



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.1.04

УДК 539.374

## ТЕОРИЯ НЕУПРУГОСТИ БЕЗ ПОВЕРХНОСТИ НАГРУЖЕНИЯ И АССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ТЕЧЕНИЯ

**В.С. Бондарь, В.В. Даншин**

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 5 декабря 2014 г.  
Принята: 8 февраля 2015 г.  
Опубликована: 31 марта 2015 г.

#### Ключевые слова:

неупругость, циклическая диаграмма, поверхность нагружения, дополнительное упрочнение, вышагивание, накопление повреждений, материальные функции, идентификация, верификация

### АННОТАЦИЯ

На основе анализа экспериментальной петли гистерезиса (циклической диаграммы) стали 40X16H9Г2С выделены три участка, характеризующие различное поведение напряжений, т.е. выделены три типа напряжений. Для каждого типа напряжений сформулированы соответствующие эволюционные уравнения, характеризующие анизотропное упрочнение. Для описания изотропного упрочнения вводится эволюционное уравнение для параметра насыщения напряжения второго типа. В случае дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональном циклическом нагружении параметр насыщения напряжения второго типа принимается зависящим от меры непропорциональности (сложности) процесса нагружения. Для описания явления вышагивания (ratcheting) при несимметричных мягких циклических нагружениях параметр, входящий в эволюционное уравнение для напряжений первого типа, принимается зависящим от накопленной деформации. Девиатор напряжений определяется как сумма девиаторов напряжений трех типов. Для описания нелинейного процесса накопления повреждений вводится кинетическое уравнение, базирующееся на энергетическом принципе, где в качестве энергии, расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия, равная работе напряжений второго типа на поле деформаций. При несимметричных мягких циклических нагружениях в случае вышагивания (ratcheting) петли гистерезиса вводится кинетическое уравнение для повреждений, обусловленного работой напряжений первого типа на поле деформаций. Выделяются материальные функции, замыкающие теорию, формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций. Приводятся материальные функции стали 40X16H9Г2С и результаты верификации теории при пропорциональном (простом) жестком циклическом нагружении и непропорциональном (сложном) нагружении по траектории деформаций в виде концентрических окружностей с общим центром в начале координат. Рассматривается пять витков траектории, начиная с траектории большой кривизны до траектории средней кривизны. Наблюдается надежное соответствие результатов расчетов и экспериментов.

© ПНИПУ

© **Бондарь Валентин Степанович**, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: bondar@mami.ru  
**Даншин Владимир Васильевич**, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: tm@mami.ru

**Valentin S. Bondar**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: bondar@mami.ru  
**Vladimir V. Danshin**, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Ass. Professor, e-mail: tm@mami.ru

## THEORY OF INELASTICITY WITHOUT LOADING SURFACE AND ASSOCIATED FLOW RULE

V.S. Bondar, V.V. Danshin

Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Moscow, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received 5 December 2014  
Accepted 8 February 2015  
Published 31 March 2015

#### Keywords:

inelasticity, cyclic diagram,  
surface loading, extra isotropic  
hardening, ratcheting, damage  
accumulation, material function,  
identification, verification

### ABSTRACT

Based on the analysis of experimental hysteresis loops (cyclic diagram) of steel 40X16H9Г2С three sections are allocated describing the different behavior of the stress, i.e., three types of stresses. For each type of stress the authors have formulated appropriate evolutionary equations characterizing anisotropic hardening. To describe isotropic hardening, evolutionary equation for the parameter saturation stresses of the second type is introduced. In case of additional isotropic hardening under non-proportional cyclic loading we consider the stress saturation parameter of the second type dependent on the measure of disproportionality (complexity) of the loading process. To describe the phenomena of ratcheting under non-symmetric soft cyclic loading we consider the parameter, which is an evolutionary equation for the stress of the first type to be dependent on the accumulated strain. The stress deviator is defined as the sum of stress deviators of three types. To describe the nonlinear process of damage accumulation, the authors introduced the kinetic equation based on the energy principle, where energy equal to the work of stress of the second type on the deformations field is taken as energy spent on creating damage in the material. Kinetic equation for damage caused by stress of the first type on the field deformations is introduced under nonsymmetrical soft cyclic loading in case of ratcheting of the hysteresis loop. It became possible to assign material functions, close theory, formulate the basic experiment and the method of material functions identification. We have presented material functions of steel 40X16H9Г2С and the results of verification of the theory under proportional (simple) hard cyclic loading and disproportionate (complex) loading sweep deformations in the form of concentric circles with a common center at the origin of coordinates. Five turns of the trajectory, from the trajectory of the greater curvature to the average trajectory curvature, are considered. There is a reliable agreement between the results of calculations and experiments.

© PNRPU

---

## Введение

Математическое моделирование процессов деформирования при произвольных сложных циклических нагружениях строится в основном на вариантах теории пластического течения при комбинированном упрочнении, обзор и анализ которых содержится в работах [1–13]. Основной проблемой построения этих вариантов является формулировка достаточно адекватных эволюционных уравнений для смещения центра поверхности нагружения, а также неоднозначность в экспериментальном определении границ поверхности нагружения. В теории течения деформация разделяется на упругую и пластическую. Для определения пластической деформации используется ассоциированный с поверхностью нагружения закон течения (градиентальный закон течения).

