

*М.Г. БОЯРШИНОВ, О.С. САЛИХОВА*  
*Пермский государственный технический университет*

## **ОПТИМАЛЬНАЯ ЗАГРУЗКА БАНКОМАТА ДЕНЕЖНЫМИ КУПЮРАМИ**

Рассматривается актуальная банковская проблема оптимизации загрузки банкомата денежными купюрами. Формируется целевая функция, определяются ограничения и фазовые переменные задачи оптимизации. Поиск оптимального решения выполняется с использованием численного метода Нелдера – Мида.

Одной из активно развивающихся услуг, предоставляемых банковскими организациями в современной России, является обслуживание клиентов карточных платежных систем. Активизация карточного бизнеса обусловлена повышением доверия населения к банковской системе, обострением конкуренции на рынке розничных банковских услуг, стимулированием государством расширения области применения безналичных расчетов, развитием инфраструктуры обслуживания карт платежных систем и другими факторами.

В сфере безналичных расчетов с использованием платежных карт наибольшее распространение, получили [1]: оплата товаров и услуг в торгово-сервисной сети (50,1 %), оплата услуг операторов связи и спутникового телевидения (38,7 %), автозаправочных станций (17,1 %). Однако операции большинства держателей не отличаются особым разнообразием [2]: более 60 % из них совершают сделки максимум двух видов, 21 % – трех видов, не более 15 % владельцев карт можно отнести к числу тех, кто наиболее полно использует пакет предоставляемых банками услуг. Наиболее многочисленная группа держателей карт (41,1 %) ограничивается получением наличных денег 1 – 2 раза в месяц. Для осуществления безналичных расчетов каждая третья карта применяется несколько раз в месяц, еще одна треть – не чаще одного раза в месяц. В целом же к числу наиболее активных клиентов, использующих карту почти ежедневно, можно отнести лишь 6,5 % респондентов.

В настоящее время важная роль в развитии карточного бизнеса коммерческого банка отводится наличию собственной сети банкоматов, эффективность которой определяется их техническими характеристиками, топологией расположения и надежностью функциони-

рования. В городах России (на уровне местных и филиалов московских банков) наблюдаются следующие существенные особенности сетей банкоматов [3]:

- банк, осуществляющий эмиссию карт на уровне города областного или районного масштаба, как правило, осуществляет и эквайринговое обслуживание карточных операций;

- количество градообразующих предприятий, как правило, невелико, однако их сотрудники могут вносить до 90 % в оборот операций с банковскими картами, в отличие от крупных городов с большим числом промышленных предприятий;

- торговые точки малых городов еще недостаточно насыщены терминалами, обслуживающими банковские карты, поэтому держатели банковских карт для оплаты товаров и услуг, как правило, получают наличные в банкомате; в крупных городах практически в любом магазине и любой точке обслуживания имеется возможность оплатить товары и услуги посредством банковских карт, что является дополнительным стимулом для их использования в качестве платежного средства.

Одна из важнейших задач анализа и прогнозирования движения денег в банкоматных системах состоит в определении резерва наличности, необходимого для подкрепления банкоматов в течение определенного календарного времени. Модель движения наличности в банкомате должна дать возможность прогнозировать расход денег за заданный интервал времени с целью исключения дефицита наличности, необходимой для обеспечения банкоматных операций [4].

Качественное обслуживание клиентов карточных платежных систем возможно только при обеспечении бесперебойного функционирования сети банкоматов (постоянный анализ возможного спроса на денежные средства, сервисное и техническое обслуживание и проч.), своевременной загрузке банкоматов денежными средствами, развитии и расширении сети клиентов карточных платежных систем.

Одной из наиболее эффективных мер снижения издержек в эквайринговой составляющей бюджета банков, развивающих карточный бизнес, является оптимизация оборота наличности в банкоматах. Попытка минимизировать количество инкассаций, загружая в банкомат максимально возможную сумму наличных, приводит к тому, что банк не может рационально использовать денежную наличность, что особенно ощутимо в условиях острого дефицита денежных средств. С другой стороны, недостаток купюр в банкомате, возникший вследствие несвоевременной инкассации или несогласованной работы инкассаторской службы, опасен и для владельца сети банкоматов, поскольку спо-

собен спровоцировать «кризис доверия» частных клиентов к банкам [5, 6].

При прогнозировании остатков денежных средств в банкоматах следует учитывать неравномерность снятия денежных средств по дням недели и времени суток, место расположения банкомата (общедоступный или на предприятии, под «зарплатный» проект), купюрные наборы в кассетах, режим работы денежного хранилища и службы инкассации банка, технические простои в работе банкоматов.

Целью настоящего исследования является разработка рекомендаций по рациональной загрузке банкомата купюрами. Объектом исследования являются процессы загрузки и расходования денежных купюр в кассетах банкоматов с течением времени. Информационной базой исследования послужили данные статистических наблюдений расходования денежных купюр в банкоматах крупного промышленного города.

Рассматриваются банкоматы коммерческого банка, установленные для реализации «зарплатных» договоров в коммерческой и бюджетной организациях. В каждом из банкоматов установлено по четыре кассеты для размещения купюр разных номиналов. Задача заключается в определении числа купюр, загружаемых в каждую из кассет во время очередной инкассации, для минимизации объема отвлеченных денежных средств, затрат на инкассацию при одновременном обеспечении достаточного числа денежных купюр для удовлетворения спроса клиентов-держателей карт.

Пусть на момент времени  $t_k$  в банкомате имеется некоторая сумма  $S$  денежных средств:

$$S(t_k) = \sum_{i=1}^4 N_i f_i(t_k), \quad (1)$$

где  $i$  – номер кассеты с купюрами,  $i = \overline{1,4}$ ;  $N_i$  – номиналы купюр (1000, 500, 100 и 10 руб. соответственно);  $f_i(t_k)$  – функции, описывающие зависимость количества купюр от времени в  $i$ -й кассете и определяемые на основании натуральных наблюдений.

