УДК 517.988

В.Ю. МИТИН
Пермский государственный университет

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНДЕКСА НУЛЕВОЙ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЛОСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрены различные методы вычисления индекса нулевой изолированной особой точки векторного поля. Для плоских векторных полей, образованных многочленами степени не выше 2, предложен полный алгоритм вычисления индекса нулевой изолированной особой точки. Рассмотрены также частные случаи плоских векторных полей, образованных многочленами более высоких степеней, среди которых основное внимание уделено векторным полям с ненулевой вырожденной производной Фреше.

Пусть плоское непрерывное векторное поле Ф с компонентами $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, т.е. непрерывное отображение Ф: $R^2 \to R^2$, определено на замыкании ограниченной области $M \subseteq R^2$ и не вырождено (нигде не обращается в нуль) на ее границе. Тогда вращение $\gamma(\Phi, M)$ на границе Г области M численно равно количеству целых оборотов, совершаемых вектором Φz, в то время пока точка $z = \langle x,y \rangle$ совершает полный обход по кривой Г в положительном направлении. В книге [1] описаны различные подходы к определению понятия «вращение», которые могут быть применены и к векторным полям в любых конечномерных пространствах.

Пусть $a \in R^2$ – изолированная особая точка векторного поля Ф (нули будем тоже относить к числу особых точек и рассматривать только этот класс особых точек). Тогда вращение векторного поля Ф на границе любого круга, внутри которого нет других особых точек, будет равняться одному и тому же числу, которое называется индексом изолированной точки a поля Ф и обозначается ind(a, Ф). Доказательство корректности данного определения приведено, например, в книге [1].

Не теряя общности, можно ограничиться рассмотрением случая $a = \theta$, поскольку этого всегда можно добиться путем простой замены переменных.

При вычислении индекса нулевой изолированной особой точки (у неизолированных особых точек индекса не существует) могут представиться два случая.

1) Определитель производной Фреше (матрицы Якоби) не обращается в нуль в точке θ. Этот случай назовем «регулярным». Индекс нулевой особой точки при этом выражается простой формулой:

$$\mathrm{ind}(\theta, \Phi) = \mathrm{sign}\,\det \Phi'(\theta), \tag{1}$$

где Φ' – производная Фреше векторного поля Φ.

2) Определитель производной Фреше (матрицы Якоби) обращается в нуль в точке θ. Этот случай назовем «критическим». Простые общие формулы для произвольных конечномерных векторных полей в критическом случае неизвестны. Для плоского векторного поля существуют алгоритмы, обладающие достаточной степенью общности, однако использование их обычно приводит к громоздким вычислениям.

К ним относятся, в частности, использование формулы Пуанкаре, приведенной и доказанной в книге [1] ($\Phi(z) = \Phi([z(t)])$, $t\in [a,b]$):

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \int_a^b \frac{P(t)Q'(t) - Q(t)P'(t)}{P^2(t) + Q^2(t)}\mathrm{d}t, \tag{2}$$

а также алгоритмы вычисления искомого индекса путем определения вращения векторного поля на границах некоторых элементарных кривых. Приведем один из подобных алгоритмов.

Алгоритм вычисления вращения на замкнутой кривой:

Пусть Γ – замкнутая кривая, заданная уравнением $z = z(t)$, при условии $t\in [a,b]$ $z(a)=z(b)$; Φ – непрерывное векторное поле без нулевых векторов на Γ.

1. Находим $P(t)=P(z(t))$ и $Q(t)=Q(z(t))$.

2. Находим все корни функции Q на $[a,b)$.

3. Из найденных корней функции Q отбираем только те значения t, для которых $P(t)>0$.

4. По множеству отобранных корней t_k находим числа:

$-n_1$ – количество точек, где Q убывает,

$-n_2$ – количество точек, где Q возрастает,

5. Вычисляем вращение: $\gamma(\Phi, \Gamma) = n_2 - n_1$.

Недостатками этих подходов (алгоритмов вычисления вращения на замкнутых кривых, использования формулы (2) и некоторых других) являются их неприменимость к векторным полям в пространствах с бóльшим числом измерений, а также бóльшая вычислительная трудоемкость при исследовании частных классов векторных полей, для которых требуемый индекс можно вычислить проще, например используя только алгебраические операции над коэффициентами поля.

