Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термопластичности // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 2. – С. 21–35. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.02

Bondar V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. Version of the theory of thermoplasticity. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2015. No. 2. Pp. 21-35. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.02

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/

DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.02

УДК 539.374

ВАРИАНТ ТЕОРИИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ

В.С. Бондарь, В.В. Даншин, А.А. Кондратенко

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 25 марта 2015 г.
Принята: 26 апреля 2015 г.
Опубликована: 30 июня 2015 г.

Ключевые слова:

пластичность, комбинированное упрочнение, микронапряжения, ратчетинг, дополнительное упрочнение, накопление повреждений, неизотермическое нагружение, базовый эксперимент, идентификация, верификация

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются основные положения и уравнения теории термопластичности, относящейся к классу теорий пластического течения при комбинированном упрочнении. Тензор скоростей деформаций представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой и пластической деформаций. Упругая деформация следует обобщенному закону Гука, распространенному на неизотермическое нагружение. Вводится поверхность нагружения, которая изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Для радиуса поверхности нагружения формулируется эволюционное уравнение, учитывающее дополнительное изотропное упрочнение при непропорциональном нагружении, а также обобщенное на неизотермическое нагружение. В качестве параметра, характеризующего меру сложности процесса нагружения, принимается параметр Кадашевича-Мосолова, соответствующий углу между векторами скоростей деформаций и напряжений. Смещение поверхности нагружения описывается на основе модели Новожилова-Шабоши, подразумевающей, что полное смещение есть сумма смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение. Проведенный ранее анализ петли пластического гистерезиса позволил выделить три типа микронапряжений (смещений) и сформулировать три типа эволюционных уравнений. Здесь эти эволюционные уравнения обобщены на неизотермическое нагружение. Для определения тензора скоростей пластической деформации используется ассоциированный (градиентальный) закон течения. Для жестких и мягких режимов нагружения получены выражения для определения скорости накопленной пластической деформации. Сформулированы условия упругого и упругопластического состояний.

Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводятся кинетические уравнения накопления повреждений, где в качестве энергий, расходуемых на создание повреждений в материале, принимаются энергии, равные работам микронапряжений первого и второго типов на поле пластических деформаций. Здесь эти уравнения обобщены на неизотермическое нагружение.

Выделяются материальные функции, замыкающие вариант теории, формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций. Приводится описание верификации варианта теории термопластичности на широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований.

Новыми результатами работы являются адекватные описания в рамках одной теории следующих явлений:

– посадка петли пластического гистерезиса при несимметричных жестких циклических нагружениях;

– вышагивание (ratcheting) петли пластического гистерезиса при несимметричных мягких циклических нагружениях;

– закономерности сложного нагружения как по плоским, так и пространственным траекториям;

– эффекты дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональных (сложных) циклических нагружениях;

– эффекты нелинейного суммирования повреждений для произвольных процессов нагружения;

– закономерности неизотермического нагружения.

© **Бондарь Валентин Степанович** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: bondar@mami.ru
Даншин Владимир Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: tm@mami.ru
Кондратенко Арина Алексеевна – аспирантка, e-mail: tm@mami.ru

Valentin S. Bondar – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: bondar@mami.ru
Vladimir V. Danshin – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, e-mail: tm@mami.ru
Arina A. Kondratenko – Postgraduate Student, e-mail: tm@mami.ru

VERSION OF THE THEORY OF THERMOPLASTICITY

V.S. Bondar, V.V. Danshin, A.A. Kondratenko

Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 25 March 2015
Accepted: 26 April 2015
Published: 30 June 2015

Keywords:
plasticity, combined hardening, microstresses, ratcheting, additional hardening, damage accumulation, non-isothermal loading, basic experiment, identification, verification

ABSTRACT

The paper explains the basic concepts and equations of the theory of thermoplasticity belonging to the class of theories of plastic flow in the combined hardening. The tensor strain rate is represented as a sum of tensors of the velocities of elastic and plastic deformations. The elastic deformation follows the generalized Hooke's law distributed to non-isothermal loading. The surface loading is introduced which isotropically widens or narrows and shifts in the process of loading. For the radius of the surface loading the authors formulated evolutionary equation taking into account the additional isotropic hardening under non-proportional loading, also generalized to non-isothermal loading. We have taken the parameter of Kadashevich-Mosolova corresponding to the angle between the velocity vectors of strain and stress as the parameter characterizing the degree of complexity of the process of loading. Surface displacement loading is described based on the model of Novozhilov-Chaboche implying that the total displacement is the sum of the displacements and each displacement has its own evolutionary equation. An earlier analysis of a loop of plastic hysteresis allowed distinguishing three types of micro-strains (displacements) and formulating three types of evolution equations. Here these evolutionary equations are generalized to the non-isothermal loading. To determine the axial velocity of plastic deformation we used associate (gradient) flow law. It became possible to determine expressions for speed of the accumulated plastic strain for hard and soft modes of loading. The authors have formulated conditions of elastic and elastic-plastic conditions.

The kinetic equation of damage accumulation is introduced for the description of nonlinear processes of damage accumulation. Here, energies equal to the work of microstresses of the first and second types to the field of plastic deformations are accepted as the energy spent on creating damage in the material. These equations are generalized to the non-isothermal loading.