Рассматривается целевая функция потерь

$$\Pi = \frac{365}{n} \sum_{k=1}^n S(t_k) \frac{\sigma}{100 \cdot 365} + \frac{365}{n} (I + K), \quad (2)$$

где  $k$  – номер дня,  $k = \overline{1, n}$ ;  $n$  – число дней между инкассациями;  $365 / n$  – среднее число инкассаций в году;  $\sigma$  – годовая процентная ставка краткосрочного кредитования;  $I$  – затраты на инкассацию (зарплата сотрудников, амортизация транспортного средства, обслуживание транспортного средства, топливо, форменная одежда инкассаторов, связь, индивидуальные средства защиты и пр.);  $K$  – затраты на загрузку купюр в кассеты и пересчет возвращенных купюр (цена устройства сортировки банкнот, зарплата сотрудников, стоимость аренды площадей и пр.).

Требуется минимизировать потери  $\Pi$  при естественных ограничениях числа купюр в кассетах  $0 \leq f_i(t_k) \leq 2000$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

Для построения зависимостей  $f_i(t_k)$  рассматриваются данные наблюдений за расходом купюр в банкоматах коммерческой и бюджетной организаций в течение продолжительного времени (табл. 1 и 2).

Данные наблюдений за числом купюр в банкомате, установленном в бюджетной организации

Таблица 1

День наблюдения	Номер кассеты			
	1	2	3	4
1	2	3	4	5
<b>1</b>	1363	1671	990	1173
<b>2</b>	1248	1585	965	968
<b>3</b>	1159	1515	945	854
<b>4</b>	1072	1457	932	707
<b>5</b>	995	1384	923	563
<b>6</b>	916	1312	909	430
<b>7</b>	901	1265	901	382
<b>8</b>	834	1215	891	303
День наблюдения	Номер кассеты			
	1	2	3	4
1	2	3	4	5
<b>31</b>	1806	1436	945	1066
<b>32</b>	1806	1380	930	1033
<b>33</b>	1798	1346	923	1004
<b>34</b>	1758	1161	890	957
<b>35</b>	1645	529	789	831
<b>36</b>	1039	0	699	686
<b>37</b>	46	0	615	542
<b>38</b>	0	0	550	420
День наблюдения	Номер кассеты			
	1	2	3	4
1	2	3	4	5
<b>61</b>	633	1156	644	1882
<b>62</b>	569	724	567	1802
<b>63</b>	565	656	554	1797
<b>64</b>	441	23	466	1640
<b>65</b>	0	0	403	1452
<b>66</b>	757	1694	956	1441
<b>67</b>	716	1512	930	1087
<b>68</b>	704	1443	923	1056

<b>9</b>	772	1170	875	215
<b>10</b>	725	1130	864	158
<b>11</b>	632	1067	850	83
<b>12</b>	502	980	594	0
<b>13</b>	455	939	434	0
<b>14</b>	433	914	358	0
<b>15</b>	993	1987	994	1274
<b>16</b>	410	1674	854	1119
<b>17</b>	2	1422	762	914
<b>18</b>	1	1165	669	547
<b>19</b>	1	919	594	235
<b>20</b>	1	815	565	170
<b>21</b>	1	777	555	118
<b>22</b>	1	596	354	16
<b>23</b>	1158	1390	1081	1441
<b>24</b>	1121	1192	1058	1335
<b>25</b>	1078	951	1041	1272
<b>26</b>	1009	634	996	1048
<b>27</b>	966	310	953	691
<b>28</b>	950	196	932	539
<b>29</b>	0	84	877	275
<b>30</b>	1871	1787	988	1159

<b>39</b>	1570	1626	951	1814
<b>40</b>	1495	1146	898	1524
<b>41</b>	1447	876	870	1401
<b>42</b>	1443	804	858	1344
<b>43</b>	1408	440	818	1250
<b>44</b>	1360	107	785	1110
<b>45</b>	1307	0	778	1060
<b>46</b>	817	0	752	872
<b>47</b>	780	1942	987	1976
<b>48</b>	764	1782	971	1939
<b>49</b>	758	1730	966	1893
<b>50</b>	749	1567	950	1833
<b>51</b>	714	1343	926	1719
<b>52</b>	682	1168	914	1653
<b>53</b>	657	938	891	1400
<b>54</b>	631	594	848	1195
<b>55</b>	617	398	831	1106
<b>56</b>	607	318	815	1068
<b>57</b>	571	149	796	981
<b>58</b>	294	47	777	905
<b>59</b>	45	40	761	836
<b>60</b>	45	40	745	781

<b>69</b>	653	1020	875	706
<b>70</b>	613	732	844	401
<b>71</b>	561	512	820	276
<b>72</b>	538	359	801	195
<b>73</b>	524	175	776	87
<b>74</b>	505	48	755	0
<b>75</b>	499	1	683	0
<b>76</b>	799	1999	696	999
<b>77</b>	777	1902	684	959
<b>78</b>	760	1723	664	891
<b>79</b>	721	1567	647	829
<b>80</b>	707	1391	622	611
<b>81</b>	677	1256	601	478
<b>82</b>	653	1158	585	327
<b>83</b>	638	920	550	73
<b>84</b>	782	1926	694	972
<b>85</b>	745	1627	663	733
<b>86</b>	708	1381	628	299
<b>87</b>	654	1184	600	34
<b>88</b>	644	1056	251	0
<b>89</b>	639	963	189	0
<b>90</b>	604	1115	847	1259

1	2	3	4	5
<b>91</b>	751	1677	746	1259
<b>92</b>	670	1142	673	1006
<b>93</b>	625	863	622	602
<b>94</b>	616	776	603	542
<b>95</b>	611	694	587	481
<b>96</b>	551	309	526	24
<b>97</b>	899	1468	829	1496
<b>98</b>	711	1461	728	1474
<b>99</b>	678	1242	704	1354
<b>100</b>	663	872	663	1079
<b>101</b>	656	799	646	1001
<b>102</b>	656	793	644	1000
<b>103</b>	652	750	638	990
<b>104</b>	626	565	623	891
<b>105</b>	594	411	602	791
<b>106</b>	555	161	583	654
<b>107</b>	345	0	542	213
<b>108</b>	0	0	514	55
<b>109</b>	669	1808	680	1601
<b>110</b>	639	1552	649	1335
<b>111</b>	594	1329	614	1124
<b>112</b>	586	1114	582	916
<b>113</b>	567	978	564	818