В связи с этим возникает необходимость исследования новых методов вычисления индекса изолированной особой точки, которые бы были более наглядны и просты в применении, допускали перенос на пространства бóльших размерностей, позволяли взглянуть на одну и ту же проблему с разных сторон, были достаточно эффективны хотя бы в некоторых частных случаях. При изучении таких методов были использованы идеи из книг [1] и [2].

В данном исследовании рассматривались преимущественно плоские векторные поля, компонентами которых являются многочлены. Важность изучения данного класса векторных полей объясняется тем, что любое векторное поле с непрерывными коэффициентами можно аппроксимировать в окрестности нуля полями, принадлежащими описанному классу. Среди векторных полей этого класса особое внимание уделено векторным полям, образованным многочленами степени не выше второй, поскольку для них алгоритм вычисления индекса нулевой изолированной особой точки, в зависимости от коэффициентов поля, который будет приведен ниже, не слишком разветвлен, относительно прост и удобен для анализа.

При исследовании векторных полей использовалось множество различных методов, среди которых наибольшего внимания заслуживают четыре. К ним относятся:

- метод гомотопий,
- алгебраический метод,
- метод малых деформаций,
- геометрический метод.

Наиболее эффективные методы помещены в начало списка. Дадим краткую характеристику каждого метода.

Метод гомотопий. Основная идея метода состоит в переходе от исходного векторного поля Ф к векторному полю В, гомотопному исходному полю на сферах достаточно малого радиуса. Из того, что гомотопные векторные поля имеют одинаковые вращения (см., например, книгу [1]), можно заключить, что индексы нулевых изолированных особых точек Ф и В одинаковы. Для того чтобы использование данного перехода было небессмысленным, индекс нулевой изолированной точки векторного поля В должен находиться непосредственно либо, по крайней мере, проще, чем для векторного поля Ф. Поскольку гомотопность – отношение эквивалетности, в частности, транзитивное отношение, то можно осуществлять несколько гомотопических переходов.

Для установления гомотопности двух векторных полей удобно использовать достаточное условие гомотопности, приведенное в книге [1], которое сводится к проверке того, чтобы на сферах достаточно малого радиуса с центром в нуле образы векторных полей нигде не были направлены противоположно.

Рассмотрим несколько простых примеров (нижние индексы соответствуют порядку однородности слагаемых).

Пример 1. Векторные поля В = $\begin{pmatrix} x \\ y^k \end{pmatrix}$ и Ф = $\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=2}^{m} P_i(x,y)+x \\ y^k + xR_{k-1} + \sum\limits_{j=k+1}^{n} Q_j(x,y) \end{pmatrix}$

гомотопны на сферах достаточно малого радиуса с центром в нуле. Гомотопность сохранится, если к компонентам поля добавить слагаемые более высоких порядков малости.

Пример 2. Векторные поля Ф = $\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=k}^{m} P_i(x,y)+\sum\limits_{r=1}^{k-1} P_r(x) \\ y^k + xR_{k-1} + \sum\limits_{j=k+1}^{n} Q_j(x,y) \end{pmatrix}$ и

В = $\begin{pmatrix} \sum\limits_{r=1}^{k-1} P_r(x) \\ y^k + xR_{k-1} + \sum\limits_{j=k+1}^{n} Q_j(x,y) \end{pmatrix}$ гомотопны на сферах достаточно малого радиуса с центром в нуле.

Алгебраический метод. Основная идея метода состоит в использовании алгебраических преобразований компонент поля, которые сохраняют свойства изолированности особой точки и не изменяют ее индекса либо изменяют его известным образом. Рассмотрим несколько наиболее простых и полезных преобразований.

А) Перестановка переменных плоского векторного поля меняет знак индекса его нулевой изолированной особой точки на противоположный. Аналогичный эффект получается при перестановке компонент плоского векторного поля. Для многомерных векторных полей использование таких преобразований опирается на теорию перестановок и подстановок (см., например, книгу [3]). Именно при каждом таком преобразовании индекс умножается на $(-1)^k$, где k – число инверсий в соответствующей перестановке, т.е. для четной перестановки индекс не меняется, а для нечетной умножается на -1.