We have highlighted material options completing theory option, formulated the basic experiment and the method of identifying material functions. The paper describes the verification of thermoplasticity theory on a wide range of structural steels and alloys and programs of experimental studies.

New results have adequate descriptions within one theory of the following phenomena:

– landing loop of plastic hysteresis in nonsymmetrical rigid cyclic loading;
– ratcheting of loop plastic hysteresis in nonsymmetrical soft cyclic loading;
– the regularities of complex loading as on planar or spatial trajectories;
– the effects of additional isotropic hardening under disproportionate (complex) cyclic loading;
– the effects of non-linear summation of damage to arbitrary loading processes;
– the patterns of non-isothermal loading.

Введение

Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при произвольных процессах сложного неизотермического нагружения в условиях повторности термосиловых воздействий в основном строится на вариантах теорий пластического течения при комбинированном упрочнении, обзор и анализ которых содержится в работах [1–18]. Основной проблемой построения этих вариантов является формулировка достаточно адекватных эволюционных уравнений для радиуса поверхности нагружения (изотропное упрочнение), для смещения центра поверхности нагружения (анизотропное упрочнение), а также формулировка кинетических уравнений накопления повреждений для произвольных процессов нагружения. Актуальной является и проблема обобщения теории на неизотермическое нагружение.

Для описания изменения радиуса поверхности нагружения с учетом дополнительного изотропного упрочнения и неизотермического нагружения принимается эволюционное уравнение, предложенное в работах [4–6], где в качестве меры сложности процесса непропорционального нагружения принимается параметр Кадашевича–Мосолова [19], равный квадрату синуса угла между векторами скоростей напряжений и деформаций. Обоснование выбора этого параметра с учетом экспериментальных эффектов дополнительного изотропного упрочнения и разупрочнения приведено в работе [5].

Для описания смещения поверхности нагружения используется модель Новожилова–Шабоши [20, 21], подразумевающая, что полное смещение есть сумма смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение. В качестве таких уравнений в настоящей работе принимаются уравнения Ишлинского–Прагера [22, 23], Амстронга–Фредерика–Кадашевича [24, 25], а также аналог уравнений Оно–Ванга [6, 26]. Для описания явлений посадки петли пластического гистерезиса и вышагивания (ratcheting) при несимметричных жестких и мягких циклических нагружениях на основе принципа симметрии циклических свойств [27] параметр, входящий в эволюционное уравнение для смещения (микронапряжения) первого типа, принимается зависящим [6, 27] не только от температуры, но и от накопленной пластической деформации.

Для описания нелинейного процесса накопления повреждений формулируются [28] кинетические уравнения накопления повреждений, где в качестве энергий, расходуемых на создание повреждений в материале, принимаются работы микронапряжений первого и второго типов на поле пластических деформаций. Ответственность микронапряжений за процесс накопления повреждений следует из гипотезы Новожилова–Рыбакиной [29] о пропорциональности скорости накопления повреждений интенсивности микронапряжений. Обоснование применимости кинетических уравнений накопления повреждений на основе критериев работы микронапряжений первого и второго типов содержится в работах [3, 5, 9, 28, 30, 31].

Для определения материальных функций, замыкающих вариант теории термопластичности, формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций. Приводится описание верификации [3, 5, 9, 27, 28, 30, 31] варианта теории термопластичности на широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований.

1. Основные положения и уравнения теории

Материал однороден и начально изотропен. Рассматриваются только поликристаллические конструкционные стали и сплавы. В процессе упругопластического деформирования в материале может возникать только пластическая деформационная анизотропия. Рассматриваются малые деформации при температурах, когда нет фазовых превращений, и скоростях деформаций, когда динамическими эффектами можно пренебречь. Случаи больших градиентов температуры не рассматриваются.

Тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой $\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}$ и пластической $\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$ деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij}. \quad (1)$$

Упругие деформации следуют обобщенному закону Гука

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = \frac{1}{E}\left[\dot{\sigma}_{ij} - \nu\left(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}\right)\right] + \alpha_{ij}^{\varepsilon T}\,\dot{T},$$
$$\alpha_{ij}^{\varepsilon \mathrm{T}} = \alpha_{\mathrm{T}}\delta_{ij} - \frac{1}{E^2}\left[\sigma_{ij} - \nu\left(3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}\right)\right]\frac{dE}{dT} - \frac{1}{E}\left(3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}\right)\frac{d\nu}{dT}, \tag{2}$$

где $E, \nu, \alpha_{\mathrm{T}}$ – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент температурного расширения, являющиеся функциями температуры *T*; σ_{ij} – тензор напряжений; $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ – среднее напряжение; δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Полагается, что в пространстве составляющих тензора напряжений существует поверхность нагружения, разделяющая области упругого и упругопластического состояний. Поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f\left(\sigma_{ij}\right) = \frac{3}{2}\left(s_{ij} - a_{ij}\right)\left(s_{ij} - a_{ij}\right) - C^2 = 0. \tag{3}$$

Здесь $s_{ij}^{*} = s_{ij} - a_{ij}$ – девиатор активных напряжений [2]; s_{ij} – девиатор напряжений; a_{ij} – девиатор смещения (микронапряжений, добавочных напряжений, остаточных микронапряжений [1]); C – размер (радиус) поверхности нагружения. Тензор a_{ij} характеризует анизотропное (направленное) упрочнение, а скаляр C – изотропное упрочнение. Тензор a_{ij} и скаляр C являются функционалами процесса нагружения.