1	2	3	4	5
<b>136</b>	572	609	306	354
<b>137</b>	552	321	256	298
<b>138</b>	232	307	216	254
<b>139</b>	700	1800	440	1835
<b>140</b>	670	1581	423	1516
<b>141</b>	643	1371	413	1135
<b>142</b>	616	1161	403	754
<b>143</b>	598	951	393	698
<b>144</b>	590	831	324	667
<b>145</b>	571	581	291	551
<b>146</b>	555	350	269	464
<b>147</b>	670	2014	685	2000
<b>148</b>	521	1326	568	1878
<b>149</b>	466	955	511	1723
<b>150</b>	452	884	504	1707
<b>151</b>	187	432	398	1541
<b>152</b>	3	0	297	1381
<b>153</b>	1463	1847	1973	1672
<b>154</b>	1391	1232	1896	597
<b>155</b>	1359	959	1860	280
<b>156</b>	1328	720	1703	0
<b>157</b>	1328	708	1658	0
<b>158</b>	1305	553	1215	0

1	2	3	4	5
<b>181</b>	652	1190	673	634
<b>182</b>	615	959	648	175
<b>183</b>	582	855	415	0
<b>184</b>	494	0	0	0
<b>185</b>	578	1886	786	1872
<b>186</b>	571	1776	772	1741
<b>187</b>	560	1693	761	1679
<b>188</b>	547	1546	739	1524
<b>189</b>	531	1489	726	1459
<b>190</b>	519	1369	714	1367
<b>191</b>	504	1325	708	1321
<b>192</b>	480	1176	694	1178
<b>193</b>	466	1101	682	1070
<b>194</b>	460	979	671	967
<b>195</b>	389	661	617	811
<b>196</b>	364	541	596	701
<b>197</b>	341	359	574	524
<b>198</b>	329	262	554	480
<b>199</b>	289	94	523	390
<b>200</b>	4	0	505	307
<b>201</b>	590	1934	584	1554
<b>202</b>	566	1776	565	1478
<b>203</b>				

508 1223 498 1081

<b>114</b>	556	861	551	770
<b>115</b>	548	789	541	723
<b>116</b>	531	604	520	608
<b>117</b>	478	311	487	515
<b>118</b>	597	1461	606	1300
<b>119</b>	568	1327	586	1206
<b>120</b>	478	1193	474	1112
<b>121</b>	388	1059	362	1018
<b>122</b>	298	925	350	924
<b>123</b>	0	0	347	823
<b>124</b>	0	0	295	769
<b>125</b>	638	1662	461	1649
<b>126</b>	561	1090	416	1441
<b>127</b>	503	641	366	1216
<b>128</b>	445	192	316	991
<b>129</b>	387	123	266	766
<b>130</b>	200	100	262	476
<b>131</b>	100	30	221	391
<b>132</b>	669	1801	486	1421
<b>133</b>	632	1527	456	1254
<b>134</b>	612	1221	406	954
<b>135</b>	592	915	356	654

	1	2	3	4	5
<b>226</b>	738	1497	56	1741	
<b>227</b>	703	1234	37	1538	
<b>228</b>	664	979	18	1329	
<b>229</b>	592	152	0	919	
<b>230</b>	0	0	0	730	
<b>231</b>	995	1937	792	903	
<b>232</b>	983	1809	770	794	
<b>233</b>	943	1495	749	713	
<b>234</b>	889	992	709	500	
<b>235</b>	522	1507	735	1467	
<b>236</b>	503	1373	718	1359	
<b>237</b>	476	1167	694	1200	
<b>238</b>	468	1044	687	1036	

<b>159</b>	898	1310	1411	1072
<b>160</b>	861	1021	1383	598
<b>161</b>	839	870	1361	410
<b>162</b>	811	729	1341	287
<b>163</b>	752	193	1021	0
<b>164</b>	987	1889	788	1339
<b>165</b>	962	1712	771	1251
<b>166</b>	962	1712	771	1251
<b>167</b>	962	1712	771	1251
<b>168</b>	918	1484	740	1127
<b>169</b>	878	1316	707	1013
<b>170</b>	844	1092	684	870
<b>171</b>	831	957	668	722
<b>172</b>	814	811	651	632
<b>173</b>	770	549	616	411
<b>174</b>	747	442	601	361
<b>175</b>	709	226	580	96
<b>176</b>	771	1884	781	1277
<b>177</b>	748	1727	755	1111
<b>178</b>	714	1439	713	919
<b>179</b>	685	1321	691	827
<b>180</b>	668	1272	684	763

	1	2	3	4	5
<b>239</b>	420	771	648	887	
<b>240</b>	16	0	510	690	
<b>241</b>	0	0	480	532	
<b>242</b>	1932	1526	730	1334	
<b>243</b>	1834	916	643	1020	
<b>244</b>	1782	507	604	917	
<b>245</b>	1751	263	581	851	
<b>246</b>	1727	68	559	719	
<b>247</b>	1970	1719	1762	1202	
<b>248</b>	1734	1315	1706	797	
<b>249</b>	1864	1100	1677	281	
<b>250</b>	1859	975	1660	85	
<b>251</b>	1838	814	1541	0	

<b>204</b>	430	758	437	922
<b>205</b>	387	427	400	794
<b>206</b>	356	167	367	709
<b>207</b>	1	0	317	493
<b>208</b>	1	0	317	493
<b>209</b>	1	0	275	86
<b>210</b>	589	1910	591	1485
<b>211</b>	585	1903	589	1474
<b>212</b>	551	1747	571	1387
<b>213</b>	526	1588	550	1207
<b>214</b>	439	874	444	711
<b>215</b>	397	587	408	609
<b>216</b>	385	435	388	508
<b>217</b>	373	272	372	406
<b>218</b>	455	1053	462	1342
<b>219</b>	306	161	319	1059
<b>220</b>	0	0	263	927
<b>221</b>	0	0	220	314
<b>222</b>	516	1458	725	1276
<b>223</b>	438	972	651	418
<b>224</b>	412	827	476	0
<b>225</b>	769	1799	119	1999