Б) Разложение векторного поля в композицию более простых векторных полей. Важным частным случаем является линейное преобразование переменных, которое позволяет для векторных полей, образованных многочленами с ненулевой вырожденной производной Фреше, привести линейную часть к диагональному виду.

В) Умножение одной или нескольких компонент векторного поля на знакопостоянное в окрестности нулевой изолированной особой точки выражение. Если множитель положителен, то индекс не меняется, если отрицателен, индекс меняет только знак.

Г) Добавление к некоторым компонентам векторного поля линейных комбинаций других компонент, в которых коэффициентами являются непрерывные функции. Сохранение свойства изолированности нулевой особой точки и неизменность ее индекса при данном преобразовании обоснованы в книге [2] для плоских векторных полей, там же указаны некоторые пути практического применения этого преобразования. Проверено, что эти свойства сохраняются и при переходе к пространствам с бóльшим числом измерений.

Метод малых деформаций. Основная идея метода состоит в том, чтобы преобразовать посредством малого возмущения векторного поля при помощи одного или нескольких положительных параметров нулевую изолированную особую точку, соответствующую критическому случаю, в несколько регулярных изолированных особых точек, индекс которых может быть найден по формуле (1). Тогда индекс нулевой изолированной особой точки исходного векторного поля равен сумме индексов полученных регулярных изолированных особых точек, что следует из теоремы об алгебраическом числе особых точек, приведенной в книге [1].

Метод малых деформаций применим и для конечномерных векторных полей в пространствах большей размерности.

При использовании метода малых деформаций можно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм метода малых деформаций:

1. Задать малую деформацию векторного поля Ф с помощью малых положительных параметров λ_i.

2. Решить систему уравнений, которая получится, если приравнять компоненты к нулю.

3. Выписать решения полученной системы (для двумерного случая с одним параметром: $x_i = x_i(\lambda)$, $y_i = y_i(\lambda)$, $z_i = \langle x_i, y_i \rangle$).

4. Найти производную Фреше Ф' векторного поля Ф.

5. Определить значения sign det(Φ') во всех точках, считая, что $\lambda \to +0$. Если хотя бы для одной точки получилось sign det(Φ'(z_i)) = 0, предложить новую деформацию (вернуться к пункту 1).

6. Иначе ind(θ, Φ) равен сумме выражений sign det(Φ' (z_i)), где суммирование происходит только по тем точкам, компоненты которых остаются бесконечно малыми при $\lambda \to +0$.

Приведем простейший пример, иллюстрирующий использование метода.

Пример. Пусть дано векторное поле $\Phi = \begin{pmatrix} -x^2 - y \\ y \end{pmatrix}$. Найти индекс его изолированной особой точки θ.

Решение. Заметим, что изолированная особая точка θ соответствует критическому случаю, т.к. det (Φ' (θ)) = $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ Воспользуемся методом малых деформаций. Добавим ко второй компоненте положительный параметр λ. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -x^2 - y + \lambda = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Решения этой системы: $<\sqrt{\lambda}, 0>$, $<-\sqrt{\lambda}, 0>$.

det(Φ') = $\begin{vmatrix} -2x & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2x.$

Для первой точки: $-2\sqrt{\lambda} < 0$

(функция *sign* принимает значение –1).

Для второй точки: $2\sqrt{\lambda} > 0$

(функция sign принимает значение 1).

Имеем: –1+1 = 0, следовательно, индекс изолированной особой точки θ равен 0.

Метод удобно использовать, когда система нелинейных алгебраических уравнений, получаемая на шаге 2 вышеприведенного алгоритма, имеет несложное аналитическое решение.

Геометрический метод. Основная идея метода состоит в рассмотрении соответствия между плоским векторным полем с компонентами $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ (для простоты ограничимся случаем многочленов) и парой плоских кривых, описываемых в декартовой системе координат уравнениями $P(x,y) = 0$ и $Q(x,y) = 0$. Иногда по их виду и взаимному расположению можно найти индекс нулевой изолированной особой точки или, по крайней мере, его модуль.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Если векторному полю соответствует пара кривых, касающихся внутренним или внешним образом, то индекс нулевой изолированной особой точки векторного поля равен нулю, поскольку кривые в этом случае можно раздвинуть при помощи малой деформации.