Для радиуса поверхности нагружения принимается следующее эволюционное уравнение:

$$\dot{C} = q_{\varepsilon}\,\dot{\varepsilon}_{u*}^{p} + q_T\dot{T}. \tag{4}$$

Здесь ε_{u*}^{p} – накопленная пластическая деформация (длина дуги траектории пластической деформации, параметр Одквиста); $\dot{\varepsilon}_{u*}^{p}$ – интенсивность скоростей пластической деформации (скорость накопленной пластической деформации); q_{ε}, q_T – определяющие функции, которые выражаются через материальные.

В случае отсутствия дополнительного изотропного упрочнения [3–6] радиус поверхности нагружения является функцией накопленной пластической деформации и температуры,

$$C = C_p\left(\varepsilon_{u*}^{p},\, T\right), \tag{5}$$

и, следовательно,

$$q_{\varepsilon} = \frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon_{u*}^{p}}, \quad q_T = \frac{\partial C_p}{\partial T}. \tag{6}$$

Для описания дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональном нагружении определяющая функция q_{ε} в уравнении (4) принимает [4–6] следующий вид:

$$q_\varepsilon = \frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon_{u*}^p} + q_{\varepsilon A}\,, \tag{7}$$

где $C_p\left(\varepsilon_{u*}^p, T\right)$ – радиус поверхности нагружения при пропорциональном (простом) нагружении; $q_{\varepsilon A}$ – описывает дополнительное изотропное упрочнение при непропорциональном (сложном) нагружении. Для $q_{\varepsilon A}$ принимается [4–6, 32] следующее выражение:

$$q_{\varepsilon A} = \vartheta_A\left(C_A - C\right),\ \vartheta_A = \left(1-A\right)\vartheta_0 + A\,\vartheta_1\,,\ \ C_A = \left(1-A\right)C_0 + A\,C_1\ . \tag{8}$$

Здесь $\vartheta_A\left(A, T\right)$ характеризует интенсивность (скорость) дополнительного упрочнения или разупрочнения, а $C_A\left(A, \varepsilon_{u*}^P, T\right)$ − величину дополнительного упрочнения или разупрочнения; A − параметр (мера) непропорциональности нагружения. Параметр C_0 при упрочнении и разупрочнении принимает различные значения, т.е.

$$C_0 = \begin{cases} C_p, \text{ если } q_{\varepsilon A} > 0 \\ C_{p*}, \text{ если } q_{\varepsilon A} < 0 \end{cases} \quad \left(q_{\varepsilon A} = 0 \to q_\varepsilon = \frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon_{u*}^p}\right). \tag{9}$$

Значение параметра C_0 при разупрочнении, т.е. C_{p*}, зависит [4–6, 32] от максимальной величины радиуса $C_{\max}$, достигнутой при упрочнении. Поэтому для C_{p*} принимается следующее выражение:

$$C_{p*} = C_p + d_0\left(C_{\max} - C_p\right). \tag{10}$$

Для параметра C_1, характеризующего дополнительное упрочнение, можно также принять зависимость в долях от C_p, т.е.

$$C_1 = d_1\, C_p. \tag{11}$$

Здесь d_0 , d_1 − модули дополнительного упрочнения и разупрочнения.

В качестве параметра непропорциональности принимается параметр Кадашевича–Мосолова [19], соответствующий квадрату синуса угла между векторами скоростей деформаций и напряжений, обоснование выбора которого проведено в работе [5],

$$A = 1 - \left(\frac{\dot{e}_{ij}\dot{s}_{ij}}{\dot{\varepsilon}_{u*}\dot{\sigma}_{u*}}\right)^2,\ \dot{\varepsilon}_{u*} = \left(\frac{2}{3}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \dot{\sigma}_{u*} = \left(\frac{3}{2}\dot{s}_{ij}\dot{s}_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Здесь e_{ij} , s_{ij} − девиаторы деформаций и напряжений.

Для максимального радиуса $C_{\max}$ вводится [4, 6] следующее эволюционное уравнение:

$$\dot{C}_{\max} = q_{\varepsilon\max}\,\dot{\varepsilon}_{u*}^p + q_{T\max}\dot{T}, \tag{13}$$

$$q_{\varepsilon\max} = \begin{cases} q_\varepsilon, \text{ если } C \geq C_{\max}, \\ 0, \text{ если } C < C_{\max} \bigcup q_{\varepsilon A} < 0. \end{cases}$$

При получении связи между определяющими функциями q_T, $q_{T\max}$ и материальными функциями при изменении температуры принимаются [1, 4, 6, 7, 8] неизменными относительные положения величин радиуса и максимального радиуса между их предельными значениями, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\left(\frac{C}{C_p}\right)=0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\left(\frac{C_{\max}}{C_p}\right)=0. \tag{14}$$

Тогда для q_T и $q_{T\max}$ имеют место следующие выражения:

$$q_T=\frac{C}{C_p}\frac{\partial C_p}{\partial T},\qquad q_{T\max}=\frac{C_{\max}}{C_p}\frac{\partial C_p}{\partial T}. \tag{15}$$

Итак, для описания изотропного упрочнения необходимо экспериментально определить:

$C_p\left(\varepsilon^p_{u*},T\right)$ – функция изотропного упрочнения при пропорциональном (простом) нагружении;

$\vartheta_0(T),\ \vartheta_1(T),\ d_0(T),\ d_1(T)$ – модули дополнительного изотропного упрочнения и разупрочнения при непропорциональном (сложном) нагружении.