	1	2	3	4	5
<b>252</b>	1795	1778	1776	1346	
<b>253</b>	1752	1762	1771	1328	
<b>254</b>	1960	1430	1732	1077	
<b>255</b>	1956	1344	1726	984	
<b>256</b>	1915	1270	1714	947	
<b>257</b>	1900	1115	1707	888	
<b>258</b>	1874	895	1684	747	
<b>259</b>	1856	0	1573	246	
<b>260</b>	1822	1780	1873	1818	
<b>261</b>	1245	1374	1837	1550	
<b>262</b>	764	720	1760	925	
<b>263</b>	703	600	1752	811	
<b>264</b>	570	0	320	0	

Предполагается, что зависимость количества купюр каждого номинала в каждой из кассет банкомата в зависимости от времени определяется функцией

$$f_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3, \quad (3)$$

где коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  и  $d_i$  находятся методом наименьших квадратов:

$$F_i = \sum_{k=0}^n [a_i + b_i t_k + c_i t_k^2 + d_i t_k^3 - V_i(t_k)]^2 \rightarrow \min, \quad (4)$$

где  $V_i(t_k)$  – известные из наблюдений на день  $t_k$  количества купюр  $i$ -го номинала,  $i = \overline{1,4}$ .

Таблица 2

Данные наблюдений за числом купюр в банкомате, установленном в коммерческой организации

День наблюдения	Номер кассеты			
	1	2	3	4
1	689	1625	791	1580
2	668	1558	787	1542
3	645	1470	780	1493
4	641	1466	780	1476
5	641	1466	780	1476
6	630	1419	767	1475
7	610	1388	678	1475
8	591	1303	308	1473
9	60	27	0	1063
10	105	1893	165	1782
11	103	1360	1	1739
12	103	1360	1	1739
13	104	1854	1791	29
14	992	1616	1638	0
15	965	1345	1386	0
16	678	1209	1260	0
17	622	1105	1172	0
18	618	1095	990	0
19	613	1071	964	0
20	588	841	479	0
21	687	1763	992	1308
22	665	1650	981	1107
23	638	1485	957	968
24	581	1128	917	432
25	581	1127	914	395
26	581	1113	911	395
27	550	925	881	193
28	526	696	853	50
29	687	1492	991	1263
30	666	1336	980	1177

День наблюдения	Номер кассеты			
	1	2	3	4
31	655	1157	958	1072
32	654	1142	957	1063
33	654	1142	957	1062
34	638	1016	939	984
35	628	894	920	906
36	618	802	908	829
37	599	680	900	758
38	576	457	871	488
39	546	280	852	221
40	546	280	852	215
41	1333	1524	1743	1409
42	1240	1108	1683	793
43	1214	834	1646	517
44	1214	834	1645	513
45	1214	834	1645	513
46	1214	790	1643	504
47	1182	605	1626	347
48	1144	455	1613	246
49	1129	266	1589	133
50	1114	151	1578	50
51	1084	23	1449	0
52	487	0	1131	0
53	448	0	1071	0
54	389	0	1017	0
55	977	1313	1592	1957
56	958	1124	1562	1870
57	955	1114	1560	1837
58	944	1037	1553	1798
59	923	960	1533	1728
60	917	908	1528	1694

День наблюдения	Номер кассеты			
	1	2	3	4
61	917	907	152	1694
62	897	838	151	1655
63	873	723	149	1609
64	863	636	148	1559
65	753	86	140	728
66	2	0	136	419
67	2	0	136	351
68	2	0	136	351
69	990	1300	158	1911
70	972	1134	157	1778
71	963	1004	155	1678
72	941	893	154	1651
73	924	756	152	1561
74	924	750	152	1554
75	924	750	152	1554
76	892	635	151	1464
77	841	304	147	879
78	473	0	142	10
79	766	1886	138	1872
80	729	1667	135	1626
81	721	1632	135	1161
82	721	1632	135	1161
83	694	1495	133	1533
84	683	1367	131	1444
85	643	1221	130	1381
86	635	1141	129	1308
87	608	1017	127	1200
88	604	997	127	1184
89	604	986	127	1184
90	571	838	125	1138



1	2	3	4	5
91	557	701	1248	1117
92	545	621	1242	1085
93	537	508	1235	1063
94	510	294	1214	626
95	504	255	1210	581
96	501	254	1210	581
97	786	1947	789	1704
98	769	1827	780	1594
99	708	1637	749	1125
100	1458	1796	1769	1434
101	1419	1558	1744	895
102	1403	1449	1731	749
103	1403	1449	1731	749
104	1380	1247	1701	498
105	1366	1109	1682	350
106	1345	948	1663	222
107	1313	772	1624	42
108	978	1884	980	1869
109	974	1859	973	1849
110	971	1844	972	1844
111	967	1833	971	1826
112	943	1616	934	1643
113	924	1465	921	1578
114	910	1360	898	1419
115	892	1211	877	1329
116	884	1146	870	1278
117	884	1142	867	1268
118	884	1125	865	1258
119	884	1119	865	1256
120	872	979	843	1177
121	856	857	822	1079
122	837	693	809	995
123	829	557	795	763
124	829	557	795	763
125	739	86	744	103
126	657	1797	672	1947
127	629	1655	647	1797
128	565	1354	601	1275
129	525	1098	570	927
130	523	1095	568	902
131	518	1078	566	891
132	500	912	553	728
133	487	796	544	601
134	475	661	524	462
135	475	657	522	456

1	2	3	4	5

1	2	3	4	5
136	475	564	509	394
137	475	471	496	332
138	475	378	483	270
139	475	1859	482	1785
140	462	1665	461	1689
141	451	1571	453	1559
142	438	1411	439	1515
143	417	1314	427	1432
144	401	1217	425	1349
145	399	1190	423	1345
146	397	1187	414	1341
147	377	1077	402	1300
148	369	987	393	1256
149	361	947	384	1194
150	341	947	384	1051
151	321	648	379	908
152	301	512	377	765
153	301	409	375	622
154	301	327	374	564
155	281	1730	149	204
156	581	1730	669	1504
157	581	1258	669	1406
158	571	569	658	1308
159	565	492	643	1280
160	561	1280	641	1275
161	526	1153	616	1039
162	495	888	599	924
163	478	741	571	775
164	462	725	558	704
165	462	717	556	702
166	462	531	555	702
167	440	447	529	641
168	419	355	526	536
169	400	236	517	498
170	384	53	506	441
171	362	0	486	293
172	20	0	471	196
173	0	0	458	158
174	0	0	448	93
175	0	0	447	81
176	960	1532	1563	1415
177	935	1369	1537	1066
178	909	1071	1519	870
179	885	872	1471	457
180	875	681	1452	362