Пример 2. Если имеет место случай простого пересечения нераспадающихся кривых в точке θ, то модуль индекса нулевой изолированной особой точки равен единице.

Использование геометрического метода особенно удобно для плоских векторных полей, образованных многочленами степени не выше 2, поскольку этот случай опирается на классические математические теории – линейную геометрию и теорию кривых второго порядка.

Геометрический смысл функции комплексного переменного $z \to z^n$ ($n \in N$) и геометрическое истолкование понятия «вращение» позволяют без лишних вычислений сделать непосредственный вывод о том, что индекс нулевой изолированной особой точки векторного поля $\Phi = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z^n) \\ \mathrm{Im}(z^n) \end{pmatrix}$ равен n.

Преимуществами геометрического метода являются: графическая наглядность, отсутствие необходимости в дополнительной проверке изолированности нулевой особой точки.

С помощью комбинирования рассмотренных выше методов можно, в частности, получить полный алгоритм вычисления индекса изолированной особой точки плоских векторных полей, образованных многочленами степени не выше 2, использующий только значения коэффициентов поля и арифметические операции над ними, включая возведение в натуральную степень.

Алгоритм вычисления индекса нулевой изолированной особой точки плоского векторного поля, образованного многочленами степени не выше 2:

Пусть векторное поле имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 \\ A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 + D_2x + E_2y + F_{21} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Для вычисления индекса нулевой изолированной особой точки векторного поля вида (3) можно использовать следующий алгоритм.

1. Убедиться в том, что θ – изолированная особая точка (для неизолированных особых точек понятие индекса не существует).

2. Если обе компоненты линейные, то перейти к пункту 3. Если одна компонента линейная, другая имеет степень 2, то перейти к п. 4. Если обе компоненты имеют степень 2, то перейти к п. 5.

3. $\mathrm{ind}(\theta, \Phi) = \mathrm{sign}\det \Phi'(\theta)$. Вычисление завершено.

4. Вычислить $\det \Phi'(\theta)$, $\mathrm{ind}(\theta, \Phi) = \mathrm{sign}\det \Phi'(\theta)$. Вычисление завершено.

5. Найти $\Phi'(\theta)$. Если $\Phi'(\theta)$ – невырожденная матрица, то $\mathrm{ind}(\theta, \Phi) = \mathrm{sign}\det \Phi'(\theta)$. Вычисление завершено. Если $\Phi'(\theta)$ – нулевая матрица, то перейти к п. 6. Если $\Phi'(\theta)$ – ненулевая вырожденная матрица, то перейти к п. 8.

6. Определить четыре числа:

$D_1 = A_1B_2 - B_1A_2$;

$D_2 = B_1C_2 - C_1B_2$;

$D_3 = A_1C_2 - C_1A$;

$D = D_1D_2 - 4D_3^2$.

7. Если $D < 0$, то $\mathrm{ind}(\theta, \Phi) = 0$. Вычисление завершено.
Если $D > 0$, $D_1 > 0$, то $\mathrm{ind}(\theta, \Phi) = 2$. Вычисление завершено.
Если $D > 0$, $D_1 < 0$, то $\mathrm{ind}(\theta, \Phi) = -2$. Вычисление завершено.

8. Определить тип производной Фреше (буквами обозначены ненулевые элементы).

$\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – перейти к п. 8.1.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_2 & 0 \end{pmatrix}$ – перейти к п. 8.2.

$\begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – перейти к п. 8.3

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ – перейти к п. 8.4.

$\begin{pmatrix} D_1 & E_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – перейти к п. 8.5.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_2 & E_2 \end{pmatrix}$ – перейти к п. 8.6.

$\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ D_2 & 0 \end{pmatrix}$ – перейти к п. 8.7.

$\begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ – перейти к п. 8.8.

$\begin{pmatrix} D_1 & E_1 \\ D_2 & E_2 \end{pmatrix}$ – вычислить $k = \dfrac{D_2}{D_1}$, перейти к п. 8.9.

8.1. Если $C_1 \neq 0$, то ind(θ , Φ) = 0. Вычисление завершено.
Если $C_1 = 0$, то ind(θ, Φ) = –sign($C_1B_2D_1$). Вычисление завершено.