Смещение поверхности нагружения описывается на основе модели Новожилова-Шабоши [20, 21], подразумевающей, что полное смещение есть сумма смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение,

$$a_{ij}=\sum_{m=1}^{M}a_{ij}^{(m)}. \tag{16}$$

Проведенный [28] анализ петли пластического гистерезиса позволил выделить три типа микронапряжений (смещений) и сформулировать три типа эволюционных уравнений. В качестве первого эволюционного уравнения для микронапряжений первого типа принимается уравнение Ишлинского-Прагера [22, 23], обобщенное на неизотермическое нагружение,

$$\dot a_{ij}^{(1)}=\frac{2}{3}g^{(1)}\dot\varepsilon^p_{ij}+g_a^{T(1)}a_{ij}^{(1)}\dot T. \tag{17}$$

Здесь определяющие функции $g^{(1)}$ и $g_a^{T(1)}$ выражаются через экспериментально определяемые материальные функции. Для определяющей функции $g^{(1)}$ с учетом явления вышагивания (ratcheting) петли пластического гистерезиса при мягком несимметричном циклическом нагружении и явления посадки петли пластического гистерезиса при жестком несимметричном циклическом нагружении и на основании принципа симметрии циклических свойств [27] принимается следующее выражение:

$$g^{(1)}=E_a\left(\varepsilon^p_{u*},\,T\right)=E_{a0}\,/\left[1+K_E\left(\varepsilon^p_{u*}\right)^{n_E+1}\right]. \tag{18}$$

Здесь $E_{a0}(T)$ – модуль анизотропного упрочнения; $K_E(T)$, $n_E(T)$ – модули вышагивания.

При изменении температуры принимаются неизменными относительные положения величин микронапряжений первого типа между их предельными значениями, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\left(\frac{a_{ij}^{(1)}}{E_{a0}\varepsilon_{ij}^{p}}\right)=0. \tag{19}$$

Тогда для $g_a^{T(1)}$ имеет место следующее выражение:

$$g_a^{T(1)}=\frac{1}{E_{a0}}\frac{dE_{a0}}{\mathrm{d}T}. \tag{20}$$

В качестве второго эволюционного уравнения для микронапряжений второго типа принимается уравнение Амстронга-Фредерика-Кадашевича [24, 25], обобщенное на неизотермическое нагружение,

$$\dot{a}_{ij}^{(2)}=\frac{2}{3}g^{(2)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}+g_a^{(2)}a_{ij}^{(2)}\dot{\varepsilon}_{u*}^{p}+g_a^{\mathrm{T}(2)}a_{ij}^{(2)}\dot{T}. \tag{21}$$

Определяющие функции $g^{(2)}$и $g_a^{(2)}$ выражаются через материальные следующим образом [3–6]:

$$g^{(2)}=\beta\sigma_a,\quad g_a^{(2)}=-\beta. \tag{22}$$

Здесь β,σ_a – модули анизотропного упрочнения, определяемые экспериментально.

При изменении температуры принимается неизменными относительные положения величин микронапряжений второго типа между их предельными значениями, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{a_{ij}^{(2)}}{\sigma_a}\right)=0. \tag{23}$$

Тогда для $g_a^{T(2)}$ имеет место следующее выражение:

$$g_a^{T(2)}=\frac{1}{\sigma_a}\frac{d\sigma_a}{dT}. \tag{24}$$

Последующие эволюционные уравнения для микронапряжений третьего типа соответствуют простейшему аналогу [6, 28, 30] уравнений Оно-Ванга [26], обобщенному на неизотермическое нагружение,

$$\dot{a}_{ij}^{(m)}=\frac{2}{3}g^{(m)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}+g_a^{T(m)}a_{ij}^{(m)}\dot{T}. \tag{25}$$

Определяющие функции $g^{(m)}$ выражаются через материальные следующим образом [6, 28, 30]:

$$g^{(m)}=\begin{cases}\beta^{(m)}\sigma^{(m)},\\ 0,\ \text{если}\ a_u^{(m)}\ge\sigma_a^{(m)}\cap a_{ij}^{(m)}s_{ij}^{*}>0,\end{cases} \tag{26}$$

$$a_u^{(m)}=\left(\frac{3}{2}a_{ij}^{(m)}a_{ij}^{(m)}\right)^{\frac{1}{2}},\quad m=3,\dots,M.$$