1	2	3	4	5

1	2	3	4	5
181	857	573	1427	196
182	848	419	1408	135
183	830	227	1390	69
184	817	100	1204	0
185	802	13	907	0
186	781	8	812	0
187	787	1773	995	969
188	783	1628	982	905
189	762	1482	967	821
190	729	1370	948	677
191	714	1316	927	605
192	710	1223	919	542
193	698	1150	916	442
194	679	1061	903	315
195	667	999	897	207
196	663	926	893	142
197	651	861	885	72
198	555	1575	971	1610
199	505	1410	950	1406
200	474	1264	936	1258
201	453	1198	919	1177
202	451	1052	910	1104
203	448	1042	905	1035
204	441	946	902	997
205	429	814	888	912
206	394	789	874	861
207	392	680	870	835
208	381	642	852	705
209	376	611	843	695
210	365	585	839	652
211	360	392	835	618
212	150	392	820	536
213	0	257	809	483
214	0	125	792	357
215	0	91	780	282
216	0	15	760	184
217	587	1806	593	990
218	572	1763	576	859
219	553	1630	564	815
220	527	1630	551	776
221	527	1602	551	776
222	525	1536	549	766
223	516	1528	540	713
224	515	1424	540	705
225	492	1395	525	612

1	2	3	4	5

226	486	1749	519	594
227	566	1602	768	1514
228	554	1513	757	1351
229	543	1331	747	1346
230	527	990	720	894
231	481	879	695	591
232	459	783	682	486
233	436	783	673	343
234	436	783	673	343
235	436	698	673	343
236	567	1674	675	1462
237	544	1484	658	1320
238	505	1374	632	957
239	487	1279	622	860
240	468	1178	616	791
241	452	1037	609	740
242	438	903	595	652
243	422	796	576	502
244	412	481	569	427

245	395	0	562	382
246	161	0	542	266
247	0	0	536	231
248	0	0	536	231
249	681	1070	1299	682
250	459	933	1273	403
251	451	798	1253	168
252	255	748	787	0
253	767	1653	1874	1635
254	736	1439	1860	1500
255	708	1293	1833	1146
256	688	1077	1818	991
257	666	922	1800	497
258	633	831	1777	264
259	616	746	1768	134
260	616	672	1757	58
261	616	534	1739	5
262	592	442	1076	0
263	578	337	911	0

363	549	222	480	0
364	531	1826	411	1986
365	788	1733	1888	1938
366	763	1680	1883	1866
367	755	1420	1878	1813
368	707	1403	1849	1517
369	707	1254	1845	1496
370	692	1165	1822	1332
371	672	1090	1819	1264
372	662	1006	1810	1188
373	652	968	1808	1142
374	648	859	1803	1097
375	623	643	1797	1030
376	549	558	1782	752
377	512	435	1756	316
378	440	80	1550	0
379	1990	1808	980	1867
380	1983	1725	973	1770
381	1972	1620	963	1602

Использование необходимых условий экстремума функции  $F_i$  нескольких переменных приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  и  $d_i$ ,

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_i} = 2 \sum_{k=0}^n [a_i + b_i t_k + c_i t_k^2 + d_i t_k^3 - V_i(t_k)] = 0,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial b_i} = 2 \sum_{k=0}^n [a_i + b_i t_k + c_i t_k^2 + d_i t_k^3 - V_i(t_k)] t_k = 0,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial c_i} = 2 \sum_{k=0}^n [a_i + b_i t_k + c_i t_k^2 + d_i t_k^3 - V_i(t_k)] t_k^2 = 0,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial d_i} = 2 \sum_{k=0}^n [a_i + b_i t_k + c_i t_k^2 + d_i t_k^3 - V_i(t_k)] t_k^3 = 0$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i n + b_i \sum_{k=0}^n t_k + c_i \sum_{k=0}^n t_k^2 + d_i \sum_{k=0}^n t_k^3 = \sum_{k=0}^n V(t_k), \\ a_i \sum_{k=0}^n t_k + b_i \sum_{k=0}^n t_k^2 + c_i \sum_{k=0}^n t_k^3 + d_i \sum_{k=0}^n t_k^4 = \sum_{k=0}^n V(t_k) t_k, \\ a_i \sum_{k=0}^n t_k^2 + b_i \sum_{k=0}^n t_k^3 + c_i \sum_{k=0}^n t_k^4 + d_i \sum_{k=0}^n t_k^5 = \sum_{k=0}^n V(t_k) t_k^2, \\ a_i \sum_{k=0}^n t_k^3 + b_i \sum_{k=0}^n t_k^4 + c_i \sum_{k=0}^n t_k^5 + d_i \sum_{k=0}^n t_k^6 = \sum_{k=0}^n V(t_k) t_k^3. \end{array} \right. \quad (5)$$

Коэффициенты системы (5) в соответствии с данными наблюдений (табл. 2 и 3) и решения систем линейных алгебраических уравнений для каждой из кассет банкоматов, установленных в бюджетной и коммерческой организациях, представлены в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Применение метода наименьших квадратов для аппроксимации данных натуральных наблюдений за расходом купюр в банкомате, установленном в бюджетной организации