8.2. Если $C_2 \neq 0$, то ind(θ, Φ) = 0. Вычисление завершено.
Если $C_2 = 0$, то ind(θ, Φ) = sign($C_2B_1D_2$). Вычисление завершено.

8.3. Если $A_2 \neq 0$, то ind(θ, Φ) = 0. Вычисление завершено.
Если $A_2 = 0$, то ind(θ, Φ) = sign($A_1B_2E_1$). Вычисление завершено.

8.4. Если $A_1 \neq 0$, то ind(θ, Φ) = 0. Вычисление завершено.
Если $A_1 = 0$, то ind (θ, Φ) = –sign($A_2B_1E_2$). Вычисление завершено.

8.5. Если $A_2 \dfrac{E_1^{\ 2}}{D_1^{\ 2}} - B_2 \dfrac{E_1}{D_1} + C_2 \neq 0$, то ind(θ, Φ) = 0. Вычисление завершено.

Если $A_2 \dfrac{E_1^{\ 2}}{D_1^{\ 2}} - B_2 \dfrac{E_1}{D_1} + C_2 = 0$, то ind(θ, Φ) =

$= \operatorname{sign}\left(\left(A_2 \dfrac{E_2^{\ 2}}{D_2^{\ 2}} - B_2 \dfrac{E_2}{D_2} + C_2 \right) \left(\dfrac{B_1}{D_2} - 2A_1 \dfrac{E_2}{D_2^{\ 2}} \right)\right).$

Вычисление завершено.

8.6. Если $A_1 \dfrac{E_2^{\ 2}}{D_2^{\ 2}} - B_1 \dfrac{E_2}{D_2} + C_1 \neq 0$, то ind(θ, Φ)=0. Вычисление завершено.

Если $A_1 \dfrac{E_2^{\ 2}}{D_2^{\ 2}} - B_1 \dfrac{E_2}{D_2} + C_1 = 0$, то ind(θ, Φ) =

$= \operatorname{sign}\left(\left(A_2 \dfrac{E_2^{\ 2}}{D_2^{\ 2}} - B_2 \dfrac{E_2}{D_2} + C_2 \right)\left(\dfrac{B_1}{D_2} - 2A_1 \dfrac{E_2}{D_2^{\ 2}} \right)\right)$. Вычисление завершено.

8.7. Если $(C_2 - \dfrac{D_2}{D_1} C_1) \neq 0$, то ind(θ, Φ) = 0. Вычисление завершено.

Если $(C_2 - \dfrac{D_2}{D_1} C_1) = 0$, то ind(θ, Φ) = –sign($C_1D_1$ $(B_2 - \dfrac{D_2}{D_1} B_1)$). Вычисление завершено.

8.8. Если $(A_2 - \frac{E_2}{E_1} A_1) \neq 0,$ то ind(θ, Ф) = 0. Вычисление завершено.

Если $(A_2 - \frac{E_2}{E_1} A_1) =$ 0, то ind(θ, Ф) = sign($A_1 E_1 (B_2 - \frac{E_2}{E_1} B_1)$). Вычисление завершено.

8.9. Если $(A_2 - kA_1)\frac{E_1^2}{D_1^2} - (B_2 - kB_1)\ \frac{E_1}{D_1} + (C_2 - kC_1) \neq$ 0, то ind(θ,Ф) = 0. Вычисление завершено.

Если $(A_2 - kA_1)\frac{E_1^2}{D_1^2} - (B_2 - kB_1)\ \frac{E_1}{D_1} + (C_2 - kC_1) =$ 0, то ind(θ, Ф) =

$= \ -\mathrm{sign}((\, A_1 \frac{E_1^2}{D_1^2} - B_1 \frac{E_1}{D_1} + C_1\,)(\frac{B_2 - kB_1}{D_1} - 2(A_2 - kA_1)\ \frac{E_1}{D_1^2}))$. Вычисление завершено.

Замечание. Если одна из компонент векторного поля равна нулю (т.е. многочлену, не имеющему степени), то индекс особой точки θ, в случае ее изолированности, равен нулю. Если одна из компонент – многочлен нулевой степени, то нулевая точка не может быть особой.