В настоящей работе на основе анализа экспериментальных результатов при циклическом нагружении, а именно петли циклического гистерезиса (циклической диаграммы), выделены три типа напряжений, для каждого из которых сформулированы соответствующие эволюционные уравнения. Выделенные три типа напряжений отвечают анизотропному упрочнению. Для описания изотропного упрочнения вводится эволюционное уравнение для параметра насыщения напряжения второго типа. В случае дополнительно изотропного упрочнения при непропорциональном (сложном) циклическом нагружении параметр насыщения напряжений второго типа принимается зависящим [1–3] от меры непропорциональности (сложности) процесса нагружения. Для описания явления вы-

шагивания (ratcheting) при несимметричных мягких циклических нагружениях параметр, входящий в эволюционное уравнение для напряжений первого типа, принимается [3, 14, 15] зависящим от накопленной деформации. Девиатор полных напряжений определяется как сумма напряжений трех типов.

Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводится, по аналогии с работами [1–4, 14, 15], кинетическое уравнение накопления повреждений, в котором в качестве энергии, расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия, равная работе напряжений второго типа на поле полных деформаций.

Основной особенностью предлагаемого варианта теории неупругости является то, что неупругая деформация едина и не разделяется на упругую и пластическую, а также не используется понятие поверхности нагружения и, соответственно, ассоциированный закон течения.

Выделены материальные функции, замыкающие вариант теории и подлежащие экспериментальному определению. Сформулирован базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций. Приводятся материальные функции стали 40X16H9Г2С, полученные на основе экспериментов [16]. Производится верификация теории при пропорциональном (простом) и непропорциональном (сложном) циклических нагружениях.

## 1. Основные положения и уравнения теории

Для построения соотношений теории неупругости рассматривается петля гистерезиса (рис. 1) в девиаторных компонентах  $\frac{3}{2}s_{11}$  и  $e_{11}$  при одноосном растяжении-сжатии. Затем на полуцикле от точки смены направления деформирования вводится система координат: напряжение  $\sigma$ , деформация  $\varepsilon$ . Следует заметить, что  $\sigma$  и  $\varepsilon$  – девиаторы и обозначают на рисунке координаты, а не одноосные напряжение и деформацию. Кривая в координатах  $\sigma, \varepsilon$  включает в себя упругое и пластическое деформирование без разделения этих деформаций. Далее вычисляется производная  $d\sigma/d\varepsilon$ , и строится кривая в координатах  $d\sigma/d\varepsilon$  и  $\sigma$  (рис. 2).

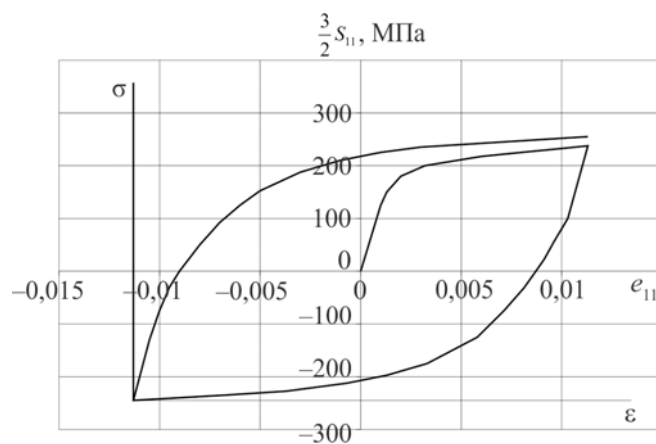


Рис. 1. Петля гистерезиса

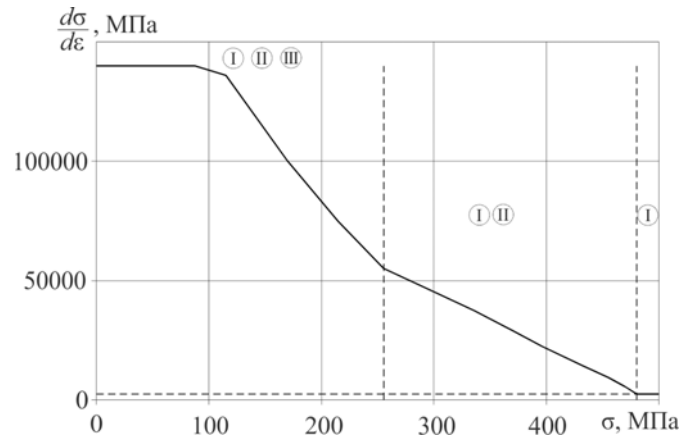


Рис. 2. Кривая в координатах  $d\sigma/d\varepsilon$  и  $\sigma$

На полученной кривой можно выделить три участка, характеризующие различное поведение напряжений. На первом участке производная имеет практически постоянное значение, и здесь для напряжений первого типа предлагается эволюционное уравнение, аналогичное уравнению Ишлинского–Прагера [17, 18] для микронапряжений первого типа [15]

$$\dot{s}_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} g^{(1)} \dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (1)$$

На втором участке производная меняется по линейному закону, и здесь для напряжений второго типа предлагается эволюционное уравнение, аналогичное уравнению Амстронга–Фредерика–Кадашевича [19, 20] для микронапряжений второго типа [15]

$$\dot{s}_{ij}^{(2)} = \frac{2}{3} g^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij} + g_s^{(2)} s_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{u*} \left( \dot{\varepsilon}_{u*} = \left( \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (2)$$

Далее на третьем участке производная меняется по нелинейному закону, который может быть описан серией эволюционных уравнений типа Оно-Ванга [3, 21] для микронапряжений третьего типа [15]

$$\dot{s}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (m = 3, \dots, M). \quad (3)$$