Номер кассеты	Система линейных алгебраических уравнений	Решение
1	$\left\{ \begin{array}{l} 276a + 1033b + 6413c + 49783d = 198588, \\ 1033a + 6413b + 49783c + 446561d = 623135, \\ 6413a + 49783b + 446561c + 4413223d = 3404847, \\ 49783a + 446561b + 4413223c + 46591193d = 23630273 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} a = 905,568 \\ b = -59,261 \\ c = 2,744 \\ d = -0,125 \end{array}$
2	$\left\{ \begin{array}{l} 274a + 1022b + 6352c + 49442d = 257406, \\ 1022a + 6352b + 49442c + 444640d = 668995, \\ 6352a + 49442b + 444640c + 4402322d = 3492193, \\ 49442a + 444640b + 4402322c + 46528912d = 24341089 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} a = 1599,173 \\ b = -307,749 \\ c = 27,776 \\ d = -0,863 \end{array}$
3	$\left\{ \begin{array}{l} 274a + 1022b + 6352c + 49442d = 198269, \\ 1022a + 6352b + 49442c + 444640d = 674446, \\ 6352a + 49442b + 444640c + 4402322d = 4045552, \\ 49442a + 444640b + 4402322c + 46528912d = 30857338 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} a = 874,310 \\ b = -72,753 \\ c = 7,068 \\ d = -0,239 \end{array}$

4	$\begin{cases} 274a + 1022b + 6352c + 49442d = 240488, \\ 1022a + 6352b + 49442c + 444640d = 662931, \\ 6352a + 49442b + 444640c + 4402322d = 3555487, \\ 49442a + 444640b + 4402322c + 46528912d = 25078467 \end{cases}$	$\begin{aligned} a &= 1400,639 \\ b &= -245,672 \\ c &= 23,089 \\ d &= -0,786 \end{aligned}$
---	---	--

Таблица 4

Применение метода наименьших квадратов для аппроксимации данных натуральных наблюдений за расходом купюр в банкомате, установленном в коммерческой организации

№ кас-сеты	Система линейных алгебраических уравнений	Решение
1	$\begin{cases} 288a + 1693b + 15685c + 174151d = 190875, \\ 1693a + 15685b + 174151c + 2152441d = 945056, \\ 15685a + 174151b + 2152441c + 28566463d = 7825790, \\ 174151a + 2152441b + 28566463c + 398685865d = 79549382 \end{cases}$	$\begin{aligned} a &= 840,374 \\ c &= 0,609 \\ b &= -31,781 \\ d &= -0,04 \end{aligned}$
2	$\begin{cases} 284a + 1576b + 13890c + 147574d = 293939, \\ 1576a + 13890b + 147574c + 1756662d = 1148630, \\ 13890a + 147574b + 1756662c + 22601086d = 8188298, \\ 147574a + 1756662b + 22601086c + 307667430d = 74266322 \end{cases}$	$\begin{aligned} a &= 1668,112 \\ b &= -155,478 \\ c &= 5,470 \\ d &= -0,073 \end{aligned}$
3	$\begin{cases} 288a + 1693b + 15685c + 174151d = 286669, \\ 1693a + 15685b + 174151c + 2152441d = 1566215, \\ 15685a + 174151b + 2152441c + 28566463d = 13765729, \\ 174151a + 2152441b + 28566463c + 398685865d = 146450495 \end{cases}$	$\begin{aligned} a &= 1087,003 \\ b &= -8,033 \\ c &= -0,506 \\ d &= -0,028 \end{aligned}$
4	$\begin{cases} 288a + 1693b + 15685c + 174151d = 256702, \\ 1693a + 15685b + 174151c + 2152441d = 1160012, \\ 15685a + 174151b + 2152441c + 28566463d = 9474372, \\ 174151a + 2152441b + 28566463c + 398685865d = 96688862 \end{cases}$	$\begin{aligned} a &= 1415,098 \\ b &= -168,933 \\ c &= 13,015 \\ d &= -0,396 \end{aligned}$

Соответствующие приведенным в табл. 3 и 4 решениям функции, аппроксимирующие зависимости от времени количества купюр в кас-

сетях банкоматов, представлены в табл. 5 и 6, а также приведены на рис. 1 для банкомата, установленного в бюджетной организации, и на рис. 2 – для банкомата, установленного в коммерческой организации.

Зависимость от времени количества купюр в первой кассете банкомата, установленного в бюджетной организации, определяется выражением

$$f_1^{\text{бюджет}}(t) = 905,568 - 59,261t + 2,744t^2 - 0,125t^3$$

Очевидно, что при  $t = 0$  значение этой функции равно  $f_1^{\text{бюджет}}(t) = 905,568$ , т.е. коэффициент 905,568 приближенно определяет начальное значение числа загружаемых в кассету банкомата купюр. Производная рассматриваемой функции

$$\left[ f_1^{\text{бюджет}}(t) \right]' = -59,261 + 2,744t - 0,250t^2$$

при  $t = 0$  принимает значение  $\left[ f_1^{\text{бюджет}}(t) \right]' = -59,261$ , т.е. второй коэффициент, равный  $-59,261$ , определяет скорость изменения числа купюр в той же кассете в начальный момент времени. Аналогично определяется смысл остальных коэффициентов рассматриваемого выражения.

Построенные зависимости от времени количества денежных купюр в кассетах банкомата позволяют определить суммарный объем денежных средств (1) в банкоматах и, соответственно, перейти к минимизации функции потерь (2). Для решения оптимизационной задачи используется метод Нелдера и Мида [7], хорошо зарекомендовавший себя при решении прикладных задач.

Таблица 5

Функции, аппроксимирующие данные натуральных наблюдений за расходом купюр в банкомате, установленном в бюджетной организации

Номер кассеты	Аналитическая запись функции
1	$f_1^{\text{бюджет}}(t) = 905,568 - 59,261t + 2,774t^2 - 0,125t^3$
2	$f_2^{\text{бюджет}}(t) = 1599,173 - 307,749t + 27,776t^2 - 0,863t^3$
3	$f_3^{\text{бюджет}}(t) = 874,310 - 72,753t + 7,068t^2 - 0,239t^3$
4	$f_4^{\text{бюджет}}(t) = 1415,098 - 168,933t + 13,015t^2 - 0,39t^3$