Векторные поля, образованные многочленами высших степеней:

Методы, описанные выше, часто оказываются полезными при вычислении индекса нулевой изолированной особой точки векторных полей, образованных многочленами более высоких степеней, чем вторая. Например, они достаточно эффективны для исследования векторных полей вида:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 x^3 + B_1 x^2 y + C_1 xy^2 + D_1 y^3 + E_1 x^2 + F_1 xy + G_1 y^2 + x \\ A_2 x^3 + B_2 x^2 y + C_2 xy^2 + D_2 y^3 + E_2 x^2 + F_2 xy + G_2 y^2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Используя линейную замену переменных, к виду (4) нетрудно привести любое векторное поле, образованное многочленами третьей степени без квадратичной части с ненулевой вырожденной производной Фреше.

Представим компоненты векторного поля Ф в виде суммы однородных слагаемых:

$P(x,y) = a_3(x,y) + a_2(x,y) + x$; $Q(x,y) = b_3(x,y) + b_2(x,y)$.

(нижний индекс соответствует степени однородного слагаемого). Для них удобно сочетать элементарные преобразования поля с использованием теоремы из книги [2], основанной на гомотопическом переходе:

Теорема. Пусть $b_1(x,y) = \ldots = b_{k\text{-}1}(x,y) = 0$, $b_k(0,1) \neq 0$. Тогда особая точка θ изолированна и справедлива формула:

$$\operatorname{ind}(\theta, \Phi) = \frac{1-(-1)^k}{2} \operatorname{sign} b_k\,(0, 1). \qquad (5)$$

Если для векторного поля вида (4) непосредственное применение формулы (5) невозможно, то его можно попытаться привести к виду, описанному в условии теоремы, с помощью нескольких преобразований вида Г) из алгебраического метода. Полученное при этом значение k является порядком малости однородных слагаемых, определяющих индекс нулевой изолированной особой точки векторного поля. Максимальный порядок малости однородных слагаемых, определяющих индекс, равен 9 (проверено, что для аналогичных векторных полей с многочленами степени n он равен n^2).

Для векторных полей вида (4) при построении алгоритма вычисления индекса нулевой изолированной особой точки, в зависимости от коэффициентов поля, наибольшую сложность представляют «затруднительные случаи»:

1. $G_2 = 0$, $D_2 \neq 0$, $G_1F_2 = D_2$;
2. $G_2 = 0$, $D_2 = 0$, $G_1F_2 = 0$, $R_1(x,y) \neq 0$, $P_2(x,y) \neq 0$;
3. $G_2 = 0$, $D_2 = 0$, $F_2 = 0$, $R_1(x,y) \neq 0$, $P_2(x,y) = 0$;
4. $G_2 = 0$, $D_2 = 0$, $G_1C_2 = 0$, $R_1(x,y) = 0$, $P_2(x,y) \neq 0$;
5. $\mathrm{G}_2 = 0$, $D_2 = 0$, $G_1C_2 = 0$, $R_1(x,y) = 0$, $P_2(x,y) = 0$, $R_2(x,y) \neq 0$, $P_3(x,y) \neq 0$,

где $R(x,y) = \dfrac{Q(x,y) - D_2 y^3}{x} = R_1(x,y) + R_2(x,y)$ – разложение в сумму однородных многочленов.

В этих пяти случаях индекс изолированной особой точки определяется слагаемыми высокого порядка малости, а алгоритм претерпевает множество ветвлений, за исключением третьего и пятого случаев, а также четвертого (при дополнительных предположениях) случая, когда зависимость индекса нулевой изолированной особой точки от коэффициентов поля устанавливается просто.

Для векторных полей, образованных многочленами n-й степени, с ненулевой вырожденной производной Фреше, можно вычислять индекс изолированной особой точки аналогичным образом, но число затруднительных случаев, возникающих при этом, растет пропорционально n^2.

Отсюда следует необходимость поиска новых путей, позволяющих достаточно просто вычислить индекс нулевой изолированной особой точки для различных частных случаев плоских векторных полей. Этой проблеме будут посвящены дальнейшие исследования. Кроме того, планируется осуществить переход к конечномерным векторным полям в пространствах с бóльшим числом измерений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука. – 1975.
2. Красносельский М.А. Векторные поля на плоскости / Красносельский [и др.]. – М.: Физматгиз, 1963.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.