Определяющие функции  $g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$ ,  $g_s^{(2)}$ ,  $g^{(m)}$ , входящие в уравнения (1)–(3), выражаются [1–3, 14, 15] через материальные следующим образом:

$$g^{(1)} = E_s, \quad g^{(2)} = \beta \sigma_s, \quad g_s^{(2)} = -\beta, \quad (4)$$

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)} \sigma_s^{(m)}, \\ 0, \text{ если } \sigma_u^{(m)} \geq \sigma_s^{(m)} \cap s_{ij}^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij} > 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\left( \sigma_u^{(m)} = \left( \frac{3}{2} s_{ij}^{(m)} s_{ij}^{(m)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m = 3, \dots, M \right).$$

Для описания изотропного упрочнения и разупрочнения вводится зависимость параметра насыщения  $\sigma_s$  для напряжения второго типа от накопленной деформации  $\varepsilon_{u*}$ :

$$\sigma_s = \sigma_s(\varepsilon_{u*}) \quad (\varepsilon_{u*} = \int \dot{\varepsilon}_{u*} dt). \quad (6)$$

Здесь, в уравнениях (4)–(6),  $E_s, \sigma_s(\varepsilon_{u*}), \beta, \sigma_s^{(m)}, \beta^{(m)}$  – материальные функции, подлежащие экспериментальному определению.

Девiator напряжений определяется аналогично модели Новожилова–Шабоши [22, 23] для микронапряжений [15] как сумма напряжений трех типов, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение:

$$s_{ij} = \sum_{m=1}^M s_{ij}^{(m)}. \quad (7)$$

Окончательно уравнение для девиатора напряжений с учетом (1)–(3) и (7) будет иметь следующий вид:

$$\dot{s}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij} + g_s^{(2)} s_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{u*}, \quad (8)$$

$$g = \sum_{m=1}^M g^{(m)}. \quad (9)$$

К уравнению (8) следует добавить уравнение, связывающее шаровые составляющие тензоров напряжений  $\sigma_0 = \sigma_{ii} / 3$  и деформаций  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii} / 3$ :

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0. \quad (10)$$

Здесь  $K$  – модуль объемного сжатия.

Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводится кинетическое уравнение накопления повреждений, базирующееся на энергетическом принципе, где в качестве энергии, расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия, равная работе напряжений второго типа на поле деформаций. Это кинетическое уравнение вводится по аналогии с кинетическим уравнением [15], базирующимся на работе микронапряжений второго типа на поле пластических деформаций. Тогда кинетическое уравнение накопления повреждений будет иметь следующий вид:

$$\dot{\omega} = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{s_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}}{W_s}, \quad (11)$$

$$\alpha = \left( \sigma_s / \sigma_u^{(2)} \right)^{n_\alpha}. \quad (12)$$

Здесь  $\omega$  – мера повреждения;  $W_s$  – энергия разрушения;  $\alpha$  и  $n_\alpha$  – функция и параметр нелинейности процесса накопления повреждений;  $\sigma_u^{(2)}$  – интенсивность напряжений второго типа.

Полученный вариант теории неупругости, в отличие от вариантов теории пластического течения, имеет следующие особенности:

- деформация не разделяется на упругую и пластическую;
- нет необходимости введения поверхности нагружения (текучести);
- не используется ассоциированный закон течения;
- нет необходимости введения условий нагрузки или разгрузки (условий упругого или упругопластического состояний);
- вычисляются напряжения второго типа, совпадающие с микронапряжениями второго типа, которые отвечают за процесс накопления повреждений.

Для описания явления вышагивания (ratcheting) при несимметричных мягких циклических нагружениях параметр  $E_s$ , входящий в первое эволюционное уравнение для напряжений первого типа, принимается [3] зависящим от накопленной деформации  $\varepsilon_{u*}$  следующим образом:

$$E_s = E_{s0} / \left[ 1 + K_E (\varepsilon_{u*})^{n_E + 1} \right]. \quad (13)$$

Здесь  $E_{s0}$  – начальный модуль анизотропного упрочнения;  $K_E, n_E$  – модули вышагивания, подлежащие экспериментальному определению.

В случае дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональном циклическом нагружении эволюционное уравнение для параметра насыщения напряжения второго типа принимается зависящим от меры непропорциональности (сложности) процесса нагружения [1–3]:

$$\dot{\sigma}_s = \dot{\sigma}_{s0} + \dot{\sigma}_{sA}, \quad (14)$$

$$\dot{\sigma}_{sA} = \left[ (1-A)\theta_0 + A\theta_1 \right] \left\{ \left[ (1-A) + Ad_1 \right] \sigma_{s0} - \sigma_s \right\} \dot{\varepsilon}_{u*}, \quad (15)$$

$$A = 1 - \left( \frac{\dot{s}_{ij} \dot{e}_{ij}}{\dot{\sigma}_{u*} \dot{\varepsilon}_{u*}} \right)^2, \quad (16)$$

$$\dot{\sigma}_{u*} = \left( \frac{3}{2} \dot{s}_{ij} \dot{s}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \dot{\varepsilon}_{u*} = \left( \frac{2}{3} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь  $A$  – параметр непропорциональности нагружения (мера сложности процесса нагружения);  $\sigma_{s0}(\varepsilon_{u*})$  – функции изотропного упрочнения при пропорциональном ( $A=0$ ) нагружении;  $\theta_0, \theta_1, d_1$  – модули дополнительного изотропного упрочнения.