При изменении температуры принимаются неизменными относительные положения величин микронапряжений третьего типа между их предельными значениями, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{a_{ij}^{(m)}}{\sigma_a^{(m)}}\right) = 0. \tag{27}$$

Тогда для $g_a^{T(m)}$ имеет место следующее выражение:

$$g_a^{T(m)} = \frac{1}{\sigma_a^{(m)}}\frac{d\sigma_a^{(m)}}{dT}. \tag{28}$$

Окончательно уравнение для смещения поверхности нагружения с учетом (16), (17), (21), (25) будет иметь вид

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3}g\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + g_a^{(2)}a_{ij}^{(2)}\dot{\varepsilon}_{u*}^{p} + a_{ij}^{T}\dot{T}, \tag{29}$$

$$g = \sum_{m=1}^{M} g^{(m)}, \quad g_a^{(2)} = -\beta, \quad a_{ij}^{T} = \sum_{m=1}^{M} g_a^{T(m)}a_{ij}^{(m)}. \tag{30}$$

Пластические деформации определяются на основе ассоциированного с поверхностью (3) закона течения следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\lambda = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}^{*}}{\sigma_u^{*}}\dot{\varepsilon}_{u*}^{p}. \tag{31}$$

Дифференцируя уравнение (3) по времени, подставляя в полученное выражение (29), (31) и далее разрешая относительно скорости накопленной пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{u*}^{p}$, можно получить следующее уравнение для скорости накопленной пластической деформации при мягком нагружении, т.е. при заданных напряжениях:

$$\dot{\varepsilon}_{u*}^{p} = \frac{1}{E_*}\left[\frac{3}{2}\frac{s_{ij}^{*}\dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^{*}} - B^{T}\dot{T}\right], \tag{32}$$

$$E_* = q_{\varepsilon} + g + g_a^{(2)}a_u^{(2)*},$$

$$B^{T} = q_T + \sum_{m=1}^{M} g_a^{T(m)}a_u^{(m)*},$$

$$a_u^{(2)*} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}^{*}a_{ij}^{(2)}}{\sigma_u^{*}}, \quad a_u^{(m)*} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}^{*}a_{ij}^{(m)}}{\sigma_u^{*}}.$$

Для получения уравнения при жестком нагружении (при заданных деформациях) на основании (1), (2) следует выражение

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left[\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} - \alpha_{ij}^{\varepsilon T}\dot{T} + \frac{\nu}{E}3\dot{\sigma}_0\delta_{ij}\right]. \tag{33}$$

Далее подставляя (33) в (32) и разрешая относительно $\dot{\varepsilon}_{u*}^{p}$, можно получить следующее уравнение для скорости накопленной пластической деформации при жестком нагружении:

$$\dot{\varepsilon}_{u*}^{p} = \frac{1}{E_{*} + 3G}\left[3G\frac{s_{ij}^{*}\dot{\varepsilon}_{ij}}{\sigma_{u}^{*}} - B_{*}^{T}\dot{T}\right],$$

$$B_{*}^{T} = q_{T} + \sum g_{a}^{T(m)} a_{u}^{(m)*} + 3G\alpha_{u}^{\varepsilon T*}, \tag{34}$$

$$\alpha_{u}^{\varepsilon T*} = \frac{s_{ij}^{*}\alpha_{ij}^{\varepsilon T}}{\sigma_{u}^{*}}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Для смешанных режимов нагружения уравнения для $\dot{\varepsilon}_{u*}^{p}$ приводятся в работах [3–6, 9].

Условия упругого и упругопластического состояний имеют вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{u}^{*} < C \bigcup \dot{\varepsilon}_{u*}^{p} \le 0 - \text{упругость}, \\ &\sigma_{u}^{*} = C \bigcap \dot{\varepsilon}_{u*}^{p} > 0 - \text{упругопластичность}. \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь скорость накопленной пластической деформации задается выражениями (32) или (34) или любым другим выражением, связывающим скорость накопленной пластической деформации и скорости напряжений и деформаций (смешанные режимы нагружения).

Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводятся кинетические уравнения накопления повреждений, базирующиеся на энергетическом принципе, где в качестве энергий, расходуемых на создание повреждений в материале, принимаются энергии, равные работам микронапряжений первого и второго типов на поле пластических деформаций. Эти уравнения аналогичны [28], но здесь они обобщены на неизотермическое нагружение. Тогда кинетические уравнения накопления повреждений будут иметь следующий вид:

$$\dot{\omega}_{1} = \frac{a_{ij}^{(1)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}}{W_{b}}, \tag{36}$$

$$\dot{\omega}_{2} = \alpha\omega_{2}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\frac{a_{ij}^{(2)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}}{W_{a}}, \tag{37}$$

$$\alpha = \left(\sigma_{a} / a_{u}^{(2)}\right)^{n_{\alpha}}, \quad W_{a} = (1-A)W_{a0} + AW_{a1}.$$

Здесь $\omega = \omega_{1} + \omega_{2}$ − мера повреждения; $W_{b}(T)$, $W_{a0}(T)$, $W_{a1}(T)$ − энергии разрушения соответственно при вышагивании петли гистерезиса, при пропорциональном $(A=0)$ и непропорциональном $(A=1)$ нагружении; α и $n_{\alpha}(T)$ − функция и параметр нелинейности процесса накопления повреждений; $a_{u}^{(2)}$ − интенсивность микронапряжений второго типа. Критерием разрушения будет достижение повреждением предельного значения, обычно принимаемого равным единице.

