

$$I'(\alpha) = n'(\alpha)\mu - (n(\alpha) + \alpha n'(\alpha)). \qquad (7)$$

Подставим в (7) экспоненциальную функцию спроса $n(\alpha)$:

$$I'(\alpha) = -rAe^{-r\alpha}\mu - Ae^{-r\alpha} + \alpha rAe^{-r\alpha} = Ae^{-r\alpha}((\alpha - \mu)r - 1).$$

Поскольку сомножитель в скобках есть возрастающая функция от α на $[0, \infty)$ критерия унимодальности (7), следует, что $I(\alpha)$ унимодальна вниз. По свойствам функции распределения вытекает унимодальность вверх исходной функции $J(\alpha) = -\exp[cM_1 I(\alpha) - cS]$.

Единственное решение уравнения $I'(\alpha) = 0$ на этом интервале

$$\alpha' = \mu + \frac{1}{r}, \qquad (8)$$

Поэтому единственной точкой минимума $I(\alpha)$ (а значит, точкой максимума $J(\alpha)$) на $[\alpha^-, \alpha^+]$ будет

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha^-, & при\ \alpha' \le \alpha^- \\ \alpha', & при\ \alpha^- < \alpha' < \alpha^+ \\ \alpha^+, & при\ \alpha' \ge \alpha^+ \end{cases}. \qquad (9)$$

Следует, что величина μ^N линейно возрастает с ростом c − показателя осторожности страховщика, и из (8), (9) следует, что для достаточно больших значений c необходимо получим, что оптимальный α^* совпадает с верхней границей α^+ допустимых коэффициентов нагрузки. Это объясняется тем, что боязнь больших значений риска X_α заставляет страховщика уменьшать его среднее $n(\alpha)M_1$, т.е. в итоге уменьшать число клиентов, несмотря на потери в сумме собираемых взносов $D_\alpha = (1+\alpha)n(\alpha)M_1$.

Для наглядности приведем фрагмент графика на промежутке [1,9;2] (рис. 3).

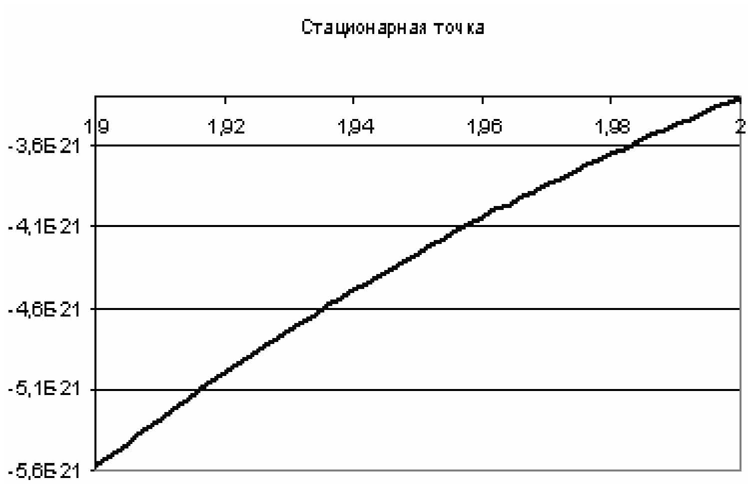

Рис. 3. Стационарная точка

В заключение можно сказать, что оптимум в решаемой задаче довольно чувствителен к выбору модели. При малых значениях c результаты практически совпадают, а при малой вероятности страхового случая p это различие для нормальной модели весьма ощутимо.

При разумном поведении человек не ставит задачу извлечь выгоду из неблагоприятного случая. Исключительно к подобного рода событиям апеллирует страхование и, таким образом, попадает, на первый взгляд, в двусмысленное положение, т.е. бизнес, который берется за решение проблем такого рода, как бы ставит себя в рамки этически не дозволенные. С другой стороны, предусмотрительность определяет поведение живого существа, особенно человека, в каждый момент его жизнедеятельности. Надежность экономической деятельности подкрепляется страхованием именно потому, что имеет законные основания защиты. Таким образом, страхование становится необходимым элементом, сопутствующим экономической деятельности не только из-за страха потерять жизнь, богатство, но и в целях их сохранения (приумножения).

Неопределенность и способы принятия решений – главные задачи страховой деятельности в процессе возмещения ущерба. Таким образом, методы страховой защиты коммерческого страхования представляют интерес для всех видов деятельности, претендующих на выживание, так как оно принимает на себя риски вовсе не из альтруистического интереса и, как любой вид деятельности, предрасположено к риску. Стало быть, для того, чтобы принять на себя риск, необходимо оценить его тяжесть и способность обеспечения обязательств по его удовлетворению.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Альбрехт Э.Г. Методы оптимизации. Введение в теорию решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1995. – 150 с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 100 с.
3. Голубин А.Ю. Математические модели в теории страхования: построение и оптимизация – М.: Анкил, 2003. – 160 с.
4. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска: учеб.пособие.–М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 544 с.
5. Новоселов А.А. Математическое моделирование финансовых рисков: Теория измерения. – Новосибирск: Наука, 2001. – 102 с.
6. Хованов Н.В. Математические модели риска и неопределенности. – СПб.: Изд-во–С.-Петербургского ун-та, 1998. – 304 с.
7. Шахов В.В., Медведев В.Г., Миллерман А.С. Теория и управление рисками в страховании. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 224 с.: ил.