Энергия разрушения в случае дополнительного упрочнения зависит от параметра непропорциональности следующим образом [1–3]:

$$W_s = (1-A)W_{s0} + AW_{s1}. \quad (17)$$

Здесь  $W_{s0}$  – энергия разрушения при пропорциональном ( $A=0$ ), а  $W_{s1}$  – при непропорциональном ( $A=1$ ) нагружении.

Следует заметить, что в случае вышагивания петли гистерезиса может быть введено кинетическое уравнение для повреждения, обусловленное работой напряжений первого типа, как и для микронапряжений первого типа [15]

$$\dot{\omega} = \frac{s_{ij}^{(1)} \dot{\epsilon}_{ij}}{W_b}, \quad (18)$$

где  $W_b$  – энергия разрушения за счет вышагивания. Тогда полное повреждение будет равно сумме повреждений первого и второго типов.

Таким образом, данный вариант теории неупругости замыкают следующие материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

$K$  – модуль объемного сжатия;

$E_{s0}$ ,  $\sigma_{s0}(\epsilon_{u*})$ ,  $\beta$ ,  $\sigma_s^{(m)}$ ,  $\beta^{(m)}$  ( $m = 3, \dots, M$ ) – модули анизотропного упрочнения;

$K_E$ ,  $n_E$  – модули вышагивания;

$\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $d_1$  – модули дополнительного изотропного упрочнения;

$W_{s0}$  – энергия разрушения при пропорциональном ( $A = 0$ ) нагружении;

$W_{s1}$  – энергия разрушения при непропорциональном ( $A = 1$ ) нагружении;

$n_\alpha$  – параметр нелинейности процесса накопления повреждений;

$W_b$  – энергия разрушения за счет вышагивания.

## 2. Расчетно-экспериментальный метод определения материальных функций

Материальные функции определяются по результатам испытаний в условиях одноосного напряженного состояния (растяжения-сжатия или кручения). Базовый эксперимент включает в себя следующий набор данных:

- модуль объемного сжатия, который определяется традиционным методом;
- диаграмма растяжения (кручения) до деформации 0,05 – 0,1;
- циклические диаграммы при симметричном растяжении-сжатии или знакопеременном кручении при постоянном размахе деформации 0,02 – 0,03;
- циклические диаграммы при несимметричном растяжении-сжатии или знакопеременном кручении при постоянном размахе деформации 0,01 – 0,02 и средней деформации цикла 0,05 – 0,1;
- данные по малоцикловой усталости при одноблочном и двухблочном жестком симметричном циклическом нагружении;
- данные по малоцикловой усталости при одноблочном мягком несимметричном циклическом нагружении.

Здесь жесткое нагружение соответствует нагружению при задаваемых деформациях, а мягкое – при задаваемых напряжениях.

Для определения модулей анизотропного упрочнения стабилизированная петля гистерезиса (циклическая диаграмма) перестраивается в координатах: напряжение  $\sigma$ , деформация  $\epsilon$  (см. рис. 1). Начало этой системы координат расположено в точке смены направления деформирования.

Далее вычисляется производная  $d\sigma/d\epsilon$ , и строится кривая в координатах:  $d\sigma/d\epsilon$  и  $\sigma$  (см. рис. 2). На кривой, показанной на рис. 2, выделяются три участка, характеризующие различное поведение производной  $d\sigma/d\epsilon$ . На первом участке производная имеет

практически постоянное значение, которое равно значению параметра  $E_{s0}$ . Затем кривая на рис. 2 перестраивается в координатах

$$d\hat{\sigma} / d\varepsilon = (d\sigma / d\varepsilon - E_{s0}) \quad \text{и} \quad \hat{\sigma} = (\sigma - E_{s0}\varepsilon),$$

т.е. исключается влияние напряжений первого типа. Полученная линейная зависимость на втором участке (рис. 3) позволяет найти параметры  $\sigma_s$  и  $\beta$  по формулам

$$\beta = \left. \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} \right|_M / (\hat{\sigma}_A - \hat{\sigma}_M), \quad (19)$$

$$\sigma_s = \frac{\hat{\sigma}_A - \hat{\sigma}_M}{2 \exp(-\beta \varepsilon_M)}. \quad (20)$$

Здесь  $\varepsilon_M$  – деформация окончания третьего участка (окончание изменения напряжений третьего типа).

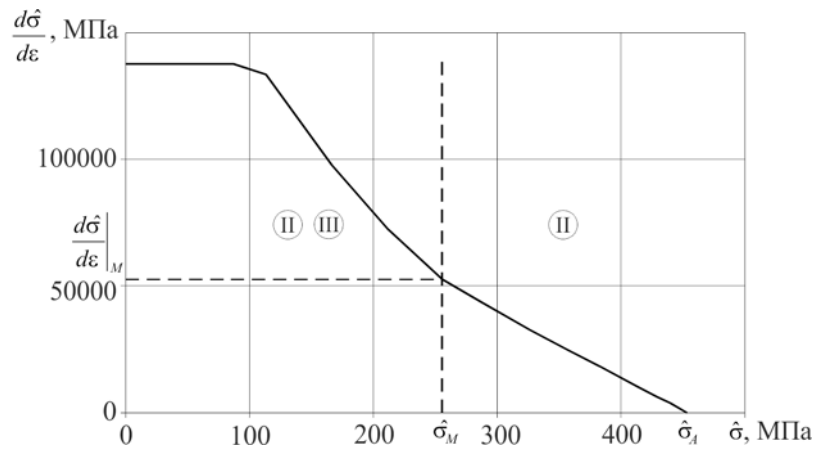


Рис. 3. Кривая в координатах  $d\hat{\sigma} / d\varepsilon$  и  $\hat{\sigma}$

Далее кривая на рис. 1 перестраивается в координатах

$$\tilde{\sigma} = \sigma - E_{s0}\varepsilon - 2\sigma_s [1 - \exp(-\beta\varepsilon)] \quad \text{и} \quad \varepsilon \quad (\varepsilon \in [0, \varepsilon_M]).$$