Таким образом, данный вариант теории термопластичности замыкают следующие материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

$E(T;)$; $\nu(T)$; $\alpha_T(T)$ – упругие параметры;

$E_{a0}(T;)$; $\sigma_a(T)$; $\beta(T)$ – модули анизотропного упрочнения;

$K_E(T;)$; $n_E(T)$ – модули вышагивания;

$\sigma_a^{(m)}(T;)$; $\beta^{(m)}(T)$ $(m=3,...,M)$ – модули анизотропного упрочнения, соответствующие аналогу модели Оно–Ванга;

$C_p\left(T, \varepsilon_{u*}^p\right)$ – функция изотропного упрочнения;

$\vartheta_0(T;)$; $\vartheta_1(T)$; $d_0(T)$; $\mathrm{d}_1(T)$ – модули дополнительного изотропного упрочнения;

$W_{a0}(T)$ – энергия разрушения при пропорциональном нагружении $(A=0)$;

$W_{a1}(T)$ – энергия разрушения при непропорциональном нагружении $(A=1)$;

$n_\alpha(T)$ – параметр нелинейности процесса накопления повреждений;

$W_b(T)$ – энергия разрушения при вышагивании.

2. Базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций

Материальные функции определяются по результатам испытаний в условиях упругопластического одноосного пропорционального и двухосного непропорционального напряженных состояний при различных уровнях температуры. Базовый эксперимент включает в себя следующий набор данных:

– упругие параметры, которые определяются традиционными методами;

– диаграмма пластического деформирования при растяжении до деформации $0,05-0,1$;

– циклические диаграммы при симметричном растяжении-сжатии при постоянной амплитуде деформации $0,005-0,01$;

– циклические диаграммы при несимметричном растяжении-сжатии при постоянной амплитуде деформации $0,005-0,01$ и средней деформации цикла $0,05-0,1$;

– данные по малоцикловой усталости при одноблочном и двухблочном жестком симметричном циклическом нагружении;

– данные по малоцикловой усталости при одноблочном мягком несимметричном циклическом нагружении;

– диаграмма максимальных значений интенсивности напряжений на цикле от накопленной пластической деформации при непропорциональном циклическом нагружении по траектории деформаций в виде окружности радиуса $0.005 \div 0.01$ до стабилизации дополнительного упрочнения и последующем пропорциональном циклическом нагружении до стабилизации разупрочнения;

– данные по усталостному разрушению при непропорциональном циклическом нагружении по траекториям деформаций в виде окружностей с разными радиусами.

Метод идентификации материальных функций подробно изложен в работах [3–6, 27, 28, 30] и применяется здесь для каждого из рассматриваемых уровней температуры.

3. Верификация варианта теории термопластичности

Далее рассматривается верификация на основе сопоставления расчетных и экспериментальных результатов для различных процессов пропорционального (простого) и непропорционального (сложного), изотермического и неизотермического режимов нагружения.

В работах [3, 5, 9, 27, 28, 30, 31] приводится верификация варианта теории при пропорциональных стационарных и нестационарных, симметричных и несимметричных, жестких и мягких режимах циклического изотермического нагружения. Иллюстрируется адекватное описание эффекта посадки петли пластического гистерезиса при жестком несимметричном циклическом нагружении, а также явление вышагивания (ratcheting) при мягком несимметричном циклическом нагружении. В этих же работах анализируются процессы нелинейного накопления повреждений при одноблочных и многоблочных режимах жестких и мягких циклических нагружений. Рассматриваются процессы от малоцикловой до многоцикловой усталости ($10^1 - 10^6$ циклов).

Неизотермические процессы при пропорциональном (простом) циклическом нагружении рассматриваются в работах [3, 9]. Показывается адекватное описание теорией экспериментальных циклических диаграмм и разрушения в условиях малоцикловой усталости.

Процессы непропорционального (сложного) нагружения достаточно полно анализируются в монографии [5], где рассматриваются плоские и пространственные траектории деформаций в широком диапазоне кривизн и круток от малых до больших. В этой же монографии показывается адекватное описание теорией эффекта дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональных (сложных) циклических нагружениях. Там же рассматривается разрушение при циклических пропорциональных и непропорциональных режимах нагружения от малоцикловой до многоцикловой усталости. Снижение долговечности в условиях непропорционального циклического нагружения по сравнению с пропорциональным при одинаковых размахах деформаций достигает почти порядка, это показывает и эксперимент, и расчет.

Соответствие расчетных и экспериментальных результатов для широкого спектра конструкционных сталей и сплавов и режимов нагружения говорит о достаточной работоспособности предложенного варианта теории термопластичности.

Заключение

Сформулированы основные положения и уравнения варианта теории термопластичности, адекватно описывающие кинетику напряженно-деформированного состояния и нелинейные процессы накопления повреждений при произвольном сложном неизотермическом нагружении. Выделены материальные функции, замыкающие теорию, сформулированы базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций. Приводится описание верификации варианта теории термопластичности на широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований.