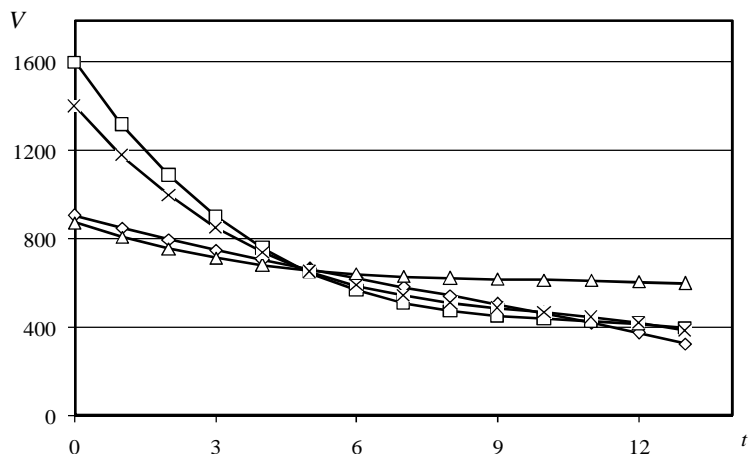


Рис. 1. Аппроксимация зависимостей от времени  $t$  числа купюр  $V$  в 1-й кассете ( $-\diamond-$ ), 2-й кассете ( $-\square-$ ), 3-й кассете ( $-\Delta-$ ), 4-й кассете ( $-\times-$ ) (банкомат в бюджетной организации)

Таблица 6

Функции, аппроксимирующие данные натуральных наблюдений за раходом купюр в банкомате, установленном в коммерческой организации

Номер кассеты	Аналитическая запись функции
1	$f_1^{\text{KOM}}(t) = 840,374 - 31,781t + 0,609t^2 - 0,04t^3$
2	$f_2^{\text{KOM}}(t) = 1668,112 - 155,478t + 5,470t^2 - 0,073t^3$
3	$f_3^{\text{KOM}}(t) = 1087,003 - 8,033t - 0,506t^2 - 0,028t^3$
4	$f_4^{\text{KOM}}(t) = 1415,098 - 168,933t + 13,015t^2 - 0,396t^3$

Пусть  $A_1$  – начальное число купюр в 1-й кассете банкомата. Тогда зависимость количества купюр от времени в 1-й кассете банкомата, установленного в бюджетной организации, можно представить выражением

$$f_1^{\text{бюджет}}(t) = A_1 - 59,261t + 2,744t^2 - 0,125t^3.$$

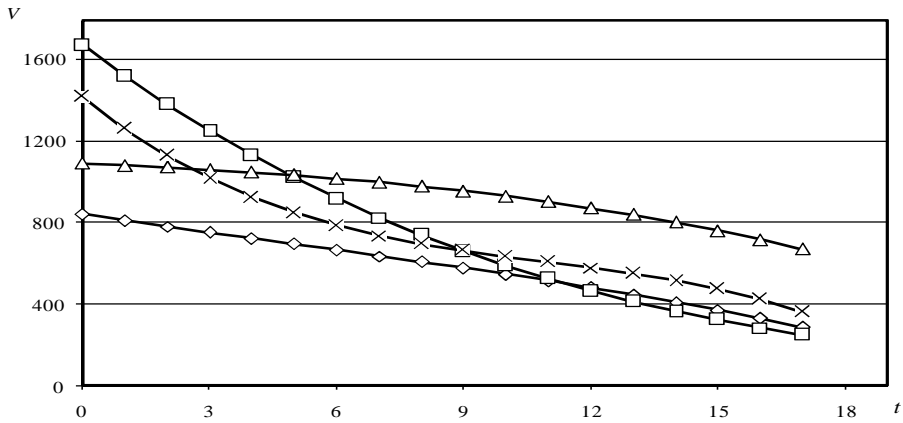


Рис. 2. Аппроксимация зависимостей от времени  $t$  числа купюр  $V$  в 1-й кассете ( $-\diamond-$ ), 2-й кассете ( $-\square-$ ), 3-й кассете ( $-\Delta-$ ), 4-й кассете ( $-\times-$ ) (банк-комат в коммерческой организации)

Таблица 7

Поиск минимума функции методом Нелдера – Мида  
(банк-комат в бюджетной организации)

Номер шага в кассете	Число купюр в кассете				Сумма загрузки банк-комата	Значение целевой функции
	2	3	4	5		
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
1	1000	1	1	1	1000610	69810
2	1	1000	1	1	501110	131686
3	1	1	1000	1	101510	39521
4	1	1	1	1000	11600	65840
5	1	1	1	1	1610	328527
6	500	500	500	500	805000	53453
7	188	563	188	188	490180	171938
8	500	1	500	1	550510	52616
9	1	500	500	1	301010	46756
10	1	1	1000	1	101510	39521
11	1	1	500	500	56500	45959
12	251	251	750	251	454010	43228
13	282	95	594	95	389850	46475
14	67	294	606	106	275660	44916
15	181	116	654	155	305950	43740
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
16	63	83	627	314	170340	42891

17	96	203	682	143	267130	43400
18	24	153	875	200	190000	40655
19	74	41	944	240	191300	40996
20	146	160	806	220	308800	42459
21	59	95	1186	16	225260	39142
22	93	116	904	167	243070	40951
23	59	66	968	168	190480	41070
24	42	124	1031	108	208180	39854
25	67	68	1065	128	208780	40026
26	30	48	1093	8	163380	40049
27	59	95	1186	16	225260	39142
28	76	105	1045	91	233910	40001
29	92	148	1070	163	274630	40218
30	46	73	1087	47	191670	40075
31	51	109	1108	62	216920	40215
32	63	81	1126	72	216820	40304
33	45	71	1140	12	194620	38874
34	59	95	1186	16	225260	39142
35	68	100	1115	54	230040	40292
36	59	88	1131	54	216640	40323
37	48	90	1124	37	205770	40264
38	54	76	1133	42	205720	40303
39	45	71	1140	12	194620	38874
40	52	83	1163	14	209940	39005
...	...	...	...	...	....	...
396	3	24	1136	556	134160	38758
397	3	24	1136	555	134150	38758
398	3	24	1136	554	134140	40193
399	3	24	1136	553	134130	38765
400	3	24	1136	549	134090	38761
401	3	24	1136	551	134110	38759
402	3	24	1136	552	134120	38758