Полученная кривая (рис. 4), отвечает напряжениям только третьего типа. Длительность третьего участка достаточно мала  $\varepsilon_M \approx 0,002 - 0,004$ , т.е. напряжения третьего типа возникают практически в пределах технического допуска на остаточную деформацию при определении условного предела текучести. Далее интервал  $[0; \tilde{\sigma}_M]$  разбивается на  $(M - 2)$  частей, и параметры анизотропного упрочнения вычисляются по следующим формулам:

$$\beta^{(m)} = 2 / \varepsilon_m \quad (m = 3, \dots, M), \quad (21)$$

$$\sigma_s^{(M)} = \frac{\tilde{\sigma}_M - \tilde{\sigma}_{M-1}}{\varepsilon_M - \varepsilon_{M-1}} \cdot \frac{1}{\beta^{(M)}}, \quad (22)$$



$$\sigma_s^{(m)} = \frac{1}{\beta^{(m)}} \left[ \frac{\tilde{\sigma}_m - \tilde{\sigma}_{m-1}}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}} - \frac{\tilde{\sigma}_{m+1} - \tilde{\sigma}_m}{\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m} \right],$$

$$(m = M - 1, \dots, 3; \tilde{\sigma}_2 = 0; \varepsilon_2 = 0).$$
(23)

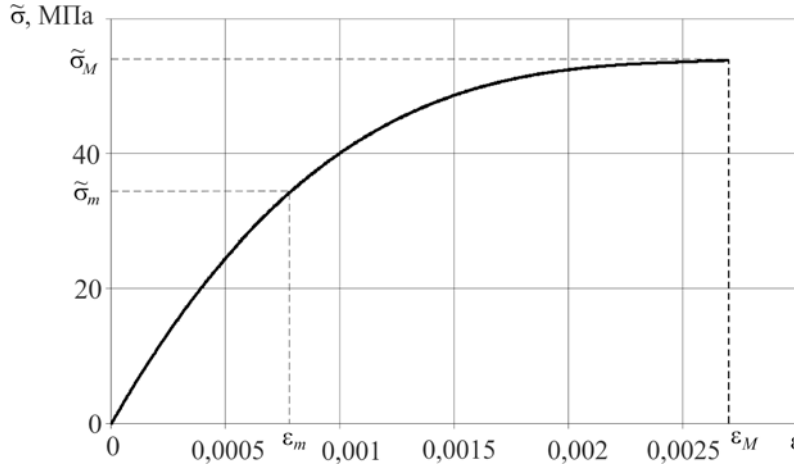


Рис. 4. Кривая в координатах  $\tilde{\sigma}$  и  $\varepsilon$

Модули вышагивания определяются по результатам одноосных испытаний при жестком несимметричном циклическом нагружении на основе явления «посадки» петли гистерезиса. Полученная экспериментальная зависимость между средним напряжением цикла  $\sigma_c$  и числом циклов  $N$  строится в логарифмических координатах

$$y = \lg(E_{s0} \varepsilon_c / \sigma_c - 1),$$
(24)

$$x = \lg(\varepsilon_c + 2\Delta\varepsilon N),$$
(25)

где  $\varepsilon_c$  – средняя деформация цикла;  $\Delta\varepsilon$  – размах деформации на цикле. Эта экспериментальная зависимость является линейной, что позволяет по углу  $\gamma$  наклона прямой и точки пересечения прямой с осью ординат определить модули вышагивания по формулам

$$\lg K_E = y_0, \quad n_E + 1 = \text{tg}\gamma.$$
(26)

Получив параметры анизотропного упрочнения и модули вышагивания, можно теперь вычислить величину изотропного упрочнения. Для этого используется экспериментальная диаграмма растяжения и экспериментальные значения напряжения в конце полуциклов растяжения. Подбирая вычисленные значения напряжений при соответствующих значениях накопленной деформации до совпадения с экспериментальными значениями напряжений, можно получить функцию изотропного упрочнения  $\sigma_{s0}(\varepsilon_{u*})$ . Начальное значение  $\sigma_{s0}(0)$  определяется по следующей формуле:

$$\sigma_{s0}(0) = \frac{1}{\beta} \left( 3G - E_{s0} - \sum_{m=3}^M \beta^{(m)} \sigma_s^{(m)} \right).$$
(27)

Здесь  $G$  – модуль сдвига. Далее подбор значений  $\sigma_{s0}(\varepsilon_{u*})$  производится последовательно для возрастающих значений накопленной деформации.

Энергия разрушения  $W_{s0}$  определяется на основе вычисления работы напряжений второго типа при циклических нагружениях до экспериментальных значений числа циклов до разрушения.

Параметр нелинейности процесса накопления повреждений определяется подбором до совпадения расчетных и экспериментальных результатов при двухблочном циклическом нагружении (обычно  $n_\alpha \approx 1,5$ ).