Следует отметить, что здесь в рамках одной теории описываются, экспериментально полученные в последнее время закономерности сложного нагружения как по плоским, так и по пространственным траекториям деформаций, эффекты посадки и вышагивания (ratcheting) петли пластического гистерезиса при несимметричных циклических нагружениях, закономерности неизотермического нагружения и нелинейного суммирования повреждений, а также эффекты дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональных циклических нагружениях.

Библиографический список

1. Термопрочность деталей машин: справочник / под ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с.

2. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 224 с.

3. Бондарь В.С. Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкции при сложном неизотермическом нагружении: дис. … д-ра физ.-мат. наук. – М.: Изд-во МАМИ, 1990. – 314 с.

4. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории.– М.: Физматлит, 2004. – 144 с.

5. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: Физматлит, 2008. – 176 с.

6. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.

7. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.

8. Нелинейная механика материалов / Ж. Бессон, Ж. Каето, Ж.-Л. Шабоши, Т.С. Форест. – Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397.

9. Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов неизотермического неупругого деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах: дис. … канд. физ.-мат.наук. – М.: Изд-во МАМИ, 2005. – 108 с.

10. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation // International Journal of Plasticity. – 2002. – Vol. 18. – P. 873–894.

11. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model / G. Kang, Y. Liu, J. Ding, Q. Gao // Int. J. of Plasticity. – 2009. – Vol. 25. – P. 838–860.

12. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature // Int. J. of Plasticity. – 2009. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.08.005

13. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.

14. Rahman S.M., Hassan T., Corona E. Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure // Int. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1756–1791.

15. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratcheting // Int. J. of Plasticity. – 2009. – Vol. 25. – P. 1560–1587.

16. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting // Int. J. of Plasticity. – 2010. – Vol. 26. – P. 711–730.

17. Dafalias Y.F., Feigenbaum H.P. Biaxial ratchetting with novel variations of kinematic hardening // Int. J. of Plasticity. – 2011. – Vol. 27. – P. 479–491.

18. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // Int. J. of Plasticity. – 2012. – Vol. 35. – P. 44–66.

19. Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б. О соотношениях эндохронной теории пластичности с «новой» мерой внутреннего времени при сложном циклическом нагружении // Технология легких сплавов. – 1990. – № 3. – С. 32–36.

20. Новожилов В.В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений // ПММ. – 1964. – Т. 28. – Вып. 3. – С. 393–400.

21. Chaboche J.-L., Dang–Van K., Cordier G. Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel // Proceedings of the 5th International Conference on SMiRT. Div L, Berlin, 1979. – P. No. L. 11/3.

22. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журн. – 1954. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 314–324.

23. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic colids // ASME J. Appl. Mech. – 1956. – Vol. 23. – P. 493–496.

24. Amstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical represention of the multiaxial bauscinger effect // CEGB Report No. RD/B/N/ 731. – 1966.

25. Кадашевич Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. – Вып. 6. – С. 39–45.

26. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior // International Journal of Plasticity. – 1993. – Vol. 9. – P. 375–390.

27. Бондарь В.С. Некоторые новые результаты исследования пластичности материалов при сложном нагружении // Упругость и неупругость. – М: ЛЕНАНД, 2006. – С. 94–109.

28. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 125–152.

29. Новожилов В.В., Рыбакина О.Г. О перспективах построения критерия прочности при сложном нагружении // Прочность при малом числе нагружения. – М.: Наука, 1969. – С. 71–80.

30. Бондарь В.С., Бурчаков С.В., Даншин В.В. Математическое моделирование процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов при циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. Вып. 72. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2010. – С. 18–27.

31. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Нелинейные процессы накопления повреждений при нестационарных циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности. – 2012. – Вып. 75. – Ч. 2. – С. 96–104.

32. Benallal A., Marquis D. Constitutive Equations for No proportional. Cyclic Elasto–Visco-plasticity // Journal of Engineering Materials and Technology. – 1987. – Vol. 109. – P. 326–337.

References

1. Termoprochnost' detalei mashin. Ed. by I.A. Birger, B.F. Shorr. Moscow: Mashinostroenie, 1975. 455 p.

2. Novozhilov V.V., Kadashevich Iu.I. Mikronapriazheniia v konstruktsionnykh materialakh [Microstresses in structural materials]. Leningrad: Mashinostroenie, 1990. 224 p.

3. Bondar' V.S. Neuprugoe povedenie i razrushenie materialov i konstruktsii pri slozhnom neizotermicheskom nagruzhenii [Inelastic behavior and fracture of materials and structures with complex non-isothermal loading]. *Thesis of doctor's degree dissertation*. Moskovskii gosudarstvennyi mashinostroitel'nyi universitet, 1990. 314 p.

4. Bondar V.S. Neuprugost'. Varianty teorii [Inelasticity. Variants of the theory]. Moscow: Fizmatlit, 2004. 144 p.

5. Bondar V.S., Danshin V.V. Plastichnost'. Proportsional'nye i neproportsional'nye nagruzhenija [Plasticity. Proportional and disproportionate loading]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 176 p.

6. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013. 194 p.