Аналогичным образом можно представить зависимости количества купюр от времени в остальных кассетах рассматриваемого банкомата:

$$f_2^{\text{бюджет}}(t) = A_2 - 307,749t + 27,776t^2 - 0,863t^3$$

$$f_3^{\text{бюджет}}(t) = A_3 - 72,753t + 7,068t^2 - 0,239t^3,$$



$$f_4^{\text{бюджет}}(t) = A_4 - 245,672t + 23,089t^2 - 0,786t^3.$$

Теперь целевую функцию (2) задачи оптимизации можно представить в виде

$$\Pi(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{365}{n} \left[ \frac{\sigma}{36500} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^4 N_i f_i^{\text{бюджет}}(t_k) + I + K \right]. \quad (6)$$

С учетом принятых обозначений задача оптимизации сводится к поиску величин  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , доставляющих минимум целевой функции (6) при ограничениях-неравенствах

$$0 \leq A_i \leq 2000, \quad i = \overline{1,4}. \quad (7)$$

Таблица 8

Поиск минимума функции методом Нелдера – Мида  
(банкомат в коммерческой организации)

Номер шага в кассете	Число купюр в кассете				Сумма за-грузки банкомата	Значение целе- вой функции
	2	3	4	5		
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
1	1000	1	1	1	1000610	64001
2	1	1000	1	1	501110	99651
3	1	1	1000	1	101510	38348
4	1	1	1	1000	11600	52035
5	1	1	1	1	1610	328527
6	500	500	500	500	805000	60218
7	188	563	188	188	490180	75872
8	282	344	282	282	485020	67969
9	329	235	329	329	482690	65248
10	422	17	422	422	476920	58495
11	616	65	241	241	675010	62675
12	423	98	361	361	511710	64852
13	308	33	620	121	387710	48588
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
14	212	9	711	212	289720	45077
15	1	1	1000	1	101510	38348
16	1	1	500	500	56500	48448

17	251	251	750	251	454010	44451
18	212	49	680	181	306310	44985
19	85	39	643	331	172110	45240
20	127	58	714	246	229860	44047
21	84	171	861	128	256880	41113
22	19	191	982	132	214020	38508
23	154	178	820	189	326890	41543
24	96	97	815	179	227790	40889
25	102	147	867	149	263690	41225
26	76	131	891	130	231900	39627
27	12	39	983	93	130730	38325
28	61	94	890	134	198340	39505
29	50	106	927	110	196800	39647
30	16	115	983	112	172920	38398
31	12	39	983	93	130730	38325
32	7	20	991	47	116570	38337
33	37	66	936	113	164730	39604
34	44	85	937	111	181310	39652
35	31	72	955	101	163510	38259
36	26	64	957	101	154710	38253
37	17	82	977	99	156690	38346
38	21	16	966	72	126320	38241
39	39	76	939	137	172270	39634
40	15	34	978	69	130490	38303
...						
201	23	1	955	86	119860	38205
202	23	1	955	85	119850	39199
203	23	1	955	82	119820	38195
204	23	1	955	80	119800	38188
205	23	1	955	78	119780	38185
206	23	1	955	77	119770	38180
207	23	1	955	76	119760	38178

Для минимизации целевой функции (6) при ограничениях (7) принято: номиналы купюр  $N_1 = 1000$  руб.,  $N_2 = 500$  руб.,  $N_3 = 100$  руб.,  $N_4 = 10$  руб.; затраты на загрузку денежной наличности в кассеты и однократную инкассацию  $K = 1200$  руб.,  $I = 1500$  руб.; число  $n$  дней до инкассации в выражении (6) определяется из условия, что чис-

до купюр в банкомате уменьшается до нуля. Поиск минимума целевой функции (6) при ограничениях (7) для банкомата, установленного в бюджетной организации, отражен в табл. 7.

Решение оптимизационной задачи представлено вектором

$$A_1 = 3, \quad A_2 = 24, \quad A_3 = 1136, \quad A_4 = 552.$$

В этом случае загрузка банкомата составляет 134 120 руб. Целевая функция уменьшилась со значения  $\Pi_0 = 328\,527$  в одной из точек начального симплекса до значения  $\Pi_{\text{опт}} = 38\,758$ .

Аналогичным образом получено решение оптимизационной задачи для банкомата, установленного в коммерческой организации. Поиск минимума целевой функции (6) при ограничениях (7) в этом случае представлен в табл. 8.

Решение оптимизационной задачи представлено вектором

$$A_1 = 23, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 955, \quad A_4 = 76.$$

В этом случае загрузка банкомата составляет 119 760 руб. Целевая функция уменьшилась со значения  $\Pi_0 = 328\,527$  в одной из точек начального симплекса до значения  $\Pi_{\text{опт}} = 38\,178$ .

Таким образом, сформулирована постановка задачи оптимизации загрузки банкоматов, сконструирована целевая функция потерь, минимум которой обеспечивает оптимальную загрузку банкоматов купюрами. Собраны данные об объеме денежной наличности в банкоматах, установленных в бюджетной и коммерческой организациях, за продолжительный промежуток времени. С помощью метода наименьших квадратов построена аналитическая зависимость количества купюр в кассетах банкоматов от времени. Найдена оптимальная загрузка банкоматов денежными купюрами для реализации «зарплатного» договора в коммерческой и бюджетной организациях.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Димитриу Н.В., Никитин Д.А. Оценка текущего состояния и перспектив развития рынка банковских карт // Деньги и Кредит. – 2008. – № 5. – С. 35–38.
2. Лысков А. Эффективность сети банкоматов в многофилиальном банке // Мир Карточек. – 2003. – № 4. – С. 38–47.
3. Летавин М.И., Плашенков В.В., Беляева П.А. Статистический анализ оттока наличности из сети банкоматов // Финансы и Кредит. – 2007. – № 30 (270). – С. 9–14.
4. Васин Н.С. Теоретико-вероятностный анализ и прогнозирование резерва наличности для обеспечения банкоматных операций // Финансы и Кредит. – 2005. – № 25 (193). – С. 68–70.

5. Ратомский Ж. Оптимизация расходов – наиболее эффективная бизнес-стратегия наших дней // ПЛАС. – 2008. – № 10 (140). – С. 20–23.

6. Шубин К.А. Банковские карты и платежные системы самообслуживания на их основе // Вестник Пермского университета. – 2006. – № 5. – С. 103–114.

7. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 420 с.