Энергия разрушения при вышагивании  $W_b$  определяется также подбором при сопоставлении расчетных и экспериментальных результатов при несимметричном мягком циклическом нагружении.

Модули дополнительного изотропного упрочнения  $\theta_0, \theta_1, d_1$  и энергия разрушения  $W_{s1}$  определяются [1–3] на основе экспериментальных исследований при пропорциональном и непропорциональном (траектория деформаций в виде окружности) циклических нагружениях вплоть до разрушения.

Далее приводятся материальные функции стали 40X16H9Г2С, полученные на основе экспериментов [16].

Здесь для получения материальных функций используется кривая деформирования на первом полупериоде циклического нагружения, показанного на рис. 5, и диаграмма растяжения этой стали [16]. Модули дополнительного изотропного упрочнения получены при обработке экспериментальных данных [16] при нагружении по траектории деформаций в виде окружности.

$$E_{s0} = 3600 \text{ МПа}; \quad \beta = 320.$$

$\varepsilon_{u*}$	0	0,0016	0,0024	0,0033	0,0092	0,028	0,046	0,083	0,122	0,25
$\sigma_{s0}, \text{ МПа}$	484	400	202	233	233	236	239	251	261	287

$$\beta^{(3)} = 3060; \quad \sigma_s^{(3)} = 12,2 \text{ МПа}; \quad \beta^{(4)} = 1530; \quad \sigma_s^{(4)} = 11,8 \text{ МПа}$$

$$\beta^{(5)} = 905; \quad \sigma_s^{(5)} = 9,1 \text{ МПа}; \quad \theta_0 = 7; \quad \theta_1 = 25; \quad d_1 = 2,3.$$

### 3. Исследование неупругого деформирования при пропорциональном и непропорциональном циклических нагружениях

Теоретический эксперимент и сопоставление с результатами экспериментальных исследований проводится на стали 40X16H9Г2С при пропорциональном (простом) и непропорциональном (сложном) циклических нагружениях. На рис. 5 приведена расчетная циклическая диаграмма при жестком симметричном одноосном нагружении с размахом деформации  $\Delta \varepsilon_1 = 0,0226$ . Всего реализовано четыре цикла нагружения. Результаты расчета показаны сплошной кривой, а результаты эксперимента [16] – темными кружками (начальное нагружение и первый циклы) и темными треугольниками (четвертый цикл). Расчетные и экспериментальные результаты приводятся в векторном представлении деформаций и напряжений А.А. Ильюшина [24].

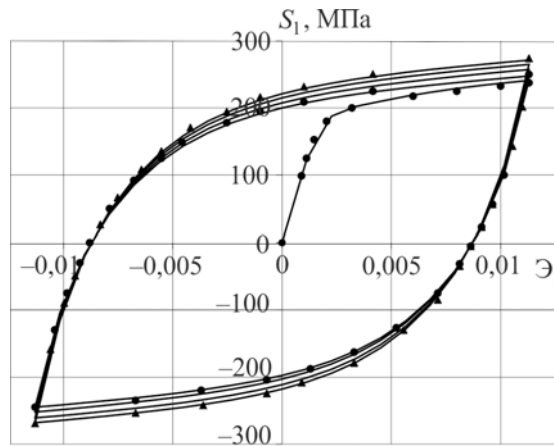


Рис. 5. Циклические диаграммы

На рис. 6–9 приведены результаты расчетных и экспериментальных [16] исследований непропорционального нагружения стали 40X16H9Г2С по траектории деформаций в виде концентрических окружностей с общим центром, совпадающим с началом координат. Переход с одной окружности на другую осуществляется по прямолинейной траектории, совпадающей с радиусом. Всего реализовано пять витков траектории с радиусами кривизны 0,0025; 0,005; 0,0075; 0,01; 0,0125. Выход на каждый последующий виток осуществляется в результате догружения по  $\varepsilon_1$ . На рис. 6, 7 показаны изменения компонент вектора напряжений  $S_1$  и  $S_3$  вдоль траектории деформаций в зависимости от длины дуги  $s$ , полученные в результате расчета – сплошные кривые и эксперимента [16] – светлые кружки. Скалярные и векторные свойства (изменения длины вектора напряжений и угла отклонения вектора напряжений от касательной к траектории деформаций в зависимости от длины дуги  $s$ ) приведены на рис. 8 и 9 соответственно. На этих рисунках сплошные кривые – расчет, светлые кружки – эксперимент [16]. Наблюдается удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных результатов как при пропорциональном (простом), так и непропорциональном (сложном) циклическом нагружении.