7. Volkov I.A., Korotkikh Ju.G. Uravneniia sostoianiia viazkouprugoplasticheskih sred s povrezhdeniiami [The equation of state viscous elastoplastic media with injuries]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 424 p.

8. Besson Zh., Kaeto Zh., J.-L. Chaboche, Forest T.S. Nelineinaia mekhanika materialov [Nonlinear mechanics of materials]. S.Peterburgskii politekhnicheskii universitet, 2010, 397 p.

9. Makarov D.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessov neizotermicheskogo neuprugogo deformirovaniia i nakopleniia povrezhdenii v konstruktsionnykh materialakh [Mathematical modeling of non-isothermal processes of inelastic deformation and damage accumulation in structural materials]. *Thesis of doctor's degree dissertation*. Moskovskii gosudarstvennyi mashinostroitel'nyi universitet, 2005. 108 p.

10. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation. *International Journal of Plasticity*, 2002, vol. 18, pp. 873-894.

11. Kang G., Liu Y., Ding J., Gao Q. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 838-860.

12. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. *Int. J. of Plasticity*, 2009. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.08.005

13. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1642-1692.

14. Rahman S.M., Hassan T., Corona E., Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1756-1791.

15. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 1560-1587.

16. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting. *Int. J. of Plasticity*, 2010, vol. 26, pp. 711-730.

17. Dafalias Y.F., Feigenbaum H.P. Biaxial ratchetting with novel variations of kinematic hardening. *Int. J. of Plasticity*, 2011, vol. 27, pp. 479-491.

18. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions. *Int. J. of Plasticity*, 2012, vol. 35, pp. 44-66.

19. Kadashevich Iu.I., Mosolov A.B. O sootnosheniiakh endokhronnoi teorii plastichnosti s «novoi» meroi vnutrennego vremeni pri slozhnom tsiklicheskom nagruzhenii [Of the ratio endochronic theory of plasticity with the "new" measure of the internal time under complex cyclic loading]. *Tekhnologiia legkikh splavov*, 1990, no. 3, pp. 32-36.

20. Novozhilov V.V. O slozhnom nagruzhenii i perspektivah fenomenologicheskogo podhoda k issledovaniju mikronaprjazhenij [About complex loading and prospects of the phenomenological approach to the study of microstresses]. PMM, 1964, vol. 28 (3), pp. 393-400.

21. Chaboche J.-L., Dang–Van K., Cordier G. Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel. *Proceedings of the* 5^{th} *International Conference on SMiRT*. Div L, Berlin. 1979. P. No. L. 11/3.

22. Ishlinskij A.Ju. Obshhaja teorija plastichnosti s linejnym uprochneniem [General theory of plasticity with linear hardening]. *Ukrainskii mathematicheskii zhurnal*, 1954, vol. 6 (3), pp. 314-324.

23. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic colids. *ASME J. Appl. Mech*., 1956, vol. 23, pp. 493-496.

24. Amstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical represention of the multiaxial bauscinger effect. *CEGB* Report No. RD/B/N/ 731, 1966.

25. Kadashevich Ju.I. O razlichnyh tenzorno-linejnyh sootnoshenijah v teorii plastichnosti [About the different tensor-linear correlations in the theory of plasticity]. *Issledovanija po uprugosti i plastichnosti*. Leningradskii gosudarstvennyi universitet, 1967, Vyp.6, pp. 39-45.

26. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity*, 1993, vol. 9, pp. 375-390.

27. Bondar V.S. Nekotorye novye rezul'taty issledovanija plastichnosti materialov pri slozhnom nagruzhenii [Some new results plastic materials under complex loading]. *Uprugost' i neuprugost'*. Moscow: LENAND, 2006. P. 94-109.

28. Bondar' V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessov deformirovaniia i nakopleniia povrezhdenii pri tsiklicheskikh nagruzheniiakh [Mathematical modelling of deformation and damage accumulation under cyclic loading] *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 2, pp. 125-152.

29. Novozhilov V.V., Rybakina O.G. O perspektivakh postroeniia kriteriia prochnosti pri slozhnom nagruzhenii [About the prospects of building the strength criterion under complex loading]. *Prochnost' pri malom chisle nagruzheniia*. Moscow: Nauka, 1969. P. 71-80

30. Bondar' V.S., Burchakov S.V., Danshin V.V. Matematicheskoe modelirovanie protsessov uprugoplasticheskogo deformirovaniia i razrusheniia materialov pri tsiklicheskikh nagruzheniiakh [Mathematical modeling of elasto-plastic deformation and fracture of materials under cyclic loading]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, iss. 72. Nizhegorodskii gosudarstvennyi universitet, 2010, pp. 18-27.

31. Bondar V.S., Danshin V.V., Semenov P.V. Nelineinye protsessy nakopleniia povrezhdenii pri nestatsionarnykh tsiklicheskikh nagruzheniiakh [Nonlinear processes of damage accumulation in unsteady cyclic loadings]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2012, iss. 75, part 2, pp. 96-104.

32. Benallal A., Marquis D. Constitutive Equations for No proportional. Cyclic Elasto-Viscoplasticity. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1987, vol. 109, pp. 326-337.