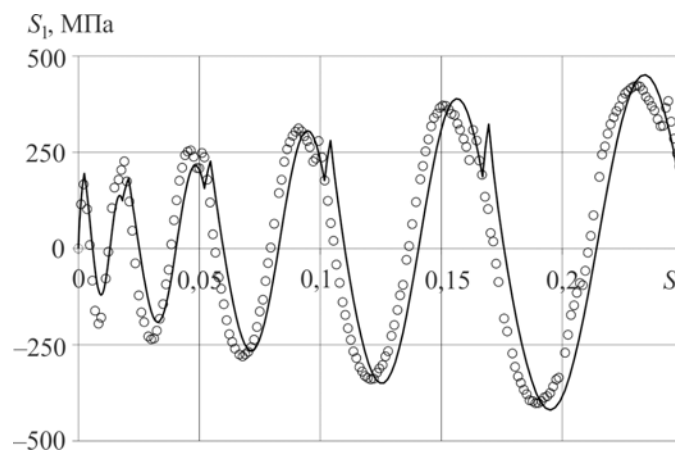


Рис. 6. Изменение компоненты вектора напряжений  $S_1$

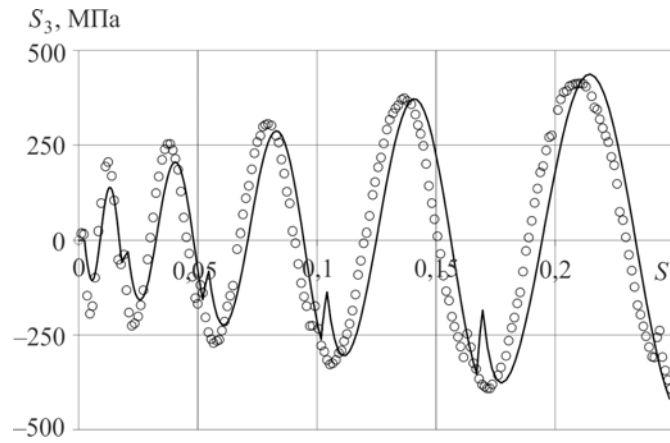


Рис. 7. Изменение компоненты вектора напряжений  $S_3$

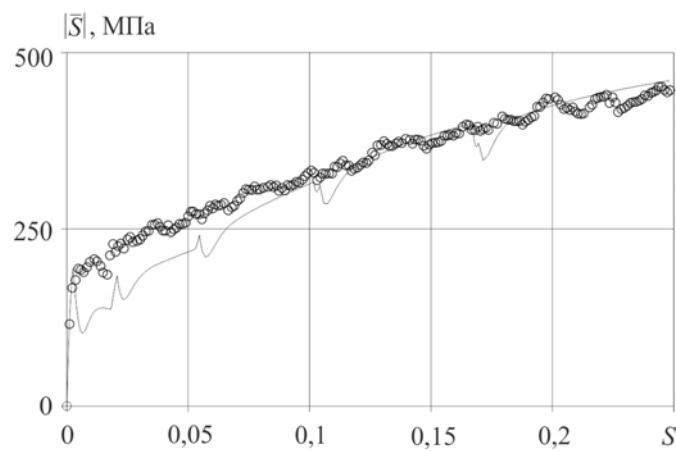


Рис. 8. Скалярные свойства

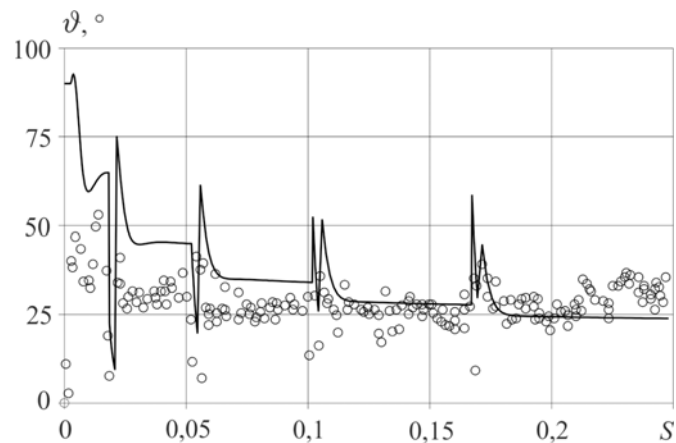


Рис. 9. Векторные свойства

## Заключение

Сформулированы основные положения и уравнения варианта теории неупругости без разделения деформации на упругую и пластическую, без введения поверхности нагружения и ассоциированного закона течения.

На основе того, что работа напряжений второго типа на поле полных деформаций, как и работа микронапряжений второго типа на поле пластических деформаций, является универсальной характеристикой разрушения материала при циклических нагружениях, сформулировано кинетическое уравнение для нелинейных процессов накопления повреждений. Следует заметить, что напряжения второго типа практически совпадают с микронапряжениями второго типа [15] и, следовательно, работа напряжений второго типа практически совпадает с работой микронапряжений второго типа. Поэтому, исходя из результатов работы [15] по малоцикловой усталости и нелинейному суммированию повреждений, можно говорить о достаточной работоспособности представленных здесь кинетических уравнений накопления повреждений.

Выделены материальные функции замыкающие теорию, сформулирован достаточно простой базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций.

Приведено сопоставление результатов расчетов и экспериментов при пропорциональном (простом) и непропорциональном (сложном) циклических нагружениях стали 40X16H9Г2С. Рассматривались траектории деформаций от большой до средней кривизны. Получено удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных результатов, что говорит о достаточной работоспособности предложенного варианта теории неупругости.

## Библиографический список

1. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.
2. Бондарь В.С., Данишин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: Физматлит, 2008. – 176 с.
3. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.
4. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
5. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation // International Journal of Plasticity. – 2002. – Vol. 18. – P. 873–894.
6. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model / G. Kang, Y. Liu, J. Ding, Q. Gao // Int. J. of Plasticity. – 2009. – Vol. 25. – P. 838–860.
7. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature // Int. J. of Plasticity. – 2009. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.08.005.
8. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.
9. Rahman S.M., Hassan T., Corona E. Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure // Int. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1756–1791.
10. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting // Int. J. of Plasticity. – 2009. – Vol. 25. – P. 1560–1587.
11. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting // Int. J. of Plasticity. – 2010. – Vol. 26. – P. 711–730.
12. Dafalias Y.F., Feigenbaum H.P. Biaxial ratchetting with novel variations of kinematic hardening // Int. J. of Plasticity. – 2011. – Vol. 27. – P. 479–491.

13. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // *Int. J. of Plasticity*. – 2012. – Vol. 35. – P. 44–66.
14. Бондарь В.С., Бурчаков С.В., Даншин В.В. Математическое моделирование процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов при циклических нагружениях // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. Вып. 72*. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2010. – С. 18–27.
15. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2014. – № 2. – С. 125–152.
16. Охлопков Н.Л. Закономерности процессов упругопластического деформирования металлов при сложном напряженном состоянии и нагружении: автореф. ... дис. д-ра техн. наук / Твер. гос. техн. ун-т. – Тверь, 1997. – 35 с.
17. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // *Укр. матем. журн.* – 1954. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 314–324.
18. Prager W. The theory of plasticity: A. Survey of Recent Achievements // *Proc. Inst. Mech. Engrs. London*. 1955. – 169.41.
19. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial bausinger effect // *CEGB Report No. RD/B/N/ 731*. – 1966.
20. Кадашевич Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности // *Исследования по упругости и пластичности*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. – Вып.6. – С. 39–45.
21. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior // *International Journal of Plasticity*. – 1993. – Vol. 9. – P. 375–390.
22. Новожилов В.В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений // *ПММ*. – 1964. – Т. 28. – Вып. 3. – С. 393–400.
23. Chaboche J.-L., Dang-Van K., Cordier G. Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel // *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on SMiRT. Div L*. – Berlin. Paper No. L. 11/3 – 1979.
24. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

## References

1. Bondar V.S. Neuprugost. Varianty teorii [Inelasticity. Variants of the theory]. Moscow: Fizmatlit, 2004. 144 p.
2. Bondar V.S., Danshin V.V. Plastichnost'. Proportsional'nye i neproportsional'nye nagruzheniia [Plasticity. Proportional and disproportionate loading]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 176 p.
3. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013. 194 p.
4. Volkov I.A., Korotkikh Ju.G. Uravneniia sostoianiia viazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniiami [The equation of state viscous elastoplastic media with injuries]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 424 p.
5. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation. *International Journal of Plasticity*, 2002, vol. 18, pp. 873-894.
6. Kang G., Liu Y., Ding J., Gao Q. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 838-860.
7. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. *Int. J. of Plasticity*, 2009. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.08.005.

8. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1642-1692.
9. Rahman S.M., Hassan T., Corona E., Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1756-1791.
10. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 1560-1587.
11. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting. *Int. J. of Plasticity*, 2010, vol. 26, pp. 711-730.
12. Dafalias Y.F., Feigenbaum H.P. Biaxial ratchetting with novel variations of kinematic hardening. *Int. J. of Plasticity*, 2011, vol. 27, pp. 479-491.
13. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions. *Int. J. of Plasticity*, 2012, vol. 35, pp. 44-66.
14. Bondar' V.S., Burchakov S.V., Danshin V.V. Matematicheskoe modelirovanie protsessov uprugoplasticheskogo deformirovaniia i razrusheniia materialov pri tsiklicheskih nagruzheniakh. [Mathematical modeling of elasto-plastic deformation and fracture of materials under cyclic loading] *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2010, iss. 72, pp. 18-27.
15. Bondar' V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessov deformirovaniia i nakopleniia povrezhdenii pri tsiklicheskih nagruzheniakh [Mathematical modelling of deformation and damage accumulation under cyclic loading] *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 2, pp. 125-152.
16. Okhlopkov N.L. Zakonomernosti protsessov uprugoplasticheskogo deformirovaniia metallov pri slozhnom napriazhennom sostoianii i nagruzhenii [Regularities of the processes of elastic-plastic deformation of metals under complex stress state and loading]. *Abstract of the thesis of doctors of technical sciences*. Tverskoi gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 1997. 35 p.
17. Ishlinskij A.Ju. Obshchaia teoriia plastichnosti s lineinym uprochneniem [General theory of plasticity with linear hardening]. *Ukrainian mathematical journal*, 1954, vol. 6 (3), pp. 314-324.
18. Prager W. The theory of plasticity: A. Survey of Recent Achievements. *Proc. Inst. Mech. Engrs*, London, 1955, 169.41.
19. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial bausinger effect, *CEGB Report* No. RD/B/N/ 731, 1966.
20. Kadashevich Ju.I. O razlichnyh tenzorno-lineinykh sootnosheniakh v teorii plastichnosti [About the different tensor-linear correlations in the theory of plasticity]. *Issledovaniia po uprugosti i plastichnosti*, 1967, iss. 6, pp. 39-45.
21. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity*, 1993, vol. 9, pp. 375-390.
22. Novozhilov V.V. O slozhnom nagruzhenii i perspektivakh fenomenologicheskogo podkhoda k issledovaniiu mikronapriazhenii [About complex loading and prospects of the phenomenological approach to the study of microstresses]. *PMM*, 1964, vol. 28 (3), pp. 393-400.
23. Chaboche J.L., Dang-Van K., Cordier G. Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on SMiRT*. Div L, Berlin. Paper No. L. 11/3, 1979.
24. Il'jushin A.A. Mekhanika sploshnoi sredy [Continuum Mechanics]. Moscovskii gosudarstvennyi universitet, 1990. 